

拉手蜘蛛图的能量

雷 林, 何常香

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 图 G 的能量定义为其邻接矩阵的所有特征值的绝对值之和. 拉手蜘蛛图定义为从 K_2 的 2 个端点分别长出若干条悬挂边和长为 2 的悬挂路所得到的图. 用 ζ_n 表示点数为 n 的所有拉手蜘蛛图构成的集合, 通过拟序的方法, 研究了拉手蜘蛛图的能量, 并确定了 ζ_n 中能量最小的图.

关键词: 图; 能量; 拟序; 蜘蛛图

中图分类号: O 157.5 **文献标志码:** A

Energy of the Hand-in-Hand Spider Graph

LEI Lin, HE Changxiang

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The energy of a graph G is defined as the sum of absolute values of all eigenvalues of the graph. The hand-in-hand spider graph was obtained from K_2 by adding some pendent edges and pendent paths of length 2 at its two end-vertices. The symbol ζ_n was used to denote the set of hand-in-hand spider graphs of order n . By using the quasi-order of graph, the energy of the hand-in-hand spider graph was studied, and the graphs with the first smallest energies in ζ_n were determined.

Keywords: graph; energy; quasi-order; spider graph

1 基本概念及背景介绍

令 G 为 n 阶简单图, $A(G)$ 为图 G 的邻接矩阵, 图 G 的特征多项式为 $\varphi(G, x) = \sum_{i=0}^n a_i(G) \cdot x^{n-i}$, 所有 $\varphi(G, x) = 0$ 的根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 称为图 G 的特征值, 文献[1-2]将 $E(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$ 定义

为图 G 的能量. 在化学中, 分子图的能量与这个图所表示的分子的 π 电子总能量有密切的关系. 对给定的一类图, 找到图的能量极值和对图的能量排序越来越引起学者的关注, 关于图能量的数学性质可参考文献[3]. 近两年来已研究了许多种类的树的能量, 例如: 给定奇度点个数的一类树^[4], 给定直径的一类树^[5], 控制数确定的树^[6]等. 本文所考虑的图均为 n 阶简单无向图.

收稿日期: 2016-06-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11301340, 11201303); 上海市自然科学基金资助项目(12ZR1420300); 沪江基金资助项目(B14005)

第一作者: 雷 林(1992-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 代数图论. E-mail: 1154375441@qq.com

通信作者: 何常香(1979-), 女, 副教授. 研究方向: 代数图论. E-mail: changxiang-he@163.com

文献[7]中给出了多项式的拟序定义.

定义 1^[7] 令 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$, $g(x) =$

$\sum_{i=0}^n b_i x^{n-i}$ 为 2 个最高项为 n 的首 1 多项式, 且 $f(x), g(x)$ 的系数均为非负数.

a. 若对所有的 $0 \leq i \leq n$, 均有 $a_i \leq b_i$, 则记 $f(x) \leq g(x)$;

b. 若 $f(x) \leq g(x)$ 且 $f(x) \neq g(x)$, 则记 $f(x) < g(x)$.

若存在 $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, 使得 $a_i < b_i$, 但 $a_j > b_j$, 则称多项式 $f(x), g(x)$ 拟序不可比.

令 $b_i(G) = |a_i(G)|$, 定义 $\tilde{\varphi}(G, x) = \sum_{i=0}^n b_i(G) x^{n-i} = \sum_{i=0}^n |a_i(G)| x^{n-i}$, 也可将 $\tilde{\varphi}(G, x)$ 记为 $\tilde{\varphi}(G)$.

当 G 为二分图时, G 的能量可写为^[7]

$$E(G) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \ln \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_{2j}(G) x^{2j} \right) dx$$

由上式可以看出, 当 G 为二分图时, G 的能量随 $b_{2j}(G) \left(j \in 0, 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right)$ 严格单调递增, 文献[7]给出了二分图拟序关系定义.

定义 2^[7] 令 G_1 和 G_2 为 n 阶的二分图,

a. 若 $\tilde{\varphi}(G_1, x) \leq \tilde{\varphi}(G_2, x)$, 则记作 $G_1 \leq G_2$;

b. 若 $\tilde{\varphi}(G_1, x) < \tilde{\varphi}(G_2, x)$, 则记作 $G_1 < G_2$;

c. 若 $\tilde{\varphi}(G_1, x) = \tilde{\varphi}(G_2, x)$, 则记作 $G_1 \sim G_2$.

根据能量的积分公式, 对于同阶的二分图 G_1 和 G_2 , 由 $G_1 \leq G_2$ 可得 $E(G_1) \leq E(G_2)$, 由 $G_1 < G_2$ 可得 $E(G_1) < E(G_2)$, 拟序提供了一个比较能量的方法, 越来越多地应用在图能量的研究中. 本文利用拟序的办法, 给出了在二分图中移动悬挂边和移动长为 2 的悬挂路后能量的变化规律, 并研究了拉手蜘蛛图中边的变换带来的能量变化规律, 从而给出了拉手蜘蛛图中最小的能量图.

2 主要引理

定义 3 $P_{u,v}(s_1, s_2 | t_1, t_2)$ 表示在 $K_2 = uv$ 上, 从点 u 长出 s_1 条悬挂边和 s_2 条长为 2 的悬挂路, 从点 v 长出 t_1 条悬挂边和 t_2 条长为 2 的悬挂路所得到的 n 阶图, 如图 1 所示. 其中, $s_1, s_2, t_1,$

t_2 为非负数. 当 $d(u) \geq 2, d(v) \geq 2$ 时, $P_{u,v}(s_1, s_2 | t_1, t_2)$ 为拉手蜘蛛图.

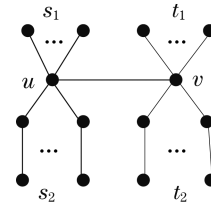


图 1 $P_{u,v}(s_1, s_2 | t_1, t_2)$

Fig.1 $P_{u,v}(s_1, s_2 | t_1, t_2)$

引理 1^[8] 令 u, v 分别为图 G, H 的非孤立点 ($G \cdot H$ 为 G 与 H 的粘合), 则有

a. $\varphi(G \cdot H, x) = \varphi(G, x) \varphi(H - v, x) + \varphi(G - u, x) \varphi(H, x) - x \varphi(G - u, x) \varphi(H - v, x)$;

b. 若图 G, H 均为二分图, 那么,

$$\tilde{\varphi}(G \cdot H, x) = \tilde{\varphi}(G, x) \tilde{\varphi}(H - v, x) +$$

$$\tilde{\varphi}(G - u, x) \tilde{\varphi}(H, x) -$$

$$x \tilde{\varphi}(G - u, x) \tilde{\varphi}(H - v, x)$$

若 u 为二分图 G 中的非孤立点, 用 $G_u(t_1, t_2)$ 表示在 u 上添加 t_1 条悬挂边和 t_2 条长为 2 的悬挂路所得到的图.

推论 1^[8] 令 u 为二分图 G 中的非孤立点, 则

$$\tilde{\varphi}(G_u(k, 0), x) = x^{k-1} [x \tilde{\varphi}(G, x) +$$

$$k \tilde{\varphi}(G - u, x)]$$

推论 2 令 u 为二分图 G 中的非孤立点, 则

$$\tilde{\varphi}(G_u(0, k), x) = (x^2 + 1)^{k-1} [(x^2 + 1) \cdot$$

$$\tilde{\varphi}(G, x) + kx \tilde{\varphi}(G - u, x)]$$

证明 用 H 表示恰有 1 个公共端点的 k 条长为 2 的悬挂路所成的图, 记公共点为 v , 则 $G_u(0, k)$ 可以看成 G 和 H 在点 u 和 v 的粘连.

可直接计算出

$$\varphi(H, x) = x(x^2 - 1)^{k-1}(x^2 - 1 - k)$$

$$\varphi(H - v, x) = (x^2 - 1)^k$$

所以

$$\tilde{\varphi}(H, x) = x(x^2 + 1)^{k-1}(x^2 + 1 + k)$$

$$\tilde{\varphi}(H - v, x) = (x^2 + 1)^k$$

由引理 1 可得

$$\tilde{\varphi}(G_u(0, k), x) = (x^2 + 1)^{k-1} [(x^2 + 1) \cdot$$

$$\widetilde{\varphi}(G, x) + kx\widetilde{\varphi}(G - u, x)]$$

推论 3 令 u 为二分图 G 中的非孤立点, 则

$$\widetilde{\varphi}(G_u(t_1, t_2), x) = (x^2 + 1)^{t_2-1} x^{t_1-1} [x(x^2 + 1) \cdot$$

$$\widetilde{\varphi}(G, x) + (tx^2 + t_1)\widetilde{\varphi}(G - u, x)]$$

证明 令 $H = G_u(t_1, 0)$, 由推论 1 可得

$$\widetilde{\varphi}(H, x) = \widetilde{\varphi}(G_u(t_1, 0), x) =$$

$$x^{t_1-1} [x\widetilde{\varphi}(G, x) + t_1\widetilde{\varphi}(G - u, x)]$$

显然, $G_u(t_1, t_2) = H_u(0, t_2)$, 由推论 2 可得

$$\widetilde{\varphi}(G_u(t_1, t_2), x) = (x^2 + 1)^{t_2-1} x^{t_1-1} [x(x^2 + 1) \cdot$$

$$\widetilde{\varphi}(G, x) + (tx^2 + t_1)\widetilde{\varphi}(G - u, x)]$$

引理 2^[9] (移星操作) 若图 G 为非平凡连通二分图, u, v 为 G 上不同的两点, $G_{u,v}(s, t)$ 表示在 u 上添加 s 条悬挂边, 在 v 上添加 t 条悬挂边所得到的图, 令 s, t, s', t' 均为非负整数, 且 $s + t = s' + t'$.

a. 当 $\widetilde{\varphi}(G - u) = \widetilde{\varphi}(G - v)$ 时, 若 $st > s't'$, 则 $G_{u,v}(s, t) > G_{u,v}(s', t')$;

b. 当 $\widetilde{\varphi}(G - u) > \widetilde{\varphi}(G - v)$ 时, 若 $s > s'$ 且 $st > s't'$, 则 $G_{u,v}(s, t) > G_{u,v}(s', t')$.

引理 3 (移长为 2 的悬挂路) 若图 G 为非平凡连通二分图, u, v 为 G 上不同的两点, $G(u, v|s, t)$ 表示从 G 中点 u, v 分别长出 s 条和 t 条长为 2 的悬挂路所得到的图, 令 s, t, s', t' 均为非负整数, 且 $s + t = s' + t'$.

a. 当 $\widetilde{\varphi}(G - u) = \widetilde{\varphi}(G - v)$ 时, 若 $st > s't'$, 则 $G(u, v|s, t) > G(u, v|s', t')$;

b. 当 $\widetilde{\varphi}(G - u) > \widetilde{\varphi}(G - v)$ 时, 若 $s > s'$ 且 $st > s't'$, 则 $G(u, v|s, t) > G(u, v|s', t')$.

证明 根据推论 2, 有

$$\widetilde{\varphi}(G_u(0, k)) = (x^2 + 1)^k \widetilde{\varphi}(G, x) +$$

$$kx(x^2 + 1)^{k-1} \widetilde{\varphi}(G - u, x)$$

令 $F = G_u(0, s)$, 则 $G(u, v|s, t) = F_v(0, t)$, 所以,

$$\widetilde{\varphi}(G(u, v|s, t)) = \widetilde{\varphi}(F_v(0, t)) =$$

$$(x^2 + 1)^t \widetilde{\varphi}(F) + tx(x^2 + 1)^{t-1} \widetilde{\varphi}(F - v) =$$

$$(x^2 + 1)^t [(x^2 + 1)^s \widetilde{\varphi}(G) + sx(x^2 + 1)^{s-1} \cdot$$

$$\widetilde{\varphi}(G - u)] + tx(x^2 + 1)^{t-1} [(x^2 + 1)^s \cdot$$

$$\widetilde{\varphi}(G - v) + sx(x^2 + 1)^{s-1} \widetilde{\varphi}(G - u - v)] =$$

$$(x^2 + 1)^{s+t} \widetilde{\varphi}(G) + x(x^2 + 1)^{s+t-1} \cdot$$

$$[s\widetilde{\varphi}(G - u) + t\widetilde{\varphi}(G - v)] +$$

$$stx^2(x^2 + 1)^{s+t-2} \widetilde{\varphi}(G - u - v)$$

那么

$$\widetilde{\varphi}(G(u, v|s, t)) - \widetilde{\varphi}(G(u, v|s', t')) =$$

$$\widetilde{\varphi}(G) [(x^2 + 1)^{s+t} - (x^2 + 1)^{s'+t'}] +$$

$$x(x^2 + 1)^{s+t-1} [s\widetilde{\varphi}(G - u) + t\widetilde{\varphi}(G - v)] -$$

$$x(x^2 + 1)^{s'+t'-1} [s'\widetilde{\varphi}(G - u) + t'\widetilde{\varphi}(G - v)] +$$

$$stx^2(x^2 + 1)^{s+t-2} \widetilde{\varphi}(G - u - v) -$$

$$s't'x^2(x^2 + 1)^{s'+t'-2} \widetilde{\varphi}(G - u - v)$$

由于 $s + t = s' + t'$, $s - s' = t' - t$, 所以, 上述计算结果可简化为

$$\widetilde{\varphi}(G(u, v|s, t)) - \widetilde{\varphi}(G(u, v|s', t')) =$$

$$(s - s')x(x^2 + 1)^{s+t-1} [\widetilde{\varphi}(G - u) -$$

$$\widetilde{\varphi}(G - v)] + x^2(x^2 + 1)^{s+t-2} \cdot$$

$$\widetilde{\varphi}(G - u - v)(st - s't')$$

所以, 当 $\widetilde{\varphi}(G - u) = \widetilde{\varphi}(G - v)$, $st > s't'$ 时, $G(u, v|s, t) > G(u, v|s', t')$;

当 $\widetilde{\varphi}(G - u) > \widetilde{\varphi}(G - v)$, $s > s'$ 且 $st \geq s't'$ 时, $G(u, v|s, t) > G(u, v|s', t')$.

引理 4^[4] (缩边定理) 对任意的 n 阶树 T , 且 T 至少有 1 个非悬挂边, 经 α 操作 (如图 2 所示) 后变为 T_0 , 则 $T > T_0$ 且 $E(T) > E(T_0)$.

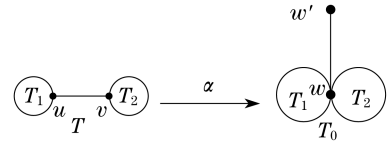


图 2 α 操作

Fig.2 α -transformation of the tree T

引理 5^[10] 若 v 为单圈图或二分图的非孤立点, K_1 表示孤立点, 那么, $G > (G - v) \cup K_1$.

引理 6^[10] G, G' 为单圈图或二分图, u, v, u', v' 分别为 G, G' 的割边.

a. 若 $G - uv \leq G' - u'v'$ 且 $G - u - v \leq G' - u' - v'$, 则 $G \leq G'$;

b. 若 $G - uv < G' - u'v'$ 或 $G - u - v < G' - u' - v'$, 则 $G < G'$.

在研究拉手蜘蛛图的能量时, 对于图 3 和图 4

中的两类确定图的能量需单独比较.

引理 7 $P_{u,v}(s_1 + t_1 - 1, s_2 + t_2 | 1, 0) \geq P_{u,v}(s_1 + t_1, s_2 + t_2 - 1 | 0, 1)$.

证明 a. 当 $s_1 + t_1 = 1, s_2 + t_2 = 1$ 时,

$$P_{u,v}(s_1 + t_1 - 1, s_2 + t_2 | 1, 0) = P_{u,v}(s_1 + t_1, s_2 + t_2 - 1 | 0, 1) = P_5$$

所以

$$P_{u,v}(s_1 + t_1 - 1, s_2 + t_2 | 1, 0) \sim P_{u,v}(s_1 + t_1, s_2 + t_2 - 1 | 0, 1)$$

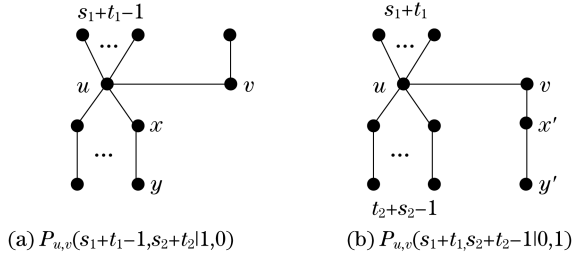


图 3 两类图(1)

Fig.3 Two families of graphs (1)

b. 当 $s_1 + t_1 \neq 1$ 或 $s_2 + t_2 \neq 1$ 时,

$$\begin{aligned} P_{u,v}(s_1 + t_1 - 1, s_2 + t_2 | 1, 0) - xy &\sim \\ P_{u,v}(s_1 + t_1, s_2 + t_2 - 1 | 0, 1) - x'y' &= \\ P_{u,v}(s_1 + t_1 - 1, s_2 + t_2 | 1, 0) - x - y &= \\ P_{u,v}(s_1 + t_1 - 1, s_2 + t_2 - 1 | 1, 0) &= \\ P_{u,v}(s_1 + t_1, s_2 + t_2 - 1 | 0, 1) - x' - y' &= \\ P_{u,v}(s_1 + t_1, s_2 + t_2 - 1 | 0, 0) & \end{aligned}$$

由引理 4(缩边定理)可得

$$P_{u,v}(s_1 + t_1 - 1, s_2 + t_2 - 1 | 1, 0) > P_{u,v}(s_1 + t_1, s_2 + t_2 - 1 | 0, 0)$$

所以

$$P_{u,v}(s_1 + t_1 - 1, s_2 + t_2 | 1, 0) > P_{u,v}(s_1 + t_1, s_2 + t_2 - 1 | 0, 1)$$

综上, $P_{u,v}(s_1 + t_1 - 1, s_2 + t_2 | 1, 0) \geq P_{u,v}(s_1 + t_1, s_2 + t_2 - 1 | 0, 1)$.

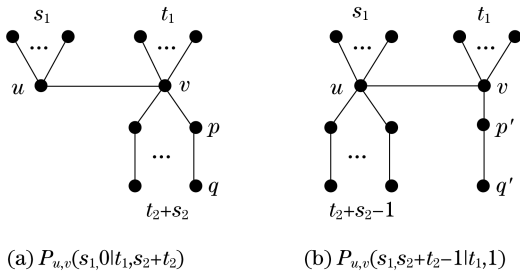


图 4 两类图(2)

Fig.4 Two families of graphs (2)

引理 8 $P_{u,v}(s_1, 0 | t_1, s_2 + t_2) > P_{u,v}(s_1,$

$s_2 + t_2 - 1 | t_1, 1)$, 其中, $s_1 > t_1, s_2 + t_2 \geq 1$.

证明 由图 4 可直接得到

$$\begin{aligned} P_{u,v}(s_1, 0 | t_1, s_2 + t_2) - pq &= \\ P_{u,v}(s_1, 0 | t_1 + 1, s_2 + t_2 - 1) &= \\ P_{u,v}(s_1, s_2 + t_2 - 1 | t_1, 1) - p'q' &= \\ P_{u,v}(s_1, s_2 + t_2 - 1 | t_1 + 1, 0) & \end{aligned}$$

取 $G = P_{u,v}(s_1, 0 | t_1 + 1, 0)$, 因为, $s_1 > t_1$, 由引理 5 可得, $G - u < G - v$,

在图 u, v 两点间移长为 2 的悬挂路, 由引理 3 可得

$$\begin{aligned} P_{u,v}(s_1, 0 | t_1 + 1, s_2 + t_2 - 1) &> \\ P_{u,v}(s_1, s_2 + t_2 - 1 | t_1 + 1, 0) &= \\ P_{u,v}(s_1, 0 | t_1, s_2 + t_2) - p - q &= \\ P_{u,v}(s_1, 0 | t_1, s_2 + t_2 - 1) &= \\ P_{u,v}(s_1, s_2 + t_2 - 1 | t_1, 1) - p' - q' &= \\ P_{u,v}(s_1, s_2 + t_2 - 1 | t_1, 0) & \end{aligned} \quad (1)$$

同上, 由引理 3 可得

$$P_{u,v}(s_1, 0 | t_1, s_2 + t_2) > P_{u,v}(s_1, s_2 + t_2 - 1 | t_1, 1) \quad (2)$$

综合式(1)和式(2), 利用引理 6 的结论, 即可证明引理 8 成立.

3 主要结论

引理 9 对任意的 $P_{u,v}(s_1, s_2 | t_1, t_2) \in \zeta_n$, 当 $s_1 \geq t_1, s_1 + s_2 - t_1 - t_2 + 1 \geq 0$, 即 $s_1 - t_1 + 1 \geq t_2 - s_2$ 时, 则有 $P_{u,v}(s_1, s_2 | t_1, t_2) > P_{u,v}(s_1, s_2 + 1 | t_1, t_2 - 1)$.

证明 $P_{u,v}(s_1, s_2 + 1 | t_1, t_2 - 1) - u - v \sim P_{u,v}(s_1, s_2 | t_1, t_2) - u - v$.

由推论 2 的计算式可得

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(P_{u,v}(s_1, s_2 | t_1, t_2) - uv) &= x^{t_1+s_1-2}(x^2 + \\ 1)^{t_2+s_2-2} [x^4 + (s_1 + s_2 + 1)x^2 + s_1] &= \\ [x^4 + (t_1 + t_2 + 1)x^2 + t_1] & \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(P_{u,v}(s_1, s_2 + 1 | t_1, t_2 - 1) - uv) &= \\ x^{t_1+s_1-2}(x^2 + 1)^{t_2+s_2-2} [x^4 + (s_1 + s_2 + \\ 2)x^2 + s_1] [x^4 + (t_1 + t_2)x^2 + t_1] & \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(P_{u,v}(s_1, s_2 | t_1, t_2) - uv) - \widetilde{\varphi}(P_{u,v}(s_1, s_2 + \\ 1 | t_1, t_2 - 1) - uv) &= x^{t_1+s_1-2}(x^2 + 1)^{t_2+s_2-2} \cdot \\ [x^4(s_1 + s_2 - t_1 - t_2 + 1) + x^2(s_1 - \\ t_1)] &= x^{t_1+s_1}(x^2 + 1)^{t_2+s_2-2} \cdot \\ [x^2(s_1 + s_2 - t_1 - t_2 + 1) + (s_1 - t_1)] & \end{aligned}$$

再利用引理 6 的结论,当 $s_1 \geq t_1, s_1 + s_2 - t_1 - t_2 + 1 \geq 0$, 即 $s_1 - t_1 + 1 \geq t_2 - s_2$ 时, $P_{u,v}(s_1, s_2 | t_1, t_2) > P_{u,v}(s_1, s_2 + 1 | t_1, t_2 - 1)$, 即能量变小.

定理 1 对拉手蜘蛛图 $P_{u,v}(s_1, s_2 | t_1, t_2) \in \zeta_n$, 固定悬挂边数, 则 $P_{u,v}(s_1, s_2 + t_2 | t_1, 0)$ 为能量最小的图, $P_{u,v}(s_1, s_2 + t_2 - 1 | t_1, 1)$ 为能量第二小的图.

证明 设 $s_1 \geq t_1$.

a. 当 $s_1 \geq t_1, s_1 - t_1 + 1 \geq t_2 - s_2$ 时, 由引理 9 可得

$$P_{u,v}(s_1, s_2 | t_1, t_2) > P_{u,v}(s_1, s_2 + 1 | t_1, t_2 - 1)$$

反复用引理 9, 则

$$P_{u,v}(s_1, s_2 | t_1, t_2) > P_{u,v}(s_1, s_2 + t_2 - 1 | t_1, 1) > P_{u,v}(s_1, s_2 + t_2 | t_1, 0)$$

b. 当 $s_1 \geq t_1, s_1 - t_1 + 1 < t_2 - s_2$ 时,

若 $s_1 = t_1$. 取 $G = P_{u,v}(s_1, 0 | t_1, 0)$, 则 $G - u \sim G - v$, 该图移长为 2 的悬挂路后, 由引理 3 可直接证明结论成立.

若 $s_1 > t_1$. 因为, $s_1 + s_2 + 1 < t_1 + t_2$, 所以, $t_2 > s_2$.

取 $G = P_{u,v}(s_1, 0 | t_1, 0)$, 由引理 5 可得, $G - u \sim G - v$, 由引理 3 可得

$$P_{u,v}(s_1, s_2 | t_1, t_2) > P_{u,v}(s_1, t_2 | t_1, s_2)$$

所以, 若 $s_2 \geq 1$, 则 $P_{u,v}(s_1, s_2 | t_1, t_2) > P_{u,v}(s_1, t_2 | t_1, s_2) > P_{u,v}(s_1, s_2 + t_2 - 1 | t_1, 1)$.

若 $s_2 = 0$, 由引理 8 可得

$$P_{u,v}(s_1, 0 | t_1, s_2 + t_2) > P_{u,v}(s_1, s_2 + t_2 - 1 | t_1, 1)$$

所以, $P_{u,v}(s_1, s_2 | t_1, t_2) > P_{u,v}(s_1, s_2 + t_2 - 1 | t_1, 1) > P_{u,v}(s_1, s_2 + t_2 | t_1, 0)$.

结论得证.

定理 2 当 $s_1 + t_1 \geq 2, s_2 + t_2 \geq 2$ 时, 在 n 阶拉手蜘蛛图 $P_{u,v}(s_1, s_2 | t_1, t_2)$ 中, $P_{u,v}(s_1 + t_1, s_2 + t_2 - 1 | 0, 1)$ 为能量最小的图.

证明 设 $s_1 \geq t_1$, 由定理 1 可得

$$P_{u,v}(s_1, s_2 | t_1, t_2) > P_{u,v}(s_1, s_2 + t_2 - 1 | t_1, 1) > P_{u,v}(s_1, s_2 + t_2 | t_1, 0)$$

取 $G = P_{u,v}(0, s_2 + t_2 - 1 | 0, 1)$, $G' = P_{u,v}(0, s_2 + t_2 | 0, 0)$, 则 $G - u < G - v$, $G' - u < G' - v$, 由引理 2(移星操作)可得

$$\begin{aligned} P_{u,v}(s_1, s_2 + t_2 - 1 | t_1, 1) &> \\ P_{u,v}(s_1 + t_1 - 1, s_2 + t_2 - 1 | 1, 1) &> \\ P_{u,v}(s_1 + t_1, s_2 + t_2 - 1 | 0, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{u,v}(s_1, s_2 + t_2 | t_1, 0) &> \\ P_{u,v}(s_1 + t_1 - 2, s_2 + t_2 | 2, 0) &> \\ P_{u,v}(s_1 + t_1 - 1, s_2 + t_2 | 1, 0) \end{aligned}$$

由引理 7 可得, $P_{u,v}(s_1 + t_1 - 1, s_2 + t_2 | 1, 0) > P_{u,v}(s_1 + t_1, s_2 + t_2 - 1 | 0, 1)$, 所以, $P_{u,v}(s_1, s_2 + t_2 | t_1, 0) > P_{u,v}(s_1 + t_1 - 1, s_2 + t_2 | 1, 0) > P_{u,v}(s_1 + t_1, s_2 + t_2 - 1 | 0, 1)$.

综上可得

$$P_{u,v}(s_1, s_2 | t_1, t_2) > P_{u,v}(s_1 + t_1, s_2 + t_2 - 1 | 0, 1)$$

结论得证.

参考文献:

- [1] GUTMAN I. The energy of a graph: old and new results[M] // BETTEN A, KOHNERT A, LAUE R. Algebraic Combinatorics and Applications. Berlin Heidelberg: Springer, 2001.
- [2] GUTMAN I, POLANSKY O E. Mathematics concepts in organic chemistry[M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1986.
- [3] LI X L, SHI Y T, GUTMAN I. Graph energy[M]. New York: Springer, 2012.
- [4] TIAN T, YAN W G, LI S L. On the minimal energy of trees with a given number of vertices of odd degree[J]. MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 2015, 73(1): 3-10.
- [5] RENQIAN S, GE Y P, HUO B F, et al. On the tree with diameter 4 and maximal energy[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 268: 364-374.
- [6] HEC X, WU B F, YU Z S. On the energy of trees with given domination number[J]. MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 2010, 64(1): 169-180.
- [7] SHAN H Y, SHAO J Y, ZHANG L, et al. A new method of comparing the energies of subdivision bipartite graphs[J]. MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 2012, 68(3): 721-740.
- [8] SHAN H Y, SHAO J Y. The proof of a conjecture on the comparison of the energies of trees[J]. Journal of Mathematical Chemistry, 2012, 50(10): 2637-2647.
- [9] 夏玲艳. 图的变换对图的拟序和能量的影响及其应用[D]. 上海: 同济大学, 2015.
- [10] SHAN H Y, SHAO T Y, GONG F, et al. An edge grafting theorem on the energy of unicyclic and bipartite graphs[J]. Linear Algebra and its Applications, 2010, 433(3): 547-556.

(编辑: 石 瑛)