

具逐项分数阶导数的积分边值问题正解的存在性

李 燕, 刘锡平, 李晓晨, 张 莎

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 研究了一类具有逐项分数阶导数的微分方程积分边值问题正解的存在性和多解性. 利用锥上不动点定理和 Leggett-Williams 不动点定理, 分别得到了该积分边值问题至少存在 1 个正解和 3 个正解的结论. 最后给出 2 个例子来证明结论有效.

关键词: 分数阶微分方程; 逐项分数阶导数; 积分边值问题; 锥上不动点定理; 正解
中图分类号: O 175.8 **文献标志码:** A

Existence of Positive Solutions for the Integral Boundary Value Problem of Sequential Fractional Differential Equations

LI Yan, LIU Xiping, LI Xiaochen, ZHANG Sha

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The existence and multiplicity of positive solutions were investigated for a class of integral boundary value problems of fractional differential equations with sequential fractional derivatives. The existence of at least one positive solution and three positive solutions for integral boundary value problems was obtained respectively, by using the fixed point theorem on cone and the Leggett-Williams fixed point theorem. Two examples were given to illustrate the results.

Keywords: fractional differential equation; sequential fractional derivative; integral boundary value problem; fixed point theorem on cone; positive solution

1 问题的提出

分数阶微分方程在流变学、力学、信号处理和系统辨识、神经网络、分形和混沌等领域有着广泛的应用. 近年来, 国内外学者对其理论的研究取得了许多有价值的成果^[1-2], 为了描述运动过程的整体性态,

对于分数阶微分方程积分边值问题的研究显得尤为重要, 可参见文献[3-7]. 在振动理论中, 低阶导数项(如阻尼项)具有重要的作用, 为了了解它们对系统的影响, 不少学者对具有逐项分数阶导数的微分方程进行了研究^[8-13].

本文主要研究一类具有逐项分数阶导数的微分方程积分边值问题

收稿日期: 2016-07-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11171220); 沪江基金资助项目(B14005)

第一作者: 李 燕(1991-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 常微分方程理论与应用. E-mail: 764250156@qq.com

通信作者: 刘锡平(1962-), 男, 教授. 研究方向: 常微分方程理论与应用. E-mail: xipingliu@163.com

$$\begin{cases} {}^c D_{0+}^{\alpha} x(t) - p {}^c D_{0+}^{\alpha-1} x(t) + f(t, x(t)) = 0, \\ t \in J = [0, 1], \\ x'(0) = \int_0^1 g_0(s) x(s) ds, \quad x^{(k)}(0) = 0, \\ k = 2, 3, \dots, n, \\ x(1) = \int_0^1 g_1(s) x(s) ds \end{cases} \quad (1)$$

正解的存在性和多解性. 其中, $2 \leq n = [\alpha] < \alpha < [\alpha] + 1$, $[\alpha]$ 表示不超过 α 的最大整数, ${}^c D_{0+}^{\alpha}$, ${}^c D_{0+}^{\alpha-1}$ 为 Caputo 分数阶导数, $f \in C(J \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $g_0, g_1 \in C(J)$. 利用锥上不动点定理和 Leggett-Williams 不动点定理, 分别得到了该边值问题至少存在 1 个正解和 3 个正解的充分条件. 最后给出 2

$$G(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} \frac{1-pt}{1-p} (1-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{1-pt}{1-p} (1-s)^{\alpha-1}, & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$H(t, s) = \begin{cases} \frac{-p(1-p)t^2 - (p^2-2)t - 2 + p}{2(1-p)} g_0(s) + \frac{1-pt}{1-p} g_1(s) - \frac{p(1-pt)}{1-p} + p, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{-p(1-p)t^2 - (p^2-2)t - 2 + p}{2(1-p)} g_0(s) + \frac{1-pt}{1-p} g_1(s) - \frac{p(1-pt)}{1-p}, & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

证明 设 $x \in C(J)$, $x = x(t)$ 是边值问题(1)的解. 用算子 I_{0+}^{α} 作用于方程

$${}^c D_{0+}^{\alpha} x(t) - p {}^c D_{0+}^{\alpha-1} x(t) + f(t, x(t)) = 0$$

两端, 运用分数阶微积分的相关理论, 可得

$$x(t) = -I_{0+}^{\alpha} f(t, x(t)) + p I_{0+}^1 x(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_n t^n$$

并且

$$x^{(k)}(t) = -I_{0+}^{\alpha-k} f(t, x(t)) + p x^{(k-1)}(t) + k! c_k + \frac{(k+1)!}{1!} c_{k+1} t + \dots + \frac{n!}{(n-k)!} c_n t^{n-k},$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, n$$

由边界条件可得

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{p-1} \left[\left(1 - \frac{p}{2}\right) \int_0^1 g_0(s) x(s) ds - \int_0^1 g_1(s) x(s) ds - I_{0+}^{\alpha} f(t, x(t)) \Big|_{t=1} + p I_{0+}^1 x(t) \Big|_{t=1} \right] \\ c_1 &= \frac{1}{p-1} \left[\left(\frac{p^2}{2} - 1\right) \int_0^1 g_0(s) x(s) ds + p \int_0^1 g_1(s) x(s) ds + p I_{0+}^{\alpha} f(t, x(t)) \Big|_{t=1} - p^2 I_{0+}^1 x(t) \Big|_{t=1} \right] \end{aligned}$$

个例子来证明所得结论的有效性.

2 预备知识及引理

有关分数阶积分及 Caputo 分数阶导数的定义参见文献[1-2].

引理 1 设 $0 < p < 1$, 则边值问题(1)与积分方程

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds + \int_0^1 H(t, s) x(s) ds \quad (2)$$

等价. 其中,

$$c_2 = -\frac{p}{2} \int_0^1 g_0(s) x(s) ds, c_3 = c_4 = \dots = c_n = 0$$

所以

$$x(t) = -I_{0+}^{\alpha} f(t, x(t)) + p I_{0+}^1 x(t) - \frac{pt^2}{2}.$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 g_0(s) x(s) ds + \frac{1}{p-1} \left[\left(1 - \frac{p}{2}\right) \int_0^1 g_0(s) x(s) ds - \int_0^1 g_1(s) x(s) ds - I_{0+}^{\alpha} f(t, x(t)) \Big|_{t=1} + p I_{0+}^1 x(t) \Big|_{t=1} \right] + \frac{t}{p-1} \left[\left(\frac{p^2}{2} - 1\right) \int_0^1 g_0(s) x(s) ds + p \int_0^1 g_1(s) x(s) ds + p I_{0+}^{\alpha} f(t, x(t)) \Big|_{t=1} - p^2 I_{0+}^1 x(t) \Big|_{t=1} \right] \\ &= \frac{1}{2(1-p)} \int_0^1 (-p(1-p)t^2 - (p^2-2)t - 2 + p) g_0(s) x(s) ds + \frac{1}{1-p} \int_0^1 (1-pt) g_1(s) x(s) ds - \frac{p}{1-p} \int_0^1 (1-pt) x(s) ds + p \int_0^t x(s) ds + \frac{1-pt}{\Gamma(\alpha)(1-p)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds = \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds + \int_0^1 H(t, s) x(s) ds \end{aligned}$$

反之,若 $x = x(t)$ 是积分方程(2)的解,由分数阶微分方程的相关理论容易验证其满足边值问题(1).

引理 2 $G(t, s)$ 具有下列性质:

a. $G(t, s)$ 连续且 $G(t, s) \geq 0$, 对任意的 $(t, s) \in J \times J$;

b. $G(t, s) \leq G(0, s) = \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{1-p}$;

c. $\min_{0 \leq t \leq \frac{3}{4}} G(t, s) \geq G\left(\frac{3}{4}, s\right) = \frac{1-\frac{3}{4}p}{1-p} (1-s)^{\alpha-1} - \left(\frac{3}{4}-s\right)^{\alpha-1} > 0$, 对于任意的 $s \in \left[0, \frac{3}{4}\right]$.

证明 由 $G(t, s)$ 的表达式和 $0 < p < 1$ 可知, 对给定的 $s \in J$, $G(t, s)$ 是关于 t 的减函数, 所以, $0 = G(1, s) \leq G(t, s) \leq G(0, s) = \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{1-p}$. 同理可证对任意的 $s \in \left[0, \frac{3}{4}\right]$, 有 $\min_{0 \leq t \leq \frac{3}{4}} G(t, s) \geq$

$$G\left(\frac{3}{4}, s\right) = \frac{1-\frac{3}{4}p}{1-p} (1-s)^{\alpha-1} - \left(\frac{3}{4}-s\right)^{\alpha-1} > 0.$$

对于 $J = [0, 1]$ 上全体连续函数构成的空间 $C(J)$, 取范数 $\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)|$, 则 $C(J)$ 为 Banach 空间. 令 $P = \{x \in C(J) \mid x(t) \geq 0, t \in J\}$, 显然, P 是 $C(J)$ 上的锥. 设 $\varphi: P \rightarrow \mathbb{R}^+$, 若对任意的 $\lambda \in [0, 1]$, 满足 $\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) - \lambda\varphi(x) - (1-\lambda)\varphi(y) \geq 0$ (≤ 0), 则称 φ 为 P 上一个凹(凸)泛函. 记

$$P_r = \{x \in P \mid \|x\| \leq r\}$$

$$P(\varphi, a, b) = \{x \in P \mid a \leq \varphi(x), \|x\| \leq b\}$$

H₀ 假设 $g_0, g_1 \in C(J)$, 使得函数 $H(t, s)$ 满足:

$$0 \leq m = \min_{(t,s) \in J \times J} H(t, s) \leq H(t, s) \leq \max_{(t,s) \in J \times J} H(t, s) = M < 1$$

定义线性算子 $A: C(J) \rightarrow C(J)$:

$$Ax(t) = \int_0^1 H(t, s)x(s)ds \quad (3)$$

引理 3 设 I 为恒等算子, 若假设 H_0 成立, 则算子 A 具有如下性质:

a. A 是有界线性算子;

b. $A(P) \subset P$;

c. $I - A$ 可逆;

d. $\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-M}$.

证明 a-c 结论是显然的, 这里只给出 d 的证明过程.

令 $x(t) = y(t) + Ax(t)$, 得到 $x(t) = (I - A)^{-1}y(t)$, $t \in J$, $y \in C(J)$. 由算子 A 的定义可知积分方程

$$x(t) = y(t) + \int_0^1 H(t, s)x(s)ds$$

具有唯一解. 将上式迭代, 可得 $x(t) = y(t) + \int_0^1 R(t, s)y(s)ds$, 其中

$$R(t, s) = \sum_{j=1}^{\infty} H_j(t, s),$$

$$H_j(t, s) = \int_0^1 H(t, \tau)H_{j-1}(\tau, s)d\tau, j = 2, 3, \dots$$

$$H_1(t, s) = H(t, s)$$

因此

$$(I - A)^{-1}y(t) = y(t) + \int_0^1 R(t, s)y(s)ds \quad (4)$$

并且, 由 $0 \leq m \leq H(t, s) < M < 1$, 易得

$$\frac{m}{1-m} \leq R(t, s) = \sum_{j=1}^{\infty} H_j(t, s) < M + M^2 + \dots + M^n + \dots = \frac{M}{1-M}$$

从而

$$\|(I - A)^{-1}y(t)\| \leq \|y(t)\| + \frac{M}{1-M} \int_0^1 \|y(s)\|ds \leq$$

$$\|y\| \left(1 + \frac{M}{1-M}\right) = \frac{1}{1-M} \|y\|$$

于是

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-M}$$

结论成立.

引理 4(锥上不动点定理^[2]) 设 X 为实赋范线性空间, $P \subset X$ 是锥, $\Omega_1, \Omega_2 \subset P$ 为非空相对开集, 且 $\theta \in \Omega_1 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$, 设 $S: \Omega_2 \rightarrow P$ 为全连续算子, 满足:

a. $\|S(x)\| \leq \|x\|$, $\forall x \in \partial\Omega_1$; $\|S(x)\| \geq \|x\|$, $\forall x \in \partial\Omega_2$, 或

b. $\|S(x)\| \geq \|x\|$, $\forall x \in \partial\Omega_1$; $\|S(x)\| \leq \|x\|$, $\forall x \in \partial\Omega_2$.

则 S 在 $\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1$ 上至少有 1 个不动点.

引理 5(Leggett-Williams 不动点定理^[2]) 设常数 $0 < a < b < d \leq c$, 算子 $S: P_c \rightarrow P_c$ 全连续, $\varphi: P \rightarrow \mathbb{R}^+$ 为连续凹泛函, $\varphi(x) \leq \|x\|$ 对任意的 $x \in P_c$ 成立, 又设:

a. $\{x \in P(\varphi, b, d) \mid \varphi(x) > b\} \neq \emptyset$, $\varphi(Sx) > b$, 对任意的 $x \in P(\varphi, b, d)$;

b. $\|Sx\| < a$, 对任意的 $\|x\| < a$;

c. $\varphi(Sx) > b$, 对任意的 $x \in P(\varphi, b, c)$ 且

$\|Sx\| > d$.

则 S 至少有 3 个不动点 x_1, x_2, x_3 , 满足 $\|x_1\| < a < \|x_3\|, \varphi(x_3) < b < \varphi(x_2)$.

如果 $d = c$, 那么, 由引理 5 的条件 a 可以推出条件 c.

3 积分边值问题正解的存在性和多解性

定义非线性算子 $T: C(J) \rightarrow C(J), Tx(t) = \int_0^1 G(t, s)f(s, x(s))ds$. 由引理 1 和式(3)可知, 边值问题(1)的解 $x(t)$ 满足: $x(t) = Tx(t) + Ax(t)$, 即

$$(I - A)^{-1}Tx(t) = x(t) \quad (5)$$

再由式(4)以及引理 3 可知, $x(t)$ 是问题(1)的解当且仅当 $x(t)$ 是 $x(t) = (I - A)^{-1}Tx(t) = Sx(t)$ 的解, 即 $x(t)$ 是 S 的不动点, 其中,

$$Sx(t) = \int_0^1 G(t, s)f(s, x(s))ds + \int_0^1 R(t, s) \int_0^1 G(s, \tau)f(\tau, x(\tau))d\tau ds \quad (6)$$

定理 1 设 H_0 成立, 并且 $f(t, x)$ 是 $J \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 上的连续函数, 若存在 2 个正常数 $r_2 > r_1 > 0$ 使得:

$$H_1 \quad f(t, x) \geq \frac{\alpha(1-p)(1-m)}{\left(1 - \frac{3}{4}p\right)\left(1 - \frac{1}{4^p}\right) - (1-p)\left(\frac{3}{4}\right)^a} \cdot$$

$$r_1, (t, x) \in \left[0, \frac{3}{4}\right] \times [0, r_1];$$

$$H_2 \quad f(t, x) \leq \alpha(1-p)(1-M)r_2, (t, x) \in J \times [0, r_2].$$

则问题(1)至少有 1 个正解 x , 且有 $r_1 \leq \|x\| \leq r_2$.

证明 由引理 2 和假设 H_0 , 易证 $S: P \rightarrow P$.

现证 $S: P \rightarrow P$ 全连续.

首先易证算子 S 是连续的. 设 $P_0 \subset P$ 是任意有界集, 则存在 $N > 0$, 对任意的 $x \in P_0$, 均有 $\|x\| \leq N$. 由 $S = (I - A)^{-1}T$ 及 $(I - A)^{-1}$ 的有界性, 可知 $S(P_0)$ 一致有界.

另一方面, 对任意的 $t_1, t_2 \in J$,

$$\begin{aligned} |Sx(t_2) - Sx(t_1)| &\leq \int_0^1 |G(t_2, s) - G(t_1, s)| \cdot \\ &\quad f(s, x(s))ds + \int_0^1 |R(t_2, s) - R(t_1, s)| \cdot \\ &\quad \int_0^1 G(s, \tau)f(\tau, x(\tau))d\tau ds \end{aligned}$$

因为, $R(t, s) = \sum_{j=1}^{\infty} H_j(t, s)$ 收敛, 且对每个

$H_j(t, s)$ 连续, $j = 1, 2, 3, \dots$, 故 $R(t, s)$ 也连续, 从而 $R(t, s)$ 在 $J \times J$ 上一致连续, 于是, 有 $|R(t_2, s) - R(t_1, s)| \rightarrow 0 (t_2 \rightarrow t_1)$. 由 $G(t, s)$ 的一致连续性可知, $|G(t_2, s) - G(t_1, s)| \rightarrow 0 (t_2 \rightarrow t_1)$. 由 $f, G(t, s)$ 的连续性可知, f 在 $J \times [0, N]$ 上有界, $G(t, s)$ 在 $J \times J$ 上有界, 故

$$|Sx(t_2) - Sx(t_1)| \rightarrow 0 (t_2 \rightarrow t_1)$$

即 $S(P_0)$ 等度连续. 综上所述, S 是全连续算子.

令 $\Omega_1 = \{x \in P \mid \|x\| \leq r_1\}$. 对任意的 $x \in \partial\Omega_1$, 有 $0 \leq x \leq r_1, \|x\| = r_1, t \in J$. 由假设 H_1 可知, 对 $t \in \left[0, \frac{3}{4}\right]$,

$$\begin{aligned} Sx(t) &= \int_0^1 G(t, s)f(s, x(s))ds + \\ &\quad \int_0^1 R(t, s) \int_0^1 G(s, \tau)f(\tau, x(\tau))d\tau ds \geq \\ &\quad \int_0^{\frac{3}{4}} G\left(\frac{3}{4}, s\right)f(s, x(s))ds + \frac{m}{1-m} \cdot \\ &\quad \int_0^{\frac{3}{4}} G\left(\frac{3}{4}, s\right)f(s, x(s))ds \geq r_1 = \|x\| \end{aligned}$$

所以

$$\|Sx\| \geq \|x\|, x \in \partial\Omega_1$$

令 $\Omega_2 = \{x \in P \mid \|x\| \leq r_2\}$. 对任意的 $x \in \partial\Omega_2$, 有 $0 \leq x \leq r_2, \|x\| = r_2, t \in J$. 由假设 H_2 可知,

$$\begin{aligned} \|Sx\| &= \max_{t \in J} \int_0^1 G(t, s)f(s, x(s))ds + \\ &\quad \max_{t \in J} \int_0^1 R(t, s) \int_0^1 G(s, \tau)f(\tau, x(\tau))d\tau ds \leq \\ &\quad \int_0^1 G(0, s)f(s, x(s))ds + \frac{M}{1-M} \cdot \\ &\quad \int_0^1 G(0, s)f(s, x(s))ds \leq \frac{1}{1-p} \cdot \\ &\quad \int_0^1 (1-s)^{a-1}f(s, x(s))ds + \frac{M}{(1-M)(1-p)} \cdot \\ &\quad \int_0^1 (1-s)^{a-1}f(s, x(s))ds \leq \frac{\alpha r_2(1-p)(1-M)}{(1-p)(1-M)} \cdot \\ &\quad \int_0^1 (1-s)^{a-1}ds = r_2 = \|x\| \end{aligned}$$

所以

$$\|Sx\| \leq \|x\|, x \in \partial\Omega_2$$

因此, 由引理 4 可知, 边值问题(1)至少存在 1 个正解, 且有 $r_1 \leq \|x\| \leq r_2$.

定理 2 设 H_0 成立, 并且 $f(t, x)$ 是 $J \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 上的连续函数, 若存在常数 $0 < a < b < c$ 使得:

$$H_3 \quad f(t, x) \leq \alpha(1-p)(1-M)a, (t, x) \in J \times [0, a];$$

$$\mathbf{H}_4 \quad f(t, x) \geq \frac{\alpha(1-p)(1-m)}{\left(1-\frac{3}{4}p\right)\left(1-\frac{1}{4^a}\right)-(1-p)\left(\frac{3}{4}\right)^a} b, \\ (t, x) \in \left[0, \frac{3}{4}\right] \times [b, c];$$

$$\mathbf{H}_5 \quad f(t, x) \leq \alpha(1-p)(1-M)c, (t, x) \in J \times [0, c].$$

则边值问题(1)至少有3个正解 x_1, x_2, x_3 , 且满足:

$$\max_{t \in J} |x_1(t)| < a \\ b < \min_{0 \leq t \leq \frac{3}{4}} |x_2(t)| < \max_{0 \leq t \leq \frac{3}{4}} |x_2(t)| \leq c \\ a < \max_{t \in J} |x_3(t)| \leq c, \min_{0 \leq t \leq \frac{3}{4}} |x_3(t)| < b$$

证明 设 $x \in P_c$, 则 $\|x\| \leq c$. 由假设 $\mathbf{H}_5$, $f(t, x) \leq \alpha(1-p)(1-M)c, t \in J$, 于是,

$$\|Sx\| = \max_{t \in J} \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds + \\ \max_{t \in J} \int_0^1 R(t, s) \int_0^1 G(s, \tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau ds \leq \\ \int_0^1 G(0, s) f(s, x(s)) ds + \frac{M}{1-M} \cdot \\ \int_0^1 G(0, s) f(s, x(s)) ds \leq \frac{1}{1-p} \cdot \\ \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds + \frac{M}{(1-M)(1-p)} \cdot \\ \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \leq \frac{\alpha c (1-p)(1-M)}{(1-p)(1-M)} \cdot \\ \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} ds = c$$

故 $S: P_c \rightarrow P_c$. 同样, 如果 $x \in P_a$, 由假设 $\mathbf{H}_3, f(t, x) \leq \alpha(1-p)(1-M)a, t \in J$, 可知引理5的条件b满足.

选取 $x(t) = \frac{b+c}{2}, t \in J$. 显然, 有 $x(t) = \frac{b+c}{2} \in P(\varphi, b, c), \varphi(x) = \min_{t \in J} x(t) = \frac{b+c}{2} > b$, 则 $\{x \in P(\varphi, b, c) \mid \varphi(x) > b\} \neq \emptyset$. 因此, 如果 $x \in P(\varphi, b, c)$, 那么, $b \leq x(t) \leq c, 0 \leq t \leq \frac{3}{4}$ 成立. 由假设 $\mathbf{H}_4$, 有

$$f(t, x) \geq \frac{\alpha(1-p)(1-m)}{\left(1-\frac{3}{4}p\right)\left(1-\frac{1}{4^a}\right)-(1-p)\left(\frac{3}{4}\right)^a} b,$$

$0 \leq t \leq \frac{3}{4}$, 所以

$$\varphi(Sx) = \min_{0 \leq t \leq \frac{3}{4}} Sx(t) \geq \int_0^{\frac{3}{4}} G\left(\frac{3}{4}, s\right) f(s, x(s)) ds + \\ \frac{m}{1-m} \int_0^{\frac{3}{4}} G\left(\frac{3}{4}, s\right) f(s, x(s)) ds = b$$

即 $\varphi(Sx) > b$, 对所有的 $x \in P(\varphi, b, c)$. 这表明引理5的条件a满足.

由引理5可知, 边值问题(1)至少有3个正解 x_1, x_2, x_3 , 且满足:

$$\max_{t \in J} |x_1(t)| < a \\ b < \min_{0 \leq t \leq \frac{3}{4}} |x_2(t)| < \max_{0 \leq t \leq \frac{3}{4}} |x_2(t)| \leq c \\ a < \max_{t \in J} |x_3(t)| \leq c, \min_{0 \leq t \leq \frac{3}{4}} |x_3(t)| < b$$

4 应用举例

为了证明结论的有效性, 现给出2个例子.

例1 考虑边值问题

$$\begin{cases} {}^c D_{0+}^{2.5} x(t) - \frac{1}{2} {}^c D_{0+}^{1.5} x(t) + \frac{x^2(t)}{400} + \\ \frac{\sin x(t)}{3} + t^{100} + 3 = 0, t \in J = [0, 1] \\ x'(0) = x^{(2)}(0) = 0 \\ x(1) = \int_0^1 \left(\frac{1}{10}s^3 + \frac{1}{2}\right) x(s) ds \end{cases} \quad (7)$$

这里, $\alpha = 2.5, p = \frac{1}{2}, f(t, x) = \frac{x^2}{400} + \frac{\sin x}{3} + t^{100} + 3, g_0(t) = 0, g_1(t) = \frac{1}{10}t^3 + \frac{1}{2}$, 且 $\frac{1}{2} \leq g_1(t) \leq \frac{3}{5}$, 计算可得 $m = 0 \leq H(t, s) \leq \frac{7}{10} = M$. 选取 $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = 20$, 有

$$f(t, x) > 3 > \frac{\alpha(1-p)(1-m)}{\left(1-\frac{3}{4}p\right)\left(1-\frac{1}{4^a}\right)-(1-p)\left(\frac{3}{4}\right)^a} r_1 =$$

$$1.727, (t, x) \in \left[0, \frac{3}{4}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$$f(t, x) < 5.4 < \alpha(1-p)(1-M)r_2 = 7.5,$$

$$(t, x) \in J \times [0, 20]$$

由定理1可得此边值问题(7)至少有1个正解.

例2 考虑边值问题

$$\begin{cases} {}^c D_{0+}^{3.1} x(t) - \frac{1}{3} {}^c D_{0+}^{2.1} x(t) + f(t, x(t)) = 0, \\ t \in J = [0, 1] \\ x'(0) = -\frac{2}{5} \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) x(s) ds, \\ x^{(2)}(0) = x^{(3)}(0) = 0 \\ x(1) = \frac{1}{3} \int_0^1 x(s) ds \end{cases} \quad (8)$$

这里取

$$f(t, x) = \begin{cases} \frac{t}{100} + 12x^3, & x < 1 \\ \frac{t}{100} + \frac{119}{10} + \frac{x}{10}, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\alpha = 3.1, p = \frac{1}{3}, g_0(t) = -\frac{2}{5} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), g_1(t) = \frac{1}{3}, \text{且} -\frac{2}{5} \leq g_0(t) \leq 0. \text{计算可得 } m = 0 \leq H(t, s) \leq$$

$$\frac{5}{6} = M. \text{选取 } a = \frac{1}{10}, b = 1, c = 50, \text{有}$$

$$f(t, x) = \frac{t}{100} + 12x^3 \leq 0.022 < \alpha(1-p) \cdot$$

$$(1-M)a < 0.035, (t, x) \in J \times \left[0, \frac{1}{10}\right]$$

$$f(t, x) = \frac{t}{100} + \frac{119}{10} + \frac{x}{10} \geq 12 >$$

$$\frac{\alpha(1-p)(1-m)}{\left(1 - \frac{3}{4}p\right)\left(1 - \frac{1}{4^a}\right) - (1-p)\left(\frac{3}{4}\right)^a} b > 4.4,$$

$$(t, x) \in \left[0, \frac{3}{4}\right] \times [1, 50]$$

$$f(t, x) = \frac{t}{100} + \frac{119}{10} + \frac{x}{10} \leq 16.91 <$$

$$\alpha(1-p)(1-M)c = 17.22,$$

$$(t, x) \in J \times [0, 50]$$

那么,由定理2可知,此边值问题(8)至少有3个正解 x_1, x_2, x_3 , 且满足:

$$\max_{t \in J} |x_1(t)| < \frac{1}{10}$$

$$1 < \min_{0 \leq t \leq \frac{3}{4}} |x_2(t)| < \max_{0 \leq t \leq \frac{3}{4}} |x_2(t)| \leq 50$$

$$\frac{1}{10} < \max_{t \in J} |x_3(t)| \leq 50, \min_{0 \leq t \leq \frac{3}{4}} |x_3(t)| < 1$$

参考文献:

- [1] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, Trujillo J J. Theory and applications of fractional differential equations [M]. Amsterdam: Elsevier Beasloten Vennootschap, 2006.
- [2] 白占兵. 分数阶微分方程边值问题理论及应用[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 2012.
- [3] JIA M, LIU X P. Multiplicity of solutions for integral boundary value problems of fractional differential equations with upper and lower solutions[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 232: 313-323.
- [4] LIN L G, LIU X P, FANG H Q. Method of upper and lower solutions for fractional differential equations [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2012 (100): 596-602.
- [5] 靳威, 寇春海. 分数阶微分方程积分边值问题正解的存在性[J]. 东华大学学报(自然科学版), 2013, 39 (5): 695-698.
- [6] JIA M, LIU X P. Three nonnegative solutions for fractional differential equations with integral boundary conditions [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2011, 62(3): 1405-1412.
- [7] 刘帅, 贾梅, 秦小娜. 带积分边值条件的分数阶微分方程解的存在性和唯一性[J]. 上海理工大学学报, 2014, 36(5): 409-415.
- [8] 李燕, 刘锡平, 李晓晨, 等. 具有逐项分数阶导数的微分方程边值问题解的存在性[J]. 纯粹数学与应用数学, 2016, 32(5): 470-480.
- [9] 李秀红, 寇春海, 刘晓波. 分数阶微分方程边值问题解的存在性[J]. 东华大学学报(自然科学版), 2011, 37 (2): 240-245.
- [10] ALSAEDI A, NTOUYAS S K, AGRWAL R P, et al. On caputo type sequential fractional differential equations with nonlocal integral boundary conditions [J]. Advances in Difference Equations, 2015, 2015 (1): 1-12.
- [11] AHMAD B, NIETO J J. Sequential fractional differential equations with three-point boundary conditions [J]. Computer and Mathematics with Applications, 2012, 64(10): 3046-3052.
- [12] CHAI G Q. Existence results for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2011, 62(5): 2374-2382.
- [13] 吴贵云, 刘锡平, 杨浩. 具有微分算子的分数阶微分方程边值问题解的存在性与唯一性[J]. 上海理工大学学报, 2015, 37(3): 205-209.

(编辑: 石 瑛)