

涉及实零点的亚纯函数 Picard 型定理

徐成雨, 刘晓俊

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 利用亚纯函数的正规理论和值分布理论的基本概念、研究方法以及研究成果, 并以 Marty 正规规定则为基础, 对零点均是实数的亚纯函数的 Picard 型定理进行了研究, 得到: 设 $d \in \mathbb{N}^+$, f 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的超越亚纯函数, 若存在 $M \geq 0$, 使得 f 满足 f 的零点均为实数; f 的极点重级至少为 3; 当 $f(z) = 0$ 时, 必有 $|f'(z)| \leq M|z|^d$, 则 $f' - z^d$ 有无穷多个零点.

关键词: 亚纯函数; 正规族; 实零点; Picard 型定理

中图分类号: O 174.52 **文献标志码:** A

Picard Theorem of Meromorphic Functions with Real Zeros

XU Chengyu, LIU Xiaojun

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: By virtue of some fundamental concepts, analysis methods and research results about the theories of value distribution and normal family for meromorphic functions and based on Marty's criterion for normality, the Picard theorem of meromorphic functions with real zeros was discussed and it is proved: let $d \in \mathbb{N}^+$, f be a transcendental meromorphic function on the complex plane $\mathbb{C}$, if there exists $M \geq 0$, so that for f , all zeros of f are real number, all of whose poles have multiplicity at least 3 and $f(z) = 0 \Rightarrow |f'(z)| \leq M|z|^d$, then $f' - z^d$ has infinite zeros.

Keywords: meromorphic function; normal family; real zero; Picard theorem

1 问题的提出

1959 年 Hayman^[1] 证明了 Picard 型定理 (定理 1).

定理 1 设 $k \in \mathbb{N}^+$, f 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数, 若 $f \neq 0$ 且 $f^{(k)}(z) \neq 1$, 则 $f \equiv C$, C 为常数.

1979 年 Gu^[2] 证明了对应的正规规定则 (定理 2).

定理 2 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 的亚纯函数族, $k \in \mathbb{N}^+$, 若对于任意的 $f \in \mathcal{F}$, 有 $f \neq 0$ 且 $f^{(k)}(z) \neq 1$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

2013 年童晓丽等^[3] 首先考虑将“ $f(z) \neq 0$ ”减弱为“ $f(z)$ 的零点分布在一条给定的直线上”, 得到了定理 3.

定理 3 设 $\mathcal{F}$ 是定义在单位圆盘 D 上的亚纯函数族, 若存在 $M \geq 0$, 使得对于任意 $f \in \mathcal{F}$, 有:

收稿日期: 2016-04-25

基金项目: 国家自然科学基金青年基金资助项目 (11401381)

第一作者: 徐成雨 (1992-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 复分析. E-mail: chengyuxu5928@sina.com

通信作者: 刘晓俊 (1982-), 男, 副教授. 研究方向: 复分析. E-mail: xiaojunliu2007@hotmail.com

- a. $f=0 \Rightarrow |f'| \leq M$;
- b. f 的零点分布在一直线上;
- c. f 的极点重级 $m \geq 3$;
- d. $f'(z) \neq 1$.

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规.

2015 年洪苏敏等^[4]又将定理 3 中的条件“ $f'(z) \neq 1$ ”改为“ $f'(z) \neq z^d$ ”,得到定理 4.

定理 4 设 $\mathcal{F}$ 是定义在单位圆盘 D 上的亚纯函数族,若存在 $M \geq 0$,使得对于任意 $f \in \mathcal{F}$,有:

- a. f 的零点分布在一直线上;
- b. $f=0 \Rightarrow |f'| \leq M|z^d|$;
- c. f 的极点重级 $m \geq 3$;
- d. $f'(z) \neq z^d$, 这里 $d \in \mathbb{N}^+$.

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规.

2008 年 Pang 等^[5]利用拟正规定则将定理 1 条件中的“ $f(z) \neq 0$ ”减弱为“ f 零点除了有限个之外均为重级零点”,并将例外值推广到“不恒为零的有理函数”,得到定理 5.

定理 5^[5] 设 f 为复平面上的超越亚纯函数,且其零点除了有限个之外均为重级零点, $R \neq 0$ 是有理函数,则 $f' - R$ 有无穷多个零点.

2012 年 Chang^[6]又进一步利用拟正规定则,讨论了当 f 在零点处导数一致有界的情况,得到了定理 6.

定理 6 设 f 为复平面上的无穷级亚纯函数,若 $f'(z) \neq 1$,则 $M_f = f'(f^{-1}(0)) = \{f'(z): z \in \mathbb{C}, f(z) = 0\}$ 无界.

本文在定理 6 的基础上增加一些条件,利用正规定则则将定理 6 的结果推广到更为一般的情况,从而得到与定理 4 相对应的 Picard 型定理(定理 7).

定理 7 设 $d \in \mathbb{N}^+$, f 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的超越亚纯函数,若存在 $M \geq 0$,使得 f 满足:

- a. f 的零点均为实数;
- b. f 的极点重级至少为 3;
- c. $f(z) = 0 \Rightarrow |f'(z)| \leq M|z^d|$.

则 $f' - z^d$ 有无穷多个零点.

2 主要的引理

引理 1^[7] 设 f 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的无穷级亚纯函数,则存在 $a_n \rightarrow \infty$, 正数列 $\delta_n \rightarrow 0$,使得 $f^\#(a_n) \rightarrow \infty$, $S(\Delta(a_n, \delta_n), f) \rightarrow \infty$.

引理 2^[8] 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的亚纯函数族, $k \in \mathbb{N}^+$, $h(z) (\neq 0)$ 在 D 内全纯,若对于任意的 $f \in$

$\mathcal{F}$, 有 $f(z) \neq 0, f^{(k)}(z) \neq h(z)$, 则 F 在 D 内正规.

引理 3^[9] 设 $\{f_n\}$ 为区域 D 内的亚纯函数族, $\{\varphi_n\}$ 是 D 内的全纯函数列且在 D 上内闭一致收敛到 φ , 其中, $\varphi(z) \neq 0, \infty$. 若对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 和任意的 $z \in D$, 有 $f_n(z) \neq 0, f'_n(z) \neq \varphi_n(z)$, 则 $\{f_n\}$ 在 D 内正规.

引理 4^[10] 设 f 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的超越亚纯函数, $k \in \mathbb{N}^+$ 且 $k \geq 2, \epsilon > 0$, 则对于所有的 $r > e$ 且 $r \notin E$, 其中, 集合 $E \subset (e, \infty)$ 且其对数密度为 0 (在这里, E 仅取决于 f, k, ϵ), 有

$$(k-1)\bar{N}(r, f) + N_1\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) + \epsilon T(r, f)$$

其中

$$N_1\left(r, \frac{1}{f}\right) = N\left(r, \frac{1}{f}\right) - \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)$$

引理 5^[1] 设 $a_v (v=1, 2, \dots, q)$ 为 $q (q > 2)$ 个有穷判别的复数, 则有

$$\sum_{v=1}^q m\left(r, \frac{1}{f - a_v}\right) \leq m\left(r, \sum_{v=1}^q \frac{1}{f - a_v}\right) + O(1)$$

引理 6^[11] 设 f 为 $\mathbb{C}$ 上有穷级亚纯函数, 则对于 f 的每一个非直接渐近值 a , 存在 z_n , 使得 $f(z_n) \rightarrow a$, 且 $f'(z_n) = 0$.

引理 7^[12] 设 f 是 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数, 其有限临界值和渐近值是一个有界集合, 则存在正数 r_0 , 使得当 $|z| > r_0$ 和 $|f(z)| > r_0$ 时, 有

$$|f'(z)| \geq \frac{|f(z)| \log |f(z)|}{16\pi |z|}$$

引理 8 设 $d \in \mathbb{N}^+$, $\varphi_n(z) = a_n + b_n z$, $g(z) = \frac{f(z)}{z^d}$, 有下面两种结果成立:

a. 当 $b_n \rightarrow \infty, a_n \rightarrow c (c \neq \infty)$ 时, 令 $f_n(z) = \frac{f(\varphi_n(z))}{b_n^{d+1}}, z \in D_1$, 其中, D_1 为有界区域且 $0 \notin \bar{D}_1$, 即 $0 < r_1 \leq |z| \leq r_2 < \infty$, 则对于充分大的 n , 有 $Af_n^\#(z) + 1 \geq g^\#(\varphi_n(z))$, 其中, $A = \max \left\{ \left(\frac{2}{r_1} \right)^d, (r_2 + 1)^d \right\} < \infty$;

b. 当 $a_n \rightarrow \infty, b_n \rightarrow c (c \neq \infty)$, 且对于充分大的 n 有 $|b_n| \geq 1$ 时, 令 $f_n(z) = \frac{f(\varphi_n(z))}{a_n^d}, z \in D_2$, 其中, D_2 为有界区域, 则对于充分大的 n , 有 $2^d f_n^\#(z) + 1 \geq g^\#(\varphi_n(z))$.

证明 由于 $g^\#(z) = \frac{\left| \frac{f'(z)}{z^d} - d \frac{f(z)}{z^{d+1}} \right|}{1 + \left| \frac{f(z)}{z^d} \right|^2}$, 则

$$g^\#(\zeta) \Big|_{\zeta=\varphi_n(z)} = \frac{\left| \frac{f'(\varphi_n(z))}{(\varphi_n(z))^d} - d \frac{f(\varphi_n(z))}{(\varphi_n(z))^{d+1}} \right|}{1 + \left| \frac{f(\varphi_n(z))}{(\varphi_n(z))^d} \right|^2} \leq \frac{\left| \frac{f'(\varphi_n(z))}{(\varphi_n(z))^d} \right|}{1 + \left| \frac{f(\varphi_n(z))}{(\varphi_n(z))^d} \right|^2} + \frac{\left| d \frac{f(\varphi_n(z))}{(\varphi_n(z))^{d+1}} \right|}{1 + \left| \frac{f(\varphi_n(z))}{(\varphi_n(z))^d} \right|^2} \quad (1)$$

且有

$$\frac{\left| d \frac{f(\varphi_n(z))}{(\varphi_n(z))^{d+1}} \right|}{1 + \left| \frac{f(\varphi_n(z))}{(\varphi_n(z))^d} \right|^2} \leq \frac{d}{2|\varphi_n(z)|} \cdot \frac{2 \left| \frac{f(\varphi_n(z))}{(\varphi_n(z))^d} \right|}{1 + \left| \frac{f(\varphi_n(z))}{(\varphi_n(z))^d} \right|^2} \leq \frac{d}{2} \frac{1}{|a_n + b_n z|} \quad (2)$$

a. 当 $b_n \rightarrow \infty, a_n \rightarrow c (c \neq \infty)$ 时, 由于 $f_n^\#(z) =$

$$\frac{\left| \frac{f'(\varphi_n(z))}{b_n^d} \right|}{1 + \left| \frac{f(\varphi_n(z))}{b_n^{d+1}} \right|^2}, \text{ 应用简单不等式 } \frac{B}{B^2 + x^2} \leq$$

$\max(B, 1/B) \frac{1}{1+x^2}$, 其中, $B > 0, x \in \mathbb{R}$, 有

$$\frac{\left| \frac{f'(\varphi_n(z))}{(\varphi_n(z))^d} \right|}{1 + \left| \frac{f(\varphi_n(z))}{(\varphi_n(z))^d} \right|^2} = \frac{\left| \frac{f'(\varphi_n(z))}{(a_n + b_n z)^d} \right|}{1 + \left| \frac{f(\varphi_n(z))}{(a_n + b_n z)^d} \right|^2} \leq \frac{\left| \frac{f'(\varphi_n(z))}{b_n^d} \right| \left| \left(\frac{a_n + b_n z}{b_n} \right)^d \right|}{\left| \left(\frac{a_n + b_n z}{b_n} \right)^d \right|^2 + \left| \frac{f(\varphi_n(z))}{b_n^d} \right|^2} \leq \max \left\{ \left| \left(\frac{a_n + b_n z}{b_n} \right)^d \right|, \frac{1}{\left| \left(\frac{a_n + b_n z}{b_n} \right)^d \right|} \right\} f_n^\#(z) \quad (3)$$

由于 $b_n \rightarrow \infty, a_n \rightarrow c (c \neq \infty)$, 且对于任意的 $z \in D_1$, 有 $0 < r_1 \leq |z| \leq r_2 < \infty$, 则对于充分大的 n , 有

$$\begin{aligned} \frac{r_1}{2} &= r_1 - \frac{r_1}{2} \leq |z| - \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq \\ &\left| \frac{a_n + b_n z}{b_n} \right| \leq \left| \frac{a_n}{b_n} \right| + |z| \leq r_2 + 1 \\ &|a_n + b_n z| \geq |b_n z| - |a_n| \geq \\ &r_1 |b_n| - |a_n| \geq \frac{d}{2} \end{aligned}$$

于是, 有

$$\max \left\{ \left| \left(\frac{a_n + b_n z}{b_n} \right)^d \right|, \frac{1}{\left| \left(\frac{a_n + b_n z}{b_n} \right)^d \right|} \right\} \leq \max \left\{ \left(\frac{2}{r_1} \right)^d, (r_2 + 1)^d \right\} \quad (4)$$

$$\frac{d}{2} \frac{1}{|a_n + b_n z|} \leq 1 \quad (5)$$

由式(1)~(5)得 $A f_n^\#(z) + 1 \geq g^\#(\varphi_n(z))$, 其中, $A = \max \left\{ \left(\frac{2}{r_1} \right)^d, (r_2 + 1)^d \right\}$.

$$\text{b. 由于 } f_n^\#(z) = \frac{\left| b_n \frac{f'(\varphi_n(z))}{a_n^d} \right|}{1 + \left| \frac{f(\varphi_n(z))}{a_n^d} \right|^2}, \text{ 应用简}$$

单不等式 $\frac{B}{B^2 + x^2} \leq \max(B, 1/B) \frac{1}{1+x^2}$, 其中, $B > 0, x \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} &\frac{\left| \frac{f'(\varphi_n(z))}{(\varphi_n(z))^d} \right|}{1 + \left| \frac{f(\varphi_n(z))}{(\varphi_n(z))^d} \right|^2} \leq \\ &\frac{\left| \frac{f'(\varphi_n(z))}{a_n^d} \right| \left| \left(\frac{a_n + b_n z}{a_n} \right)^d \right|}{\left| \left(\frac{a_n + b_n z}{a_n} \right)^d \right|^2 + \left| \frac{f(\varphi_n(z))}{a_n^d} \right|^2} \leq \\ &\max \left\{ \left| \left(\frac{a_n + b_n z}{a_n} \right)^d \right|, \frac{1}{\left| \left(\frac{a_n + b_n z}{a_n} \right)^d \right|} \right\} \cdot \\ &\frac{\left| \frac{f'(\varphi_n(z))}{a_n^d} \right|}{1 + \left| \frac{f(\varphi_n(z))}{a_n^d} \right|^2} \quad (6) \end{aligned}$$

由于 $a_n \rightarrow \infty, b_n \rightarrow c (c \neq \infty)$, 且对于充分大的 n 的有 $|b_n| \geq 1, z \in D_2$, 其中, D_2 为有界区域, 则对于充分大的 n , 有

$$\frac{\left| \frac{f'(\varphi_n(z))}{a_n^d} \right|}{1 + \left| \frac{f(\varphi_n(z))}{a_n^d} \right|^2} \leq f_n^\#(z) \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \leq 1 - \left| \frac{b_n z}{a_n} \right| \leq \left| \frac{a_n + b_n z}{a_n} \right| \leq 1 + \left| \frac{b_n z}{a_n} \right| \leq 2 \\ |a_n + b_n z| \geq |a_n| - |b_n z| \geq \frac{d}{2} \end{cases} \quad (8)$$

因此, 由式(7)得

$$\begin{cases} \max \left\{ \left| \left(\frac{a_n + b_n z}{a_n} \right)^d \right|, \frac{1}{\left| \left(\frac{a_n + b_n z}{a_n} \right)^d \right|} \right\} \leq 2^d \\ \frac{d}{2} \frac{1}{|a_n + b_n z|} \leq 1 \end{cases} \quad (9)$$

于是, 由式(1), (2), (6), (7)和(9)得

$$2^d f_n^\#(z) + 1 \geq g^\#(\varphi_n(z))$$

3 定理 7 的证明

现证明定理 7.

证明 分两种情形讨论.

情形 1 f 为无穷级超越亚纯函数.

假设 $f' - z^d$ 仅有有限多个零点, 令 $g(z) = \frac{f(z)}{z^d}$, 由于 $T(r, z^d) = d \log r + O(1)$ 和 f 为无穷级超越亚纯函数, 故有 g 为无穷级超越亚纯函数, 由引理 1, 存在 $z_n \rightarrow \infty$, 使得 $g^\#(z_n) \rightarrow \infty$.

记 $z_n = x_n + i y_n$, 下面再分两种情形讨论.

情形 1.1 $x_n \rightarrow \infty$.

情形 1.1.1 $\frac{y_n}{x_n} \rightarrow c (c \neq \infty)$.

令 $f_n(z) = \frac{f(x_n z)}{x_n^{d+1}}$, 显然有: a. f_n 的零点均为实数; b. 由于 $f_n(z) = 0 \Rightarrow f(x_n z) = 0$, 又由 $f(x_n z) = 0 \Rightarrow |f'(x_n z)| \leq M |(x_n z)^d|$, 故有 $f_n(z) = 0 \Rightarrow |f'_n(z)| \leq M |z^d|$; c. 由于 $f' - z^d$ 仅有有限多个零点, 于是, 有 $f'_n(z) \neq z^d$; d. f_n 的极点重级至少为 3. 由定理 4 得 $\{f_n\}$ 在圆盘 $|z - 1 - ic| < 1/2$ 内正规, 故 $\{f_n\}$ 在 $z = 1 + ic$ 处正规.

但由引理 8 和 $z \in \{z \mid |z - 1 - ic| < 1/2\}$ 以及 $x_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ 得

$$g^\#(x_n z) \leq A f_n^\#(z) + 1 \quad (10)$$

其中, $A < \infty$. 将 $z = 1 + i \frac{y_n}{x_n}$ 代入式(10), 得

$$A f_n^\# \left(1 + i \frac{y_n}{x_n} \right) + 1 \geq g^\# \left(x_n \left(1 + i \frac{y_n}{x_n} \right) \right) = g^\#(z_n) \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$$

所以, $f_n^\# \left(1 + i \frac{y_n}{x_n} \right) \rightarrow \infty$, 又由于当 $n \rightarrow \infty$, 有 $z = 1 + i \frac{y_n}{x_n} \rightarrow 1 + ic$, 由 Marty 正规定则可知 $\{f_n\}$ 在 $z = 1 + ic$ 处不正规, 矛盾.

情形 1.1.2 $\frac{y_n}{x_n} \rightarrow \infty$.

令 $f_n(z) = \frac{f(i y_n z)}{(i y_n)^{d+1}}$, 则对于充分大的 n , 有:

a. $f_n(z)$ 在 $|z - 1| < \frac{1}{2}$ 内没有零点; b. $f'_n(z) \neq z^d$, 于是, 由引理 2 得 $\{f_n\}$ 在 $z = 1$ 处正规.

但由引理 8 和 $z \in \{z \mid |z - 1| < 1/2\}$ 以及

$y_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ 得

$$g^\#(i y_n z) \leq A f_n^\#(z) + 1 \quad (11)$$

其中, $A = 4^d < \infty$, 取 $z = 1 - i \frac{x_n}{y_n}$ 代入式(11), 则有

$$2^d f_n^\# \left(1 - i \frac{x_n}{y_n} \right) + 1 \geq g^\# \left(i y_n \left(1 - i \frac{x_n}{y_n} \right) \right) = g^\#(z_n) \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$$

所以, $f_n^\# \left(1 - i \frac{x_n}{y_n} \right) \rightarrow \infty$, 又由于当 $n \rightarrow \infty$, 有 $z = 1 - i \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 1$, 由 Marty 正规定则可知 $\{f_n\}$ 在 $z = 1$ 处不正规, 矛盾.

情形 1.2 $x_n \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}, y_n \rightarrow \infty$.

令 $f_n(z) = \frac{f(z + i y_n)}{(i y_n)^d}$, 则对于充分大的

n , 有: a. $f_n(z)$ 在 $|z - x_0| < 1$ 内没有零点; b. $f'_n(z) \neq \left(1 - i \frac{z}{y_n} \right)^d$, 又由于 $\left(1 - i \frac{z}{y_n} \right)^d$ 在 $|z - x_0| < 1$ 内全纯且在 $|z - x_0| < 1$ 上内闭一致收敛到 1, 于是, 由引理 3 可知 $\{f_n\}$ 在 x_0 处正规.

但由引理 8 和 $z \in \{z \mid |z - x_0| < 1\}$ 以及 $y_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ 得

$$g^\#(z + i y_n) \leq 2^d f_n^\#(z) + 1 \quad (12)$$

将 $z = x_n$ 代入式(12), 得

$$2^d f_n^\#(x_n) + 1 \geq g^\#(x_n + i y_n) = g^\#(z_n) \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$$

所以, $f_n^\#(x_n) \rightarrow \infty$, 又由于当 $n \rightarrow \infty$, 有 $z = x_n \rightarrow x_0$, 由 Marty 正规定则可知 $\{f_n\}$ 在 x_0 处不正规, 矛盾.

情形 2 f 为有穷级超越亚纯函数.

情形 2.1 f 只有有限个实零点.

由于 f 的零点个数有限, 则有

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = O(\log r) = S(r, f) \quad (13)$$

由于 f 为超越亚纯函数, 则 $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = \infty$, 又由于 $T(r, z^d) = d \log r + O(1)$, 于是, 有 $T(r, z^d) = S(r, f)$.

由引理 4、引理 5 和 Nevanlinna 第一基本定理, 得

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{1}{f' - z^d}\right) &\leq m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \\ m\left(r, \frac{1}{f' - z^d}\right) + S(r, f) &\leq m\left(r, \frac{1}{f^{(d+1)}}\right) + \\ m\left(r, \frac{1}{f^{(d+1)} - d!}\right) + S(r, f) &\leq \\ m\left(r, \frac{1}{f^{(d+1)}} + \frac{1}{f^{(d+1)} - d!}\right) + S(r, f) &\leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m\left(r, \frac{1}{f^{(d+2)}}\right) + S(r, f) \leq \\
& m(r, f') + N(r, f') + (d+1)\bar{N}(r, f) - \\
& N\left(r, \frac{1}{f^{(d+2)}}\right) + S(r, f) \leq T(r, f') + \\
& \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \varepsilon T(r, f) + S(r, f)
\end{aligned}$$

其中, $\varepsilon > 0$, 将上式两边同时加上 $N\left(r, \frac{1}{f}\right)$, 减去

$m\left(r, \frac{1}{f' - z^d}\right)$, 并结合式(13), 可得

$$\begin{aligned}
(1 - \varepsilon)T(r, f) & \leq T(r, f') - m\left(r, \frac{1}{f' - z^d}\right) + \\
& \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f) \leq T(r, f' - z^d) + \\
& T(r, z^d) - m\left(r, \frac{1}{f' - z^d}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \\
& S(r, f) \leq N\left(r, \frac{1}{f' - z^d}\right) + S(r, f) \quad (14)
\end{aligned}$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 则由式(14)得

$$T(r, f) \leq 2N\left(r, \frac{1}{f' - z^d}\right) + S(r, f)$$

由于 f 为超越亚纯函数, 因此, $f' - z^d$ 有无穷多个零点.

情形 2.2 f 有无穷多个实零点.

f 有无穷多个实零点, 不妨记为 $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$. 令 $g(z) = f(z) - \frac{z^{d+1}}{d+1}$, 则 $g'(z) = f'(z) - z^d$, 要证 $f' - z^d$ 有无穷多个零点, 只需证 g' 有无穷多个零点, 假设 g' 只有有限多个零点. 由引理 6 得, $g(z)$ 没有非直接渐近值, 而 $\rho_g = \rho_f < \infty$, 于是, 由 Denjoy-Carleman-Ahlfors 定理可知, $g(z)$ 的直接渐近值小于等于 $2\rho_g$ 个, 故 $g(z)$ 的有穷临界值和渐近值构成的集合有界. 不妨设 R_0 是它的某个上界, 则由引理 7 得, 只要 $|g(z)| \geq R^2$, 有

$$|g'(z)| > \frac{|g(z)| \log |g(z)|}{16\pi |z|} \quad (15)$$

因为, $g(z_n) = f(z_n) - \frac{z_n^{d+1}}{d+1} = -\frac{z_n^{d+1}}{d+1} \rightarrow \infty$,

所以, 在式(15)中, 取 $z = z_n$, 得

$$\log |g(z_n)| < 16\pi \frac{|g'(z_n)| |z_n|}{|g(z_n)|} \quad (16)$$

由 $f(z) = 0 \Rightarrow |f'(z)| \leq M |z^d|$, 得 $|g'(z_n)| \leq (M+1) |z_n^d|$, 于是

$$16\pi \frac{|g'(z_n)| |z_n|}{|g(z_n)|} \leq 16\pi \cdot$$

$$\frac{(M+1) |z_n^{d+1}|}{|z_n^{d+1}| / (d+1)} = 16(M+1)(d+1)\pi$$

但 $\log |g(z_n)| = \log \frac{|z_n^{d+1}|}{d+1} \rightarrow \infty$, 与式(16)矛盾.

故 $f' - z^d$ 有无穷多个零点, 定理 7 得证.

参考文献:

- [1] HAYMAN W K. Meromorphic functions [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.
- [2] GU Y X. A normal criterion of meromorphic families [J]. Scientia Sinica, Mathematical Issue (I), 1979, 1: 267-274.
- [3] 童晓丽, 刘晓俊. 零点位于直线上的亚纯函数的正规规定则 [J]. 上海理工大学学报, 2014, 36(4): 362-365.
- [4] 洪苏敏, 刘晓俊. 零点分布在直线上的亚纯函数的正规规定则 [J]. 上海理工大学学报, 2016, 38(3): 211-217.
- [5] PANG X C, NEVO S, ZALCMAN L. Derivatives of meromorphic functions with multiple zeros and rational functions [J]. Computational Methods and Function Theory, 2008, 8(2): 483-491.
- [6] CHANG J M. On meromorphic functions whose first derivatives have finitely many zeros [J]. Bulletin of the London Mathematical Society, 2012, 44(4): 703-715.
- [7] NEVO S, PANG X C, ZALCMAN L. Quasinormality and meromorphic functions with multiple zeros [J]. Journal d'Analyse Mathématique, 2007, 101(1): 1-23.
- [8] 顾永兴, 庞学诚, 方明亮. 正规族理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [9] PANG X C, NEVO S, ZALCMAN L. Quasinormal families of meromorphic functions II [M] // EIDERMAN V Y, Samokhin M. Selected Topics in Complex Analysis. Operator Theory: Advances and Applications. Switzerland: Birkhäuser Basel, 2005, 158: 177-189.
- [10] FANG M L, WANG Y F. A note on the conjectures of Hayman, Mues and Gol'dberg [J]. Computational Methods and Function Theory, 2013, 13(4): 533-543.
- [11] BERGWEILER W, EREMENKO A. On the singularities of the inverse to a meromorphic function of finite order [J]. Revista Matemática Iberoamericana, 1995, 11(2): 355-373.
- [12] Bergweiler W. On the zeros of certain homogeneous differential polynomials [J]. Arch Math, 1995, 64(3): 192-202.

(编辑: 石 瑛)