

具有 Ivlev 型功能性反应函数的随机恒化器模型的阈值

龚 驰, 许超群, 原三领

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 研究了一类具有 Ivlev 型功能性反应函数的随机单种群恒化器模型. 证明了模型全局正解的存在唯一性和有界性, 分析了模型的动力学行为, 得到了微生物在恒化器中平均持续和绝灭的阈值条件.

关键词: 随机恒化器模型; Ivlev 型功能性反应函数; 平均持续; 绝灭

中图分类号: O 211.6 **文献标志码:** A

Threshold of a Stochastic Chemostat Model with the Ivlev Functional Response Function

GONG Chi, XU Chaoqun, YUAN Sanling

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: A stochastic single-species chemostat model with the Ivlev functional response function was studied. The global existence, uniqueness and boundedness of its positive solution were proved. Then the dynamics of the model was analyzed. The threshold conditions of the persistence in mean and the extinction of microorganisms in the chemostat were obtained.

Keywords: stochastic chemostat model; Ivlev functional response function; persistence in mean; extinction

1 问题的提出

恒化器是对微生物进行连续培养的一种实验室装置, 由 3 个相连的容器组成. 第一个容器称之为营养容器, 其中装有供微生物生长所需要的几乎所有

的营养物质. 第一个容器中的营养以一定的速率被抽入到第二个容器(培养容器)供微生物增长所需要, 同时以同样的速率将培养容器中的物质抽到第三个容器以使其容量保持不变. 恒化器在微生物发酵、废水处理工程等方面都有着非常重要的应用, 它有许多优点: 相关参数可以通过实验测得, 并且通过

收稿日期: 2016-10-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11271260, 11671260); 上海市一流学科建设资助项目(XTKX2012); 沪江基金资助项目(B14005)

第一作者: 龚 驰(1991-), 男, 硕士研究生. 研究方向: 生物数学. E-mail: 1475535549@qq.com

通信作者: 原三领(1966-), 男, 教授. 研究方向: 生物数学. E-mail: sanling@usst.edu.cn

数学模型分析能得到与实验结果相符的结论. 基于其在理论研究和实际应用中的重要价值, 近年来对恒化器的动力学建模和研究受到了国内外许多生物工作者、实验技术人员和数学工作者的广泛关注, 相关研究成果大量出现. Smith 等^[1]详细地综述了恒化器动力学建模的基本原理和研究方法.

随着营养物质浓度的增加, 微生物对营养物质的摄取会达到某一饱和状态, 因此, 微生物对营养的功能性反应函数应为单调增加且有界的函数. 例如, 文献[2-3]分别研究了具有 Monod 型和 Beddington-DeAngelis 型反应函数的恒化器模型. 在生态建模中, 除 Monod 型和 Beddington-DeAngelis 型反应函数外, 另一类经常用到的具有上述性态的功能性反应函数是具下列形式的 Ivlev 型功能性反应函数^[4]:

$$p(x) = h(1 - e^{-cx}), \quad c, h > 0$$

式中: h 表示底物消耗的最大速率; c 表示摄取动机减小的一个常数.

如果假设微生物对营养的摄取函数为 Ivlev 型功能性反应函数, 则可以建立如下的单种群恒化器模型:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = (S^0 - S)D - m(1 - e^{-aS})x \\ \frac{dx}{dt} = [m(1 - e^{-aS}) - D]x \end{cases} \quad (1)$$

式中: S, x 分别表示在 t 时刻营养物和微生物的浓度, 且所有的参数都是正常数; S^0 表示输入营养的浓度; D 为稀释率; t 为时间; m 为最大增长率; a 为微生物对营养的摄取效率.

显然, 当 $m \leq D$ 时, 微生物在恒化器中一定趋于绝灭, 因此, 在本文中总假设 $m > D$. 定义得失相当常数 $\lambda = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{m}{m-D} \right)$, 模型(1)总存在绝灭平衡点 $E^0(S^0, 0)$, 且当 $\lambda \geq S^0$ 时, E^0 全局渐近稳定; 当 $\lambda < S^0$ 时, E^0 不稳定, 系统存在一个全局渐近稳定的正平衡点 $E^*(S^*, x^*)$, 其中,

$$S^* = \frac{\ln \left(\frac{m}{m-D} \right)}{a}, \quad x^* = \frac{aS^0 - \ln \left(\frac{m}{m-D} \right)}{a}$$

注意到微生物的培养过程不可避免地会受到一些环境噪声的影响, 如培养环境的温度、pH 值以及其他因素的异动等. 最近, 对考虑随机环境干扰的微生物恒化培养过程的动力学建模研究成为一个备受人们关注的热点^[5-9]. 如果在模型(1)中假设随机噪声的影响表现在对微生物的最大增长率影响上, 即

$$m \rightarrow m + \alpha \dot{B}(t)$$

其中, $\dot{B}(t)$ 为白噪声; α 为噪声强度. 则可以得到如下的随机恒化器模型:

$$\begin{cases} dS = [(S^0 - S)D - m(1 - e^{-aS})x]dt - \alpha(1 - e^{-aS})x dB \\ dx = [m(1 - e^{-aS}) - D]xdt + \alpha(1 - e^{-aS})x dB \end{cases} \quad (2)$$

式中: B 是标准布朗运动.

现分析模型(2)的动力学行为. 首先, 证明模型(2)正解的全局存在唯一性; 然后, 进一步研究微生物在恒化器中持续和绝灭的条件.

在本文中总假设 $(\Omega, F, \{F_t\}_{t \geq 0}, P)$ 是一个完备的概率空间, 且 $\{F_t\}_{t \geq 0}$ 满足通常条件(即右连续且 F_0 包含所有的零测集). B 是定义在此概率空间上的标准布朗运动. 另外, 记 $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, 1 \leq i \leq n\}$.

2 随机模型(2)正解的全局存在唯一性与有界性

定理 1 对任意给定的初值 $(S_0, x_0) \in \mathbb{R}_+^2$, 随机模型(2)存在唯一解 $(S(t), x(t)) (t \geq 0)$, 并且该解以概率 1 存在于 $\mathbb{R}_+^2$ 内, 即 $(S(t), x(t)) \in \mathbb{R}_+^2 (t \geq 0)$, a. s.

证明 因为随机模型(2)的系数局部 Lipschitz 连续, 因此, 对任意给定的初值 $(S_0, x_0) \in \mathbb{R}_+^2$, 随机模型(2)存在唯一的局部正解 $(S(t), x(t)) \in \mathbb{R}_+^2$, 其中, $t \in [0, \tau_e)$, τ_e 表示爆破时间^[10]. 要证明这个解是全局存在的, 只需说明 $\tau_e = \infty$, a. s.

令 $N(t) = S(t) + x(t)$, 由模型(2)可知

$$dN(t) = D(S^0 - N(t))dt \quad (3)$$

经过简单计算, 容易知道: 对于 $\forall t < \tau_e$, 有

$$N(t) \leq \max \{S_0 + x_0, S^0\} =: C_1 \quad (4)$$

令 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $S_0 > \varepsilon_0$ 且 $x_0 > \varepsilon_0$, 则对于任意的正数 $\varepsilon (\varepsilon \leq \varepsilon_0)$, 定义如下停时:

$\tau_\varepsilon = \inf \{t \in [0, \tau_e) : S(t) \leq \varepsilon \text{ or } x(t) \leq \varepsilon\}$
规定 $\inf \emptyset = \infty$, 其中, $\emptyset$ 表示空集. 显然, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, τ_ε 是单调增加的. 记 $\tau_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_\varepsilon$, 因此, $\tau_0 \leq \tau_e$. 如果可以证明 $\tau_0 = \infty$, 那么, $\tau_e = \infty$, 并且对于 $\forall t \geq 0$, 有 $(S(t), x(t)) \in \mathbb{R}_+^2$. 为了完成证明, 只需要证明 $\tau_0 = \infty$. 否则, 存在常数 $T > 0$ 和 $\delta \in (0, 1)$, 使得 $P\{\tau_0 \leq T\} > \delta$ 成立, 即存在一个正常数 $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, 使得当 $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ 时, 有 $P\{\tau_\varepsilon \leq T\} > \delta$ 成立.

定义函数

$$V(S(t), x(t)) = -\ln \frac{S}{C_1} - \ln \frac{x}{C_1}$$

显然 V 是正定的. 使用伊藤公式可以得到

$$dV = LVdt + \frac{x-S}{xS} \alpha (1 - e^{-aS}) x dB$$

其中

$$LV = -\frac{S^0 D}{S} + 2D + \frac{x-S}{xS} m x (1 - e^{-aS}) + \frac{S^2 + x^2}{2S^2 x^2} \alpha^2 (1 - e^{-aS})^2 x^2$$

结合式(4),可以得到

$$LV \leq 2D + \frac{x}{S} m + \frac{S^2 + x^2}{2S^2} \alpha^2 \leq 2D + (C_1 + 1)m + \frac{\alpha^2}{2}(C_1^2 + 2C_1 + 2) := C_2$$

因此

$$dV \leq C_2 dt + \frac{x-S}{S} \alpha (1 - e^{-aS}) dB$$

对上式两端从 0 到 $\tau_\epsilon \wedge T$ 积分,并取期望,得到 $E[V(S(\tau_\epsilon \wedge T), x(\tau_\epsilon \wedge T))] \leq V(S_0, x_0) + C_2 T$

令 $\Omega_\epsilon = \{\tau_\epsilon \leq T\}$, 则 $P(\Omega_\epsilon) > \delta$ 成立. 注意到, 对于 $\forall \omega \in \Omega_\epsilon$, 根据停时的定义, 这里至少有 $S(\tau_\epsilon, \omega)$ 与 $x(\tau_\epsilon, \omega)$ 中的一个等于 ϵ , 于是,

$$V(S(\tau_\epsilon), x(\tau_\epsilon)) \geq -\ln \frac{\epsilon}{C_1}$$

因此

$$\begin{aligned} V(S_0, x_0) + C_2 T &\geq E[I_{\Omega_\epsilon} V(S(\tau_\epsilon \wedge T), \\ x(\tau_\epsilon \wedge T))] &= P(\Omega_\epsilon) V(S(\tau_\epsilon, \omega), \\ x(\tau_\epsilon, \omega)) &> -\sigma \ln \frac{\epsilon}{C_1} \end{aligned}$$

式中, I_{Ω_ϵ} 表示 Ω_ϵ 的示性函数.

令 $\epsilon \rightarrow 0$, 可得如下矛盾:

$$\infty > V(S_0, x_0) + C_2 T = \infty$$

于是,可以得到, $\tau_0 = \infty, a.s.$

由式(4)的证明过程可得定理 2.

定理 2 对任意给定的初值 $(S_0, x_0) \in \mathbb{R}_+^2$, 随机模型(2)的解 $(S(t), x(t))$ 满足

$$S(t) + x(t) \leq \max \{S_0 + x_0, S^0\}$$

即随机模型(2)的解是有界的.

定义 $\Gamma = \{(S, x) \in \mathbb{R}_+^2 : S(t) + x(t) = S^0\}$. 显然, Γ 是随机模型(2)的一个正向不变集. 在本文中总假定 $(S_0, x_0) \in \Gamma$.

3 随机模型(2)的动力学行为

定义阈值

$$R_0 = \frac{m(1 - e^{-aS^0})}{D + \frac{\alpha^2}{2}(1 - e^{-aS^0})^2}$$

下面的定理 3 和定理 4 表明, 在噪声较小的情况下, 微生物在恒化器中能够持续与否完全由 R_0 的大小唯一决定.

定理 3 如果 $R_0 > 1$, 那么, 对于任意初值 $(S_0, x_0) \in \Gamma$, 随机模型(2)的解满足

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds \geq \frac{[m(1 - e^{-aS^0}) - D - \frac{\alpha^2}{2}(1 - e^{-aS^0})^2] S^0}{m(1 - e^{-aS^0})} > 0$$

即微生物在恒化器中以概率 1 平均持续.

证明 在式(3)两端从 0 到 t 进行积分, 得到

$$S(t) + x(t) - (S_0 + x_0) = D(S^0 t - \int_0^t S(s) ds - \int_0^t x(s) ds)$$

因为, $(S_0, x_0) \in \Gamma$, 所以, 对任意的 $t \geq 0$, $S(t) + x(t) = (S_0 + x_0)$. 因此, 有

$$\frac{1}{t} \int_0^t S(s) ds = S^0 - \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds \quad (5)$$

定义函数 $V(x) = \ln x$, 使用伊藤公式可以得到

$$dV = \left[-\frac{\alpha^2}{2} (1 - e^{-aS})^2 + m(1 - e^{-aS}) - D \right] dt + \alpha(1 - e^{-aS}) dB \quad (6)$$

注意到 $S(t) \leq S^0$, 可以得到

$$-\frac{\alpha^2}{2} (1 - e^{-aS})^2 \geq -\frac{\alpha^2}{2} (1 - e^{-aS^0})^2$$

注意到, 当 $S \in [0, S^0]$ 时, 有

$$m(1 - e^{-aS}) \geq \frac{m(1 - e^{-aS^0})}{S^0} S$$

所以

$$\begin{aligned} &-\frac{\alpha^2}{2} (1 - e^{-aS})^2 + m(1 - e^{-aS}) - D \geq \\ &-\frac{\alpha^2}{2} (1 - e^{-aS^0})^2 + \frac{m(1 - e^{-aS^0})}{S^0} S - D \end{aligned}$$

对式(6)两端从 0 到 t 进行积分, 得到

$$\begin{aligned} \ln x(t) - \ln x_0 &\geq \frac{m(1 - e^{-aS^0})}{S^0} t \\ &+ \left[\int_0^t S(s) ds - \left[\frac{\alpha^2}{2} (1 - e^{-aS^0})^2 + D \right] t + M(t) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$M(t) = \int_0^t \alpha(1 - e^{-as})dB$$

对式(7)两端同时除以 t , 可得

$$\frac{m(1 - e^{-as^0})}{S^0} \frac{1}{t} \int_0^t S(s)ds \leq \frac{\alpha^2}{2} (1 - e^{-as^0})^2 + D + \frac{\ln x(t) - \ln x_0 - M(t)}{t}$$

结合式(5), 可得

$$\frac{\ln x(t)}{t} \geq m(1 - e^{-as^0}) - D - \frac{\alpha^2}{2} (1 - e^{-as^0})^2 - \frac{m(1 - e^{-as^0})}{S^0} \cdot \frac{1}{t} \int_0^t x(s)ds + \Psi(t) \quad (8)$$

其中

$$\Psi(t) = \frac{\ln x_0}{t} + \frac{M(t)}{t}$$

由于 $M(t)$ 是局部连续鞅, 满足 $M(0) = 0$, 且

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle M, M \rangle_t}{t} \leq \alpha^2 < \infty$$

由强大数定理可以得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = 0 \quad (9)$$

显然, $\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t) = 0$, 可参照文献[11]中的定理5.1.

从式(8)可以得到: 如果 $R_0 > 1$, 那么,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s)ds \geq \frac{\left[m(1 - e^{-as^0}) - D - \frac{\alpha^2}{2} (1 - e^{-as^0})^2 \right] S^0}{m(1 - e^{-as^0})} > 0$$

定理3得证.

定理4 如果 $R_0 < 1$ 和 $\alpha^2 \leq \frac{m}{(1 - e^{-as^0})}$ 成立,

那么, 对于任意初值 $(S_0, x_0) \in \Gamma$, 随机模型(2)的解满足

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log x(t)}{t} \leq c_1 < 0, \text{ a.s.}$$

其中, $c_1 = m(1 - e^{-as^0}) - D - \frac{\alpha^2}{2} (1 - e^{-as^0})^2$, 即 $x(t)$ 几乎必然以指数方式趋近于 0, 即微生物将以概率 1 趋于灭绝.

证明 对随机模型(2)使用伊藤公式, 可以得到

$$d(\log x) = \left[-\frac{\alpha^2}{2} (1 - e^{-as})^2 + m(1 - e^{-as}) - D \right] dt + \alpha(1 - e^{-as})dB = f(z)dt + \alpha(1 - e^{-as})dB \quad (10)$$

其中, $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$f(z) = -\frac{\alpha^2}{2} z^2 + mz - D = -\frac{\alpha^2}{2} \left(z - \frac{m}{\alpha^2} \right)^2 + \frac{m^2}{2\alpha^2} - D$$

$$z = 1 - e^{-as} \in (0, 1 - e^{-as^0})$$

将式(10)两边从 0 到 t 进行积分, 再同时除以 t , 得到

$$\frac{\log x(t)}{t} = \frac{\log x_0}{t} + \frac{1}{t} \int_0^t f(z)ds + \frac{1}{t} \int_0^t \alpha(1 - e^{-as})dB \quad (11)$$

在条件 $R_0 < 1$ 和 $\alpha^2 \leq \frac{m}{(1 - e^{-as^0})}$ 下,

$$f(z) = -\frac{\alpha^2}{2} \left(z - \frac{m}{\alpha^2} \right)^2 + \frac{m^2}{2\alpha^2} - D \leq$$

$$m(1 - e^{-as^0}) - D - \frac{\alpha^2}{2} (1 - e^{-as^0})^2 < 0$$

结合式(11), 可得

$$\frac{\log x(t)}{t} \leq \left[m(1 - e^{-as^0}) - D - \frac{\alpha^2}{2} (1 - e^{-as^0})^2 \right] + \frac{\log x_0}{t} + \frac{M(t)}{t}$$

其中, $M(t) = \int_0^t \alpha(1 - e^{-as})dB$.

由强大数定理可以得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = 0$$

将上式两边取上极限, 得到

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log x(t)}{t} \leq c_1 = m(1 - e^{-as^0}) - D - \frac{\alpha^2}{2} (1 - e^{-as^0})^2 < 0$$

下面的定理5表明, 大的噪声可以导致微生物在恒化器中整体溢出.

定理5 如果条件 $\alpha^2 > \max \left\{ \frac{m}{(1 - e^{-as^0})}, \frac{m^2}{2D} \right\}$

成立, 那么, 对于任意初值 $(S_0, x_0) \in \Gamma$, 随机模型(2)的解满足: $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log x(t)}{t} \leq c_2 < 0$, a.s. 其中,

$c_2 = \frac{m^2}{2\alpha^2} - D$, 即 $x(t)$ 几乎必然以指数方式趋近于 0, 即微生物将以概率 1 趋于灭绝.

证明 在条件 $\alpha^2 > \max \left\{ \frac{m}{(1 - e^{-as^0})}, \frac{m^2}{2D} \right\}$ 下,

计算

$$f(z) = -\frac{\alpha^2}{2} \left(z - \frac{m}{\alpha^2} \right)^2 + \frac{m^2}{2\alpha^2} - D \leq \frac{m^2}{2\alpha^2} - D < 0$$

由式(11)可得

$$\frac{\log x(t)}{t} \leq \left[\frac{m^2}{2\alpha^2} - D \right] + \frac{\log x_0}{t} + \frac{M(t)}{t}$$

与定理4中证明方法相同,可以得到

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log x(t)}{t} \leq c_2 = \frac{m^2}{2\alpha^2} - D < 0$$

4 数值模拟

现利用计算机模拟来验证所得理论结果的正确性. 固定初值 $(S_0, x_0) = (0.65, 0.35)$ 和参数 $S^0 = 1, D = 0.8, a = 0.65$, 通过变化其他参数值得到仿真结果. 其中, 蓝线和红线分别表示确定性模型(1)和随机模型(2)的解曲线.

首先, 取参数 $m = 2.5, \alpha = 0.05$, 模拟结果如图1所示. 此时, $\lambda = 0.5933 < S^0 = 1, R_0 = 1.4931 >$

1, 满足定理3的条件. 从图1中可以观察到随机模型(2)中的微生物是平均持续的, 验证了定理3的结论.

再取参数 $m = 1.5, \alpha = 0.5$, 模拟结果如图2所示. 此时, $\alpha^2 = 0.25 \leq \frac{m}{(1 - e^{-aS^0})} = 3.1384, R_0 = 0.8653 < 1$, 满足定理4中的条件. 从图2中可以观察到随机模型(2)中的微生物是趋于绝灭的, 验证了定理4的结论.

最后取参数 $m = 1.75, \alpha = 1.95$, 模拟结果如图3所示. 此时, $\alpha^2 = 3.8025 > \max \left\{ \frac{m}{(1 - e^{-aS^0})} = 3.6614, \frac{m^2}{2D} = 1.2250 \right\}$, 满足定理5中的条件. 从图3(见下页)中可以观察到随机模型(2)中的微生物是趋于绝灭的, 验证了定理5的结论.

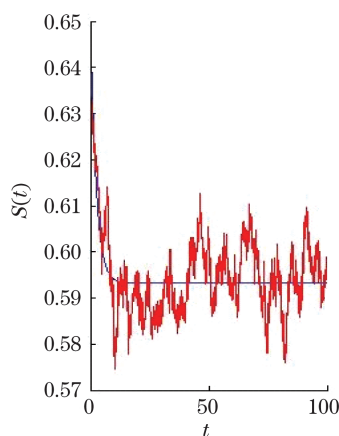


图1 随机模型(2)与确定性模型(1)的解曲线 ($R_0 > 1$)

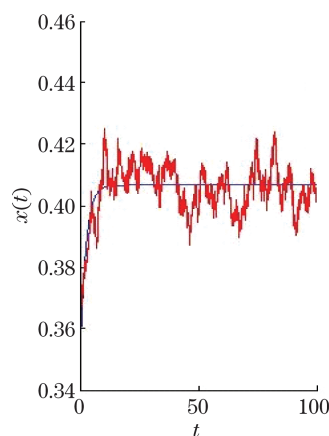


Fig.1 Solution curves of the stochastic model (2) and deterministic model (1) ($R_0 > 1$)

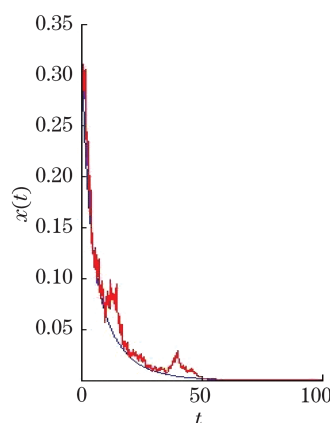
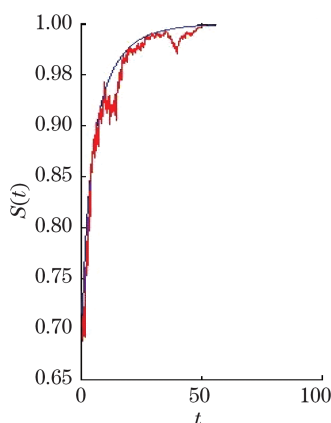


图2 随机模型(2)与确定性模型(1)的解曲线 ($R_0 < 1, \alpha^2 \leq \frac{m}{(1 - e^{-aS^0})}$)

Fig.2 Solution curves of the stochastic model (2) and deterministic model (1) ($R_0 < 1, \alpha^2 \leq \frac{m}{(1 - e^{-aS^0})}$)

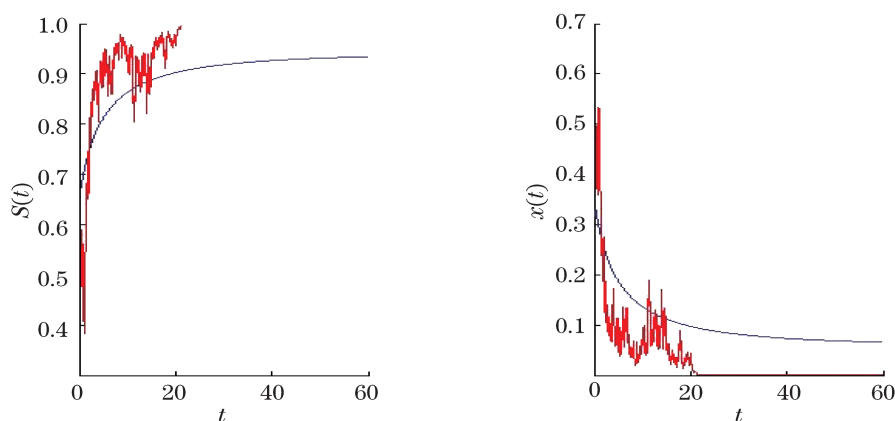


图3 噪声强度较大时随机模型(2)与确定性模型(1)的解曲线

Fig.3 Solution curves of the stochastic model (2) and deterministic model (1) with large intensity of noise

5 讨论

研究了一类随机环境中微生物恒化培养的动力学模型. 利用停时理论证明了随机模型正解的全局存在唯一性与有界性. 在噪声强度较小的情况下, 通过对模型的研究得到了微生物在恒化器中平均持续和灭绝的阈值条件(定理3与定理4), 同时还证明了强度较大的噪声会导致微生物在恒化器中灭绝(定理5).

相对确定性模型而言, 本文考虑的随机恒化器模型得到的结论更加符合客观实际, 更有助于深入了解微生物培养的规律. 然而, 由于微生物在恒化器中的培养过程相对复杂, 并且还会受到许多其他因素的影响, 所建立的模型将更为复杂, 对其动力学行为的研究将更为困难, 这将是下一步的研究工作.

参考文献:

- [1] SMITH H L, WALTMAN P. The theory of the chemostat: dynamics of microbial competition [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [2] SUN S L, CHEN L S. Dynamic behaviors of Monod type chemostat model with impulsive perturbation on the nutrient concentration [J]. Journal of Mathematical Chemistry, 2007, 42(4): 837 - 847.
- [3] PANG G P, CHEN L S. Analysis of Beddington-DeAngelis food chain chemostat with periodically

varying substrate [J]. Journal of Mathematical Chemistry, 2008, 44(2): 467 - 481.

- [4] IVLEV V S. Experimental ecology of the feeding of fishes [M]. New Haven: Yale University Press, 1961.
- [5] IMHOF L, WALCHER S. Exclusion and persistence in deterministic and stochastic chemostat models [J]. Journal of Differential Equations, 2005, 217(1): 26 - 53.
- [6] XU C Q, YUAN S L. An analogue of break-even concentration in a simple stochastic chemostat model [J]. Applied Mathematics Letters, 2015, 48: 62 - 68.
- [7] ZHAO D L, YUAN S L. Critical result on the break-even concentration in a single-species stochastic chemostat model [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2016, 434(2): 1336 - 1345.
- [8] 李姣, 孟琳琳, 原三领. 具有多个参数扰动的随机恒化器模型研究 [J]. 上海理工大学学报, 2013, 35(6): 523 - 530.
- [9] XU C Q, YUAN S L. Competition in the chemostat: a stochastic multi-species model and its asymptotic behavior [J]. Mathematical Biosciences, 2016, 280: 1 - 9.
- [10] MAO X R. Stochastic differential equations and applications [M]. 2nd ed. Cambridge: Woodhead Publishing, 2008.
- [11] JI C Y, JIANG D Q. Threshold behaviour of a stochastic SIR model [J]. Applied Mathematical Modelling, 2014, 38(21/22): 5067 - 5079.

(编辑: 石 瑛)