第 39 卷　第 1 期　　上海理工大学学报　J. University of Shanghai for Science and Technology　　Vol.39　No.1　2017

文章编号:1007－6735(2017)01－0012－03　　DOI:10.13255/j.cnki.jusst.2017.01.003

矩阵的秩和非零特征值个数的关系研究

朱　灿，　李　亦

(上海理工大学 理学院,上海　200093)

摘要: 矩阵的秩和非零特征值个数是矩阵的重要不变量,研究二者关系也成为线性代数一个基本的问题.已有的文献分别给出了 n 阶矩阵的秩和非零特征值个数相等或相差 $n-1$ 的充要条件.而矩阵指数又是矩阵的重要不变量,对复矩阵而言它指矩阵零特征值约当块的最大阶数.在已有文献基础上,研究了复数域上矩阵的秩和非零特征值个数二者的差与矩阵指数的关系,得到了矩阵的秩和非零特征值个数的差用矩阵指数刻画的一个充分必要条件,推广了已有文献的结果.

关键词: 矩阵的秩; 特征值; 约当; 矩阵指数

中图分类号: O 151.21　　**文献标志码:** A

Discussions on the Relationship Between Ranks and Numbers of Non-zero Eigenvalues of Matrices

ZHU Can,　LI Yi

(*College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China*)

Abstract: The rank and the number of non-zero eigenvalues of a matrix are two important invariants and the relation between these two values is a basic problem in the linear algebra. Some authors have described the necessary and sufficient conditions for that the rank and the number of non-zero eigenvalues are equal or have a gap of n-1. On the other side, the index of matrix is another important invariant, which, roughly speaking, is the maximal size of the zero eigenvalues in the canonical form of a complex matrix. Based on the existing research results, the relation of the gap between the rank and the number of non-zero eigenvalues with the index of matrix was investigated, and the necessary and sufficient conditions for these invariants were obtained, which is a generalization of some known results.

Keywords: *rank of matrix*; *eigenvalue*; *canonical form*; *index of matrix*

1　问题的提出

矩阵的秩和非零特征值个数(重根按重数计,下同)是线性代数中的重要不变量.对非退化矩阵或实对称矩阵,这二者总是相等.但如果是矩阵的零特征值有阶数大于 1 的约当块,那么二者不相等.有很多学者研究了二者的关系.文献[1]给出了二者相等的

收稿日期: 2016－07－22

基金项目: 上海理工大学教师教学发展研究项目(CFTD17016Z)

第一作者: 朱灿(1981－),男,博士研究生.研究方向:代数学.E-mail:czhu@usst.edu.cn

等价刻画.文献[2]给出了二者的差为 $n-1$ 的等价条件.这两种情形分别是二者差的上下确界.文献[3-6]讨论了二者的差为其他情形的刻画.而矩阵指数又是复矩阵的重要不变量,粗略地讲它是指矩阵的零特征值的约当块的最大阶数.矩阵指数在研究秩幂等矩阵中起着关键的作用,见文献[7-9].本文借助于矩阵的指数的概念,给出了矩阵的秩、非零特征值个数和矩阵指数三者差的上下确界以及矩阵的秩与非零特征值个数差的等价描述.

符号说明:

$M_n(\mathbb{C})$ 表示复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 阶方阵全体. $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$ 和 $\mu(\boldsymbol{A})$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩和非零特征值个数.设 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{C})$ 的约当标准型为 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{J}_1, \boldsymbol{J}_2, \cdots, \boldsymbol{J}_t, \boldsymbol{J}_{t+1}, \cdots, \boldsymbol{J}_s)$.其中,$\boldsymbol{J}_1, \cdots, \boldsymbol{J}_t$ 为零特征值对应的约当块,且它们的阶数分别为 $n_1, \cdots, n_t$,且满足 $n_1\geqslant\cdots\geqslant n_t$. $\boldsymbol{J}_{t+1}, \cdots, \boldsymbol{J}_s$ 为非零特征值对应的约当块. $N(\boldsymbol{A})$ 为线性方程组 $\boldsymbol{A}X=0$ 的解空间.

2　已有结论及相关准备

2.1　零特征值几何重数与矩阵的秩的关系

定理 1[3]　设 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{C})$ 的秩为 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$,其零特征值的几何重数为 t,则 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=n-t$.

2.2　$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})-\mu(\boldsymbol{A})$ 的上下确界

引理 1[2]　$\mu(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{j=t+1}^{s} n_j$.

引理 2[2]　设 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{C})$,则 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})-\mu(\boldsymbol{A})=n_0-t$,其中 $n_0=n_1+n_2+\cdots+n_t$.

定理 2[2]　设 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{C})$,则 $0\leqslant\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})-\mu(\boldsymbol{A})\leqslant n-1$.

2.3　$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\mu(\boldsymbol{A})$ 的充要条件

已经知道 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})-\mu(\boldsymbol{A})$ 的上下确界:$0\leqslant\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})-\mu(\boldsymbol{A})\leqslant n-1$,从而得知 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$ 和 $\mu(\boldsymbol{A})$ 未必总是相同.那么需要满足什么条件,才能使两者的差达到上下确界呢?首先回顾以下两个定理.

定理 3[2]　设 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{C})$,则以下描述等价:

a. $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\mu(\boldsymbol{A})$;

b. $\boldsymbol{A}$ 没有形如 $x^m(m\geqslant2)$ 的初等因子;

c. $\mathrm{ind}(\boldsymbol{A})\leqslant1$($\mathrm{ind}(\boldsymbol{A})$ 的定义见 2.4);

d. $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^2)$;

e. 对于任意自然数 $m(\geqslant2)$,都有 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^m)$;

f. $N(\boldsymbol{A})=N(\boldsymbol{A}^2)$;

g. 对于任意自然数 $m(\geqslant2)$,都有 $N(\boldsymbol{A})=N(\boldsymbol{A}^m)$.

定理 4[2]　设 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{C})$,则以下描述等价:

a. $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})-\mu(\boldsymbol{A})=n-1$;

b. $\boldsymbol{A}$ 的约当标准型为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \boldsymbol{E}_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$;

c. $\mathrm{ind}(\boldsymbol{A})=n$;

d. $\boldsymbol{A}^{n-1}\neq0$;$\boldsymbol{A}^n=0$;

e. $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^l)=n-l$,$1\leqslant l\leqslant n-1$ 且 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^l)=0, 0\leqslant l$;

f. $N(\boldsymbol{A})\subset N(\boldsymbol{A}^2)\subset\cdots\subset N(\boldsymbol{A}^{n-1})\subset N(\boldsymbol{A}^n)$(作为真子空间的包含);

g. 对于任意 $1\leqslant k, l\leqslant n, k\neq l$,则总有 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^k)\neq\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^l)$;

h. 对于任意 $1\leqslant k, l\leqslant n, k\neq l$,则总有 $N(\boldsymbol{A}^k)\neq N(\boldsymbol{A}^l)$.

2.4　矩阵的指数及相关引理

前文已知 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})-\mu(\boldsymbol{A})$ 的上下确界,即 $0\leqslant\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})-\mu(\boldsymbol{A})\leqslant n-1$,并给出了二者相等和相差 $n-1$ 的等价刻画,那么是否二者的差还可能有其他情况呢?为了回答这个问题,本文借助于矩阵的指数 $\mathrm{ind}(\boldsymbol{A})$ 的概念.

设 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{C})$,则可定义线性变换 $\mathcal{A}:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n, z\mapsto\boldsymbol{A}z$,$\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ 为线性变换 $\mathcal{A}$ 的象空间.

定义 1[10]　设 $\boldsymbol{A}, \mathcal{A}$ 如上,定义 $\mathrm{Ind}(\boldsymbol{A})=\inf\{k\mid\mathrm{Im}(\mathcal{A}^k)=\mathrm{Im}(\mathcal{A}^{k+1})\}$,$\mathrm{ind}(\boldsymbol{A})=\inf\{k\mid\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^k)=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^{k+1})\}$.

定理 5　$\mathrm{Ind}(\boldsymbol{A})=\mathrm{ind}(\boldsymbol{A})=n_1$.

证明　首先对 $i=1,2,\cdots,t$,当 $1\leqslant k\leqslant n_i-1$ 时,$\boldsymbol{J}_i^k=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \boldsymbol{E}_{n_i-k} & 0 \end{bmatrix}$.所以容易有 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{J}_i^k)=n_i-k$,更进一步,$\mathrm{rank}(\boldsymbol{J}_i^k)<\mathrm{rank}(\boldsymbol{J}_i^{k+1})$.由于 $\boldsymbol{A}$ 是分块对角矩阵,$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^k)=\sum\limits_{i=1}^{s}\mathrm{rank}(\boldsymbol{J}_i^k)$.而对于那些非零特征值对应的约当块,其幂的秩不会发生变化.从而当 $k<\max\{n_1, n_2, \cdots, n_t\}=n_1$ 时,$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^k)<\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^{k+1})$.而当 $k\geqslant n_i$ 时,$\boldsymbol{J}_i^k=0$.所以当 $k\geqslant\max\{n_1, n_2, \cdots, n_t\}=n_1$ 时,$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^k)=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^{k+1})$,从而就证明了第一个等式 $\mathrm{ind}(\boldsymbol{A})=n_1$.

其次,取 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为线性空间 $\mathbb{C}^n$ 的一组基,其中 $e_i=(0,0,\cdots,1,\cdots,0)'$(第 i 个分量为 1).则线性变换 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$.令 $p=n_1+\cdots+n_t$,$V_1=\mathrm{span}(e_{p+1}, \cdots, e_n)$.则 V_1 为 $\mathcal{A}$-不变子空间,且 $\mathcal{A}$ 在 V_1 上的限制在基 $e_{p+1}, \cdots, e_n$ 下

的矩阵为 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_{t+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{J}_s \end{pmatrix}$，记作$\boldsymbol{J}_{\neq 0}$. 显然，矩阵$\boldsymbol{J}_{\neq 0}$非退化. 记矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{J}_t \end{pmatrix}$ 为$\boldsymbol{J}_{=0}$. 而容易知道当 $k \geqslant \max\{n_1, n_2, \cdots, n_t\} = n_1$ 时，$\boldsymbol{J}_{=0}^k = 0$，所以 $\mathrm{Im}(\mathcal{A}^k) = V_1 = \mathrm{Im}(\mathcal{A}^{k+1})$. 接下来，考虑当 $k < \max\{n_1, n_2, \cdots, n_t\} = n_1$ 时的情况. 易知，$\mathcal{A}(e_1) = e_2$, $\mathcal{A}(e_2) = e_3$, $\cdots$, $\mathcal{A}(e_{n_1-1}) = e_{n_1}$, $\mathcal{A}(e_{n_1}) = 0$. 进一步，$\mathcal{A}^k(e_1) = e_{k+1}$, $\mathcal{A}^k(e_2) = e_{k+2}$, $\cdots$, $\mathcal{A}^k(e_{n_1-k}) = e_{n_1}$, $\mathcal{A}^k(e_{n_1-k+1}) = 0$, $\cdots$, $\mathcal{A}^k(e_{n_1}) = 0$. 从而，$e_{k+1} \in \mathrm{Im}(\mathcal{A}^k)$，但是 $e_{k+1} \notin \mathrm{Im}(\mathcal{A}^{k+1})$，即 $\mathrm{Im}(\mathcal{A}^k) \neq \mathrm{Im}(\mathcal{A}^{k+1})$，于是就证明了第二个等式 $\mathrm{Ind}(\boldsymbol{A}) = n_1$.

定义 2 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 如上，称 n_1 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的指数，记做 $\mathrm{ind}(\boldsymbol{A})$.

3 主要结果

由定理 2 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) - \mu(\boldsymbol{A})$ 的上下确界已知，且有

a. $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) - \mu(\boldsymbol{A}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{ind}(\boldsymbol{A}) = \begin{cases} 0, \boldsymbol{A} \text{ 可逆} \\ 1, \boldsymbol{A} \text{ 的零特征值的约当块阶数均为 } 1 \end{cases}$

b. $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) - \mu(\boldsymbol{A}) = n - 1 \Leftrightarrow \mathrm{ind}(\boldsymbol{A}) = n$.

对非奇异矩阵，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = \mu(\boldsymbol{A})$ 且 $\mathrm{ind}(\boldsymbol{A}) = 0$，所以 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) - \mu(\boldsymbol{A}) = \mathrm{ind}(\boldsymbol{A})$.

如果仅考虑奇异矩阵的情况，有以下总结：

$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) - \mu(\boldsymbol{A}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{ind}(\boldsymbol{A}) = 1$；

$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) - \mu(\boldsymbol{A}) = n - 1 \Leftrightarrow \mathrm{ind}(\boldsymbol{A}) = n$.

因此，自然要问：对于奇异矩阵，是否恒有 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) - \mu(\boldsymbol{A}) = \mathrm{ind}(\boldsymbol{A}) - 1$？为此来看一个例子：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = 2$, $\mu(\boldsymbol{A}) = 0$, $\mathrm{ind}(\boldsymbol{A}) = 2$，不满足 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) - \mu(\boldsymbol{A}) = \mathrm{ind}(\boldsymbol{A}) - 1$.

定理 6 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) - \mu(\boldsymbol{A}) = \mathrm{ind}(\boldsymbol{A}) - 1$ 的充要条件是在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的约当标准型中，$n_2 = n_3 = \cdots = n_t = 1$（即只有约当块$\boldsymbol{J}_1$ 可以是高阶的，其余零特征值对应的约当块均为一阶）.

证明 由引理 2，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) - \mu(\boldsymbol{A}) = n_1 + n_2 + \cdots + n_t - t$. 从而有，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) - \mu(\boldsymbol{A}) = \mathrm{ind}(\boldsymbol{A}) - 1 \Leftrightarrow n_2 + \cdots + n_t = t - 1$.

因为 $n_i \geqslant 1$，所以 $n_2 + \cdots + n_t \geqslant t - 1$，且等号成立当且仅当 $n_2 = n_3 = \cdots = n_t = 1$.

所以 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) - \mu(\boldsymbol{A}) = \mathrm{ind}(\boldsymbol{A}) - 1 \Leftrightarrow n_2 = n_3 = \cdots = n_t = 1$，即$\boldsymbol{J}_2, \cdots, \boldsymbol{J}_t$ 均为 1 阶约当块. 即 $\boldsymbol{A}$ 的约当标准型中，只有约当块$\boldsymbol{J}_1$ 可以是高阶的，其余零特征值对应的约当块均为一阶.

定理 7 令 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) - \mu(\boldsymbol{A}) = \mathrm{ind}(\boldsymbol{A}) + i$，则 i 的取值范围为 $-1 \leqslant i \leqslant [n - 2\sqrt{n}]$，且可取到上下确界.

证明 由引理 2 可求得 $i = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) - \mu(\boldsymbol{A}) - \mathrm{ind}(\boldsymbol{A}) = n_2 + \cdots + n_t - t$.

先求最小值：因为 $n_i \geqslant 1$，所以 $n_2 + \cdots + n_t \geqslant t - 1$，所以 $i = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) - \mu(\boldsymbol{A}) - \mathrm{ind}(\boldsymbol{A}) \geqslant -1$，且只能在 $n_2 = n_3 = \cdots = n_t = 1$ 时可取到 -1，所以 $\min\ i = -1$.

然后求最大值：因为 $n_i \leqslant n_1$，所以 $i = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) - \mu(\boldsymbol{A}) - \mathrm{ind}(\boldsymbol{A}) = n_2 + \cdots + n_t - t \leqslant n_1(t-1) - t$. 又因为 $n_1 \leqslant \frac{n}{t}$，所以 $i \leqslant \frac{n}{t}(t-1) - t = n - \frac{n}{t} - t = n - (\frac{n}{t} + t)$. 由基本不等式$\frac{n}{t} + t \geqslant 2\sqrt{n}$，所以 $i \leqslant n - 2\sqrt{n}$，且在 $t = \sqrt{n}$ 时取到 $n - 2\sqrt{n}$，所以 $\max\ i = n - 2\sqrt{n}$. 当$\sqrt{n}$ 为无理数时，$\max\ i = [n - 2\sqrt{n}]$.

以下例子说明上确界可达，令

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J} & & & \\ & \boldsymbol{J} & & \\ & & \boldsymbol{J} & \\ & & & \boldsymbol{J} \end{pmatrix}$$

其中，

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $n = 12$, $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = 8$, $\mu(\boldsymbol{A}) = 0$, $\mathrm{ind}(\boldsymbol{A}) = 2$，从而 $i = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) - \mu(\boldsymbol{A}) - \mathrm{ind}(\boldsymbol{A}) = 6 = [12 - 2\sqrt{12}]$.

4 结　论

本文在参考文献[1－2]的基础上对复矩阵的秩与非零特征值个数的关系作了进一步的分析，完善和扩展了已有文献对矩阵的秩与非零特征值个数关系的研究. 其主要结果概括如下：借助于矩阵指数的

（下转第 24 页）

因此,可得

$$\rho \in L^{\infty}([0,T_*];W^{1,q}(\Omega)),(u,\theta) \in L^{\infty}([0,T_*];H^2(\Omega)) \cap L^2([0,T_*];W^{2,q}(\Omega))$$

$$\rho_t \in L^{\infty}([0,T_*];L^q(\Omega)),(u_t,\theta_t) \in L^{\infty}([0,T_*];L^2(\Omega)) \cap L^2([0,T_*];H^1(\Omega))$$

类似于文献[8]中的连续性讨论,可证 $\boldsymbol{u}\in C([0,T_*];H^1(\Omega))\cap C([0,T_*];H^2(\Omega))$,并由标准嵌入定理可得,$\rho\in C([0,T_*];W^{1,q}(\Omega))$.定理1证毕.

参考文献:

[1] MATSUMURA A, NISHIDA T. Initialboundary value problems for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids[J]. Communications in Mathematical Physics,1983,89(4):445-446.

[2] DANCHIN R. Global existence in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations[J]. Inventiones Mathematicae,2000,141(3):579-614.

[3] DANCHIN R. Global existence in critical spaces for flows of compressible viscous and heat-conductive gases[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis,2001,160(1):1-39.

[4] HOFF D. Existence of solutions to a model for sparse, one-dimensional fluids[J]. Journal of Differential Equations,2011,250(132):1083-1113.

[5] HOFF D, SERRE D. The failure of continuous dependence on initial data for the Navier-Stokes equations of compressible flow[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics,1991,51(4):887-898.

[6] HOFF D. Local solutions of a compressible flow problem with Navier boundary conditions in general three-dimensional domains[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis,2012,44(2):633-650.

[7] CHO Y G,CHOE H J,KIM H. Unique solvability of the initial boundary value problems for compressible viscous fluids[J]. Journal de Mathématiques Pureset Appliquées,2004,83(2):243-275.

[8] EVANS L C. Partial differential equations[M]. 2nd ed. Providence,RI:American Mathematical Society,2010.

[9] 刘炳初.泛函分析[M].2版.北京:科学出版社,2004.

[10] DIPERNA R J, LIONS P L. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces[J]. Inventiones Mathematicae,1989,98(3):511-547.

(编辑:石 瑛)

(上接第14页)

概念,给出了矩阵的秩、非零特征值个数和矩阵指数这三者差的取值范围以及上下确界,推广了已有文献仅对 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})-\mu(\boldsymbol{A})=0$ 和 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})-\mu(\boldsymbol{A})=n-1$的研究.

参考文献:

[1] 张景晓.矩阵的秩与其非零特征值个数相等的条件[J].德州学院学报,2012,28(4):5-8.

[2] 梁小春,陈梅香,杨忠鹏,等.矩阵的秩和非零特征值个数关系的进一步讨论[J].闽南师范大学学报(自然科学版),2014(2):1-6.

[3] 钟成义,陈永生,朱德文.方阵零特征值代数重数与秩之间的关系[J].苏州科技学院学报(自然科学版),2008,25(2):29-31.

[4] 于清江,包研科.用 n 阶方阵的迹判定其互异特征值的个数[J].大学数学,2006,22(5):157-159.

[5] 林志兴,杨忠鹏,陈梅香.秩与非零特征值个数的差为3的矩阵[J].莆田学院学报,2015,22(2):1-4.

[6] 吕洪斌,杨忠鹏,冯晓霞,等.矩阵的秩与非零特征值个数差的确定[J].吉林大学学报(理学版),2014,52(6):1210-1214.

[7] 郭文静,杨忠鹏,陈梅香.(m,l)秩幂等矩阵和(m,l)幂等矩阵的特性研究[J].北华大学学报(自然科学版),2009,10(1):5-9.

[8] BAKSALARY O M, TRENKLER G. On k-potent matrices[J]. Electronic Journal of Linear Algebra, 2013,26:446-470.

[9] NIKUIE M, MIRNIA M K, MAHMOUDI Y. Some results about the index of matrix and Drazin inverse[J]. Mathematical Sciences Quarterly Journal,2010,4(3):283-294.

[10] BERNSTEIN D S. Matrix mathematics: theory, facts, and formulas[M]. 2nd ed. Princeton: Princeton University Press,2009.

(编辑:丁红艺)