

均衡问题的一种改进不精确次梯度算法

党亚峥, 沈 忱, 刘雯雯

(上海理工大学 管理学院, 上海 200093)

摘要: 针对采用精确次梯度算法求解均衡问题中的稳固非扩张算子的不动点集问题($EP(f, Fix(T))$)时计算复杂且收敛性较差这一情况, 提出了一种改进的不精确次梯度算法. 首先, 由事先选择的参数确定一个凸集; 其次, 通过不精确次梯度投影算法构造中间迭代点; 最后, 将当前迭代点和中间迭代点的线性组合在稳固非扩张算子的映射作为下一次迭代点. 在合适条件下验证了算法的全局收敛性.

关键词: 均衡问题; 次梯度; 稳固非扩张映射; 全局收敛

中图分类号: O 221 **文献标志码:** A

Improved Subgradient Algorithm for Equalization Problems

DANG Yazheng, SHEN Chen, LIU Wengweng

(Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The exact subgradient algorithm for solving the equilibrium problem ($EP(f, Fix(T))$) of sets over the fixed point of non-expansive operator causes computational complexity and poor convergence. To overcome the defect, an inexact subgradient algorithm for the $EP(f, Fix(T))$ was presented. A convex set assured by given parameter was selected, the intermediate iterative point was constructed by using the non-accurate subgradient projection algorithm and the image, under firmly non-expansive operator of the linear combination of the current iterative point and middle iterative point was taken as the next iteration point. Under suitable conditions, the global convergence of the algorithm was verified.

Keywords: equilibrium problem; sub-gradient; firmly non-expansive mapping; global convergence

1 问题描述

稳固非扩张算子的不动点集上的均衡问题^[1] ($EP(f, Fix(T))$)即找一个点

$x^* \in Fix(T)$, 使得 $f(x^*, y) \geq 0$,

$$\forall y \in Fix(T) \tag{1}$$

其中, $T: R^n \rightarrow R^n$ 是一个稳固非扩张映射, 即对于所有的 $x, y \in R^n$, 都有 $\|T(x) - T(y)\|^2 \leq \langle T(x) - T(y), x - y \rangle$, $f: R^n \times R^n \rightarrow R$ 是一个均衡双函数, 且对 $\forall x \in R^n$, 均有 $f(x, x) = 0$, $Fix(T) := \{x \mid T(x) = x\}$.

收稿日期: 2016-04-01

基金项目: 上海市自然科学基金资助项目(14ZR1429200); 上海市教育委员会科研创新项目(15ZZ073)

第一作者: 党亚峥(1973-), 女, 副教授. 研究方向: 可行问题、均衡问题、智能电网电力市场. E-mail: jgdysz@163.com

$EP(f, Fix(T))$ 问题是非空闭凸约束集中有关均衡问题的特殊类型,主要包括:最优化问题、纳什均衡问题、互补问题、不动点问题、变分问题及向量极小化问题等,其在码分多址联系方式(CDMA)^[2]的系统能量控制问题和库洛特-纳什寡头市场均衡模型^[3]中也有应用.文献[4-9]中提出了许多解决这类问题的迭代算法.近年来出现了很多求解问题(1)的改进次梯度投影算法^[10-15].本文提出了求解稳固非扩张映射不动点集中均衡问题的一种新的有效的全局收敛算法.通过选择合适的正则参数,保证算法产生的序列全局收敛到 $EP(f, Fix(T))$ 问题中的一个解.相对而言,本文提出的算法只需在每次迭代中作一次不精确的投影,比较容易实施.

2 预备知识

定义 1 如果算子 T 满足

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \quad x, y \in \mathfrak{R}^n \quad (2)$$

则称算子 T 非扩张.

P_C 表示从 $\mathfrak{R}^n$ 到 $\mathfrak{R}^n$ 上非空闭凸子集 C 的投影,则有

$$P_C(x) = \arg \min_{y \in C} \|x - y\| \quad (3)$$

易知 $P_C(x)$ 有如下性质:

$$\langle x - P_C x, z - P_C x \rangle \leq 0, \quad \forall z \in C, x \in \mathfrak{R}^n \quad (4)$$

故 P_C 非扩张.

定义 2 双函数 $f: C \times C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

a. 如果对每个 $x, y \in C$, 有

$f(x, y) + f(y, x) \leq 0$, 则称 f 在子集 C 上是单调的.

b. 对于每个 $x, y \in C$, 有

$f(x, y) \geq 0 \Rightarrow f(y, x) \leq 0$, 则称 f 在子集 C 上是伪单调的.

定义 3 双函数 f 在点 $x \in C$ 处的 ε 次微分 $\partial^\varepsilon f(x, \cdot)(x)$ 定义为

$$\begin{aligned} \partial^\varepsilon f(x, \cdot)(x) &:= \{\xi_x \in \mathbb{R}^n : f(x, y) - \\ &f(x, x) \geq \langle \xi_x, y - x \rangle - \varepsilon, \forall y \in C\} = \\ &\{\xi_x \in \mathbb{R}^n : f(x, y) \geq \\ &\langle \xi_x, y - x \rangle - \varepsilon, \forall y \in C\} \end{aligned}$$

设 E 为巴拿赫空间, S 是定义在 E 中的一个非空凸子集, E 满足 Opial 性质^[16], 如果存在任意的序列 $\{x^k\}$ 都属于 E , $x^k \rightarrow x^*$, 则

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x^*\| &< \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x^k - y\|, \\ &\forall y \in E \text{ 且 } y \neq x^* \end{aligned} \quad (5)$$

现使用引理 1 和引理 2 对算法进行收敛性分析.

引理 1^[17] 序列 $\{v_k\}$ 及 $\{\delta_k\}$ 是非负实数序列, 当 $\sum_{k=1}^{+\infty} \delta_k < +\infty$ 时, 若 $v_{k+1} \leq v_k + \delta_k$, 则序列 $\{v_k\}$ 收敛.

引理 2 非负实数 θ, β 满足不等式 $\theta^2 - \beta\theta \leq 0$, 则

$$\beta\theta \leq \beta^2 \quad (6)$$

证明 考虑二次函数 $s(\theta) = \theta^2 - \beta\theta$, 当 $s(\theta) \leq 0$ 时, 有

$$\theta \leq \beta$$

用 β 乘上面的不等式, 即可得

$$\beta\theta \leq \beta^2$$

证毕.

在收敛性分析中, 假定式(1)的解集包含其对偶问题的解集, 即

当 $x^* \in Fix(T)$ 时, 有

$$f(y, x^*) \leq 0; \quad \forall y \in Fix(T) \quad (7)$$

这个问题的解集可以表示为 $S_d(f, Fix(T))$.

函数 f 表示 C 上的伪单调双函数(如果 $x, y \in C$ 和 $f(x, y) \geq 0$, 则可知 $f(y, x) \leq 0$), 有 $S(f, C) \subseteq S_d(f, C)$. 这个结论对单调双函数也有效, 即 $f(x, y) + f(y, x) \leq 0$.

3 不精确次梯度算法及其全局收敛性

3.1 不精确次梯度算法

现介绍求解 $EP(f, Fix(T))$ 问题的不精确次梯度算法.

算法 1 步骤 0 设 $M > 0$ 是 $Fix(T)$ 的上界, 取 $x^0 \in \mathfrak{R}^n$, 使得 $M \leq \|x^0\|$, 令 $k = 0, \rho_0 := \|x^0\|$, 选取正项序列 $\{\beta_k\}, \{\rho_k\}, \{\lambda_k\}$, 当 $\varepsilon_k \geq 0$ 时, 有

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k \varepsilon_k}{\rho_k} < +\infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{\rho_k} = +\infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 < \infty \quad (8)$$

步骤 1 假设 $x^k \in \mathfrak{R}^n$ 是当前迭代点, 计算 $g^k \in \partial^{\varepsilon_k} f(x^k, \cdot)(x^k)$, 取 $\lambda_k \in (0, 1)$, 当 $k \geq 0$ 时, 有 $(1 - \lambda_k)(\|x^k\| + M) \leq \beta_k$. 定义 $C_k := \{x \in \mathfrak{R}^n : \|x\| \leq \rho_k + 1\}$, $\alpha_k := \frac{\beta_k}{\gamma_k}$, 其中, $\gamma_k := \max\{\rho_k, \|g^k\|\}$, 计算

$$t^k := Pc_k(x^k - \alpha_k g^k) \quad (9)$$

步骤 2 计算

$$x^{k+1} := T(\lambda_k x^k + (1 - \lambda_k) t^k),$$

$$\rho_{k+1} := \max\{\rho_k, \|x^{k+1}\|\} \quad (10)$$

令 $k := k+1$, 转步骤 1.

$C_k := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \rho_k + 1\}$ 是个闭球. 显然, 可以通过 $P_{C_k}(x^k - \alpha_k g^k)$ 计算投影, 即

$$t^k = \frac{\rho_k + 1}{\|x^k - \alpha_k g^k\|} (x^k - \alpha_k g^k) \quad (11)$$

3.2 收敛性分析

引理 3 对任意 k , 下列不等式成立:

- a. $\alpha_k \|g^k\| \leq \beta_k$;
- b. $\|t^k - x^k\| \leq \beta_k$.

证明 由式 $t^k = P_{C_k}(x^k - \alpha_k g^k)$ 和式(4)得

$$\langle \alpha_k g^k + t^k - x^k, x - t^k \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C_k \quad (12)$$

由步骤 1 得

$$\alpha_k \|g^k\| = \frac{\beta_k \|g^k\|}{\max\{\rho_k, \|g^k\|\}} \leq \beta_k \quad (13)$$

将 $x = x^k$ 代入式(12), 由 Cauchy-Schwarz 不等式和式(13)可得

$$\|t^k - x^k\|^2 \leq \langle \alpha_k g^k, x^k - t^k \rangle \leq \alpha_k \|g^k\| \|x^k - t^k\| \leq \beta_k \|x^k - t^k\| \quad (14)$$

假设 A1 $S(f, C)$ 的解集是非空的.

命题 1 假设 $Sol(f, Fix(T))$ 是非空的, 则对任意的 $k, x^* \in Sol(f, Fix(T))$, 下列不等式成立:

$$\|t^k - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k f(x^k, x^*) + \delta_k \quad (15)$$

其中, $\delta_k = 2\alpha_k \varepsilon_k + 2\beta_k^2$.

证明 显然

$$\begin{aligned} \|t^k - x^*\|^2 &= \|x^k - x^*\|^2 - \|t^k - x^k\|^2 + \\ &2\langle x^k - t^k, x^* - t^k \rangle \leq \|x^k - x^*\|^2 + \\ &2\langle x^k - t^k, x^* - t^k \rangle \end{aligned} \quad (16)$$

当 $x = x^*$ 时, 由式(11)和式(13)可知

$$\begin{aligned} \|t^k - x^*\|^2 &\leq \|x^k - x^*\|^2 + 2\langle \alpha_k g^k, \\ &x^* - t^k \rangle = \|x^k - x^*\|^2 + 2\langle \alpha_k g^k, \\ &x^* - x^k \rangle + 2\langle \alpha_k g^k, x^k - t^k \rangle \end{aligned} \quad (17)$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式及引理 3 的 a 可得

$$\|t^k - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k \langle g^k, x^* - x^k \rangle + 2\beta_k \|x^k - t^k\| \quad (18)$$

利用式(18)和引理 3 的 b 可得

$$\|t^k - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k \langle g^k, x^* - x^k \rangle + 2\beta_k^2 \quad (19)$$

另一方面, 已知 $g^k \in \partial_{\varepsilon_k}^s f(x^k, x^k)$, 可得不等式 $\langle g^k, x^* - x^k \rangle \leq f(x^k, x^*) + \varepsilon_k$. 因此, 由 $\alpha_k > 0$ 可得

$$2\alpha_k \langle g^k, x^* - x^k \rangle \leq 2\alpha_k f(x^k, x^*) + 2\alpha_k \varepsilon_k \quad (20)$$

显然, 由式(19)和式(20)可得式(15).

现证明在假设 A1 成立的情况下, 由改进不精确次梯度算法生成的序列 $\{x^k\}$ 是有界的.

定理 1 $S(f, C)$ 的解集是非空的, 设 C 是在 $\mathbb{R}^n$ 上的非空闭凸子集, $T: C \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个稳固非扩张映射, 序列 $\{g^k\}$ 有界, 假设 A1 成立, 令 $Fix(T)$ 有界, 且上界 $M > 0$, 均衡函数 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 对于所有的 $x \in \mathbb{R}^n$, 满足 $f(x, x) = 0$, 序列 $\{g^k\}$ 有界, 则由算法 1 产生的序列 $\{x^k\}$ 有界, 且 $\forall x^* \in S(f, Fix(T)), \limsup_{k \rightarrow +\infty} f(x^k, x^*) = 0$.

证明 对任意的 $x^* \in Sol(f, Fix(T))$, 已知

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1 - \lambda)y\|^2 &= \lambda \|x\|^2 + \\ &(1 - \lambda) \|y\|^2 - \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2, \\ \forall \lambda \in [0, 1], x, y \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (21)$$

由式 $x^{k+1} = T(\lambda_k x^k + (1 - \lambda_k) t^k)$, 算子的非膨胀性和式(15)易知

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &= \|(\lambda_k x^k + (1 - \lambda_k) t^k) - T(x^*)\|^2 \leq \\ &\|\lambda_k x^k + (1 - \lambda_k) t^k - x^*\|^2 = \lambda_k \|x^k - x^*\|^2 + \\ &(1 - \lambda_k) \|t^k - x^*\|^2 - \lambda_k(1 - \lambda_k) \|x^k - t^k\|^2 \leq \\ &\lambda_k \|x^k - x^*\|^2 + (1 - \lambda_k) [\|x^k - x^*\|^2 + \\ &2\alpha_k f(x^k, x^*) + \delta_k] - \lambda_k(1 - \lambda_k) \|t^k - x^k\|^2 = \\ &\|x^k - x^*\|^2 - (\lambda_k - \lambda_k^2) \|t^k - x^k\|^2 + \\ &2\alpha_k(1 - \lambda_k) f(x^k, x^*) + (1 - \lambda_k) \delta_k \end{aligned}$$

由假设 A1 得 $f(x^k, x^*) \leq 0$, 由命题 1 可知

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 + (1 - \lambda_k) \delta_k$$

由参数条件易知 $\sum_{k=0}^{+\infty} (1 - \lambda_k) \delta_k < +\infty$, 又由引理 1 可知序列 $\{\|x^k - x^*\|^2\}$ 收敛, 故序列 $\{x^k\}$ 有界.

接下来, 证明: $\forall x^* \in S(f, Fix(T)), \limsup_{k \rightarrow +\infty} f(x^k, x^*) = 0$.

由命题 1 和假设 A1 可知

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2\alpha_k [-f(x^k, x^*)] \leq \\ &\|x^k - x^*\|^2 - \|t^k - x^*\|^2 + \delta_k \end{aligned} \quad (22)$$

则

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2 \sum_{k=0}^m \alpha_k [-f(x^k, x^*)] \leq \\ &\|x^0 - x^*\|^2 - \|t^{m+1} - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^m \delta_k \leq \\ &\|x^0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^m \delta_k \end{aligned} \quad (23)$$

当 $m \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k [-f(x^k, x^*)] \leq \\ &\|x^0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k \end{aligned} \quad (24)$$

由参数的已知条件可知

$$0 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k [-f(x^k, x^*)] < +\infty \quad (25)$$

另一方面, 序列 $\{\|g^k\|\}$ 有界, 设存在 $L \geq \rho_0$ 使得当 $k \in N$ 时, 有 $\|g^k\| \leq L$; 事实上, 由 $\{x^k\}$ 的有界性也可推断.

利用参数定义可得

$$\frac{\gamma_k}{\rho_k} = \max \{1, \rho_k^{-1} \|g^k\|\} \leq \frac{L}{\rho_0}, \quad \forall k \in N$$

因此

$$\alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k} \geq \frac{\rho_0}{L} \frac{\beta_k}{\rho_k}, \quad \forall k \in N \quad (26)$$

所以, 由式(25)和式(26)可知

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\beta_k}{\rho_k} [-f(x^k, x^*)] < +\infty \quad (27)$$

由式(27)和式(1)可得 $\limsup_{k \rightarrow +\infty} f(x^k, x^*) = 0$, $\forall x^* \in S(f, \text{Fix}(T))$.

假设 A2 当存在 $x^* \in S(f, C)$, $\bar{x} \in C$, 若 $f(\bar{x}, x^*) = f(x^*, \bar{x}) = 0$, 则 $\bar{x} \in S(f, C)$.

假设 A3 当存在 $y \in C$ 时, $f(\cdot, y)$ 是上半连续的.

定理 2 设 C 是在 $\mathbb{R}^n$ 上的非空闭凸子集, $T: C \rightarrow \mathbb{R}^n$ 表示一个稳固非扩张性映射, 序列 $\{g^k\}$ 有界, 若假设 A1, A2, A3 成立, 令 $\text{Fix}(T)$ 有界且其上界 $M > 0$, 均衡函数 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 对于所有的 $x \in \mathbb{R}^n$ 满足 $f(x, x) = 0$, 序列 $\{g^k\}$ 有界, 则可知由算法 1 产生的序列 $\{x^k\}$ 收敛到 $EP(f, \text{Fix}(T))$ 的一个解.

证明 设 $x^* \in S(f, C)$, 由定理 1 易知, 存在序列 $\{x^k\}$ 的子序列 $\{x^{kj}\}$, 满足

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} f(x^k, x^*) = \lim_{j \rightarrow +\infty} f(x^{kj}, x^*) \quad (28)$$

且 $\{x^{kj}\}$ 有界. 因此, 存在 $\bar{x} \in C$ 及子序列 $\{x^{kj}\}$, 不失一般性, 可设

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} x^{kj} = \bar{x} \quad (29)$$

从假设 A2 和定理 1 可知

$$f(\bar{x}, x^*) \geq \limsup_{j \rightarrow +\infty} f(x^{kj}, x^*) = \lim_{j \rightarrow +\infty} f(x^{kj}, x^*) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} f(x^k, x^*) = 0 \quad (30)$$

从假设 A1 可知 $f(\bar{x}, x^*) \leq 0$, 故

$$f(\bar{x}, x^*) = 0 \quad (31)$$

因此, 由假设 A3 可知, $\bar{x} \in S(f, C)$, 再使用定理 1 可知, 序列 $\{\|x^k - \bar{x}\|\}$ 收敛, 联合式(29)可知

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x^k = \bar{x}, \quad \bar{x} \in S(f, C)$$

4 结论

提出了一种求解均衡问题中关于稳固非扩张映射 T 上的不动点集问题的不精确次梯度迭代算法. 通过选择适当的正则参数, 验证不精确次梯度算法的全局收敛性. 相对于精确次梯度算法, 减少了计算工作量, 同时提高了算法的收敛性.

参考文献:

- [1] BLUM E, OETTLI W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems[J]. Mathematics Student, 1994, 63(1): 123-145.
- [2] IIDUKA H, YAMADA I. An ergodic algorithm for the power-control games for CDMA data networks[J]. Journal of Mathematical Modelling and Algorithms, 2009, 8(1): 1-18.
- [3] IIDUKA H. Fixed point optimization algorithm and its application to power control in CDMA data networks[J]. Mathematical Programming, 2012, 133(1/2): 227-242.
- [4] ANH P N. A hybrid extragradient method extended to fixed point problems and equilibrium problems[J]. Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research, 2013, 62(2): 271-283.
- [5] ANH P N, KIM J K. Outer approximation algorithms for pseudomonotone equilibrium problems[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2011, 61(9): 2588-2595.
- [6] BIGI G, CASTELLANI M, PAPPALARDO M. A new solution method for equilibrium problems[J]. Optimization Methods and Software, 2009, 24(6): 895-911.
- [7] NOOR M A. Auxiliary principle technique for equilibrium problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2004, 122(2): 371-386.
- [8] QUOC T D, ANH P N, MUU L D. Dual extragradient algorithms extended to equilibrium problems[J]. Journal of Global Optimization, 2012, 52(1): 139-159.
- [9] 宇振盛, 张丽娜, 秦毅. 非线性优化问题的光滑化序列二次规划方法[J]. 上海理工大学学报, 2015, 37(4): 317-321.
- [10] 陈元媛, 高岩. 一种非线性扩展混合共轭梯度算法的全局收敛性[J]. 上海理工大学学报, 2013, 35(2): 113-115.

(下转第 534 页)

- [14] ORON R, DAVIDSON N, FRIESEM A A, et al. Efficient formation of pure helical laser beams [J]. Optics Communications, 2000, 182(1): 205 – 208.
- [15] RICHARDS B, WOLF E. Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic system [C] // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society, 1959, 253 (1274): 358 – 379.
- (编辑:董 伟)

(上接第 526 页)

- [11] NGUYEN T T V, STRODIOT J J, NGUYEN V H. A bundle method for solving equilibrium problems [J]. Mathematical Programming, 2009, 116(1/2): 529 – 552.
- [12] TRAN D Q, DUNG L M, NGUYEN V H. Extragradient algorithms extended to equilibrium problems [J]. Optimization, 2008, 57(6): 749 – 776.
- [13] VAN NGUYEN T T, STRODIOT J J, NGUYEN V H. The interior proximal extragradient method for solving equilibrium problems [J]. Journal of Global Optimization, 2009, 44(2): 175 – 192.
- [14] IIDUKA H, YAMADA I. A subgradient-type method for the equilibrium problem over the fixed point set and its applications [J]. Optimization, 2009, 58(2): 251 – 261.
- [15] SANTOS P, SCHEIMBERG S. An inexact subgradient algorithm for equilibrium problems [J]. Computational & Applied Mathematics, 2011, 30(1): 91 – 107.
- [16] OPIAL Z. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1967, 73(4): 591 – 597.
- [17] CROMBEZ G. A geometrical look at iterative methods for operators with fixed points [J]. Numerical Functional Analysis and Optimization, 2005, 26(2): 157 – 175.
- (编辑:石 瑛)