

可压缩流体 Navier-Slip 边界条件问题解的存在性研究

王雪娜, 雍 燕

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 证明了在有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 中带 Navier-Slip 边界条件的可压缩 Navier-Stokes 方程的解的局部存在性. 在证明过程中, 首先利用线性化方法将方程转化为线性方程, 再利用 Galerkin 逼近方法得到线性方程组的弱解, 通过能量估计方法, 得到关于逼近解的一致先验估计, 取极限得到方程的解的局部存在性.

关键词: 可压缩 Navier-Stokes 方程; Navier-Slip 边界条件; 解的存在性

中图分类号: O 175.25

文献标志码: A

Local Solutions of a Compressible Flow Problem with Navier-Slip Boundary Conditions

WANG Xuena, YONG Yan

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The study shows that there exist local-in-time solutions of the compressible Navier-Stokes equations with Navier-Slip boundary conditions in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. To this end, the linearization approach, Galerkin method, standard energy method, aprior estimates and uniform convergence theorem have been used.

Keywords: compressible Navier-Stokes equations; Navier-Slip boundary conditions; solutions existence

1 问题的提出

研究可压缩 Navier-Stokes 方程在 $t > 0$ 上的初边值问题的解的存在性已经有了很长的历史, 并且划分了三类解, 现将逐一介绍这三类解.

第一类解是光滑小解, 最早由 Matsumura 等^[1]

提出, 这种解的初始值和解在 $H^3(\Omega)$ 中都近似等于一个常数. 后来, Danchin^[2-3] 将这个解推广到齐次 Besov 空间. 具体做法是将方程组线性化, 然后对线性方程组进行迭代, 得到一组逼近解, 证明逼近解的渐近衰减速率, 最后将逼近解取极限得到原方程组解的存在性. 这类光滑小解是连续可微的, 缺点是不能体现出 Navier-Stokes 方程组自身的奇性.

收稿日期: 2016-12-10

第一作者: 王雪娜(1990-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 偏微分方程. E-mail: 2423948351@qq.com

通信作者: 雍 燕(1982-), 女, 讲师. 研究方向: 偏微分方程. E-mail: yongyan_math@126.com

第二类解是一般的“大能量”弱解,该解由文献[4-5]引入,并由 Feireisl 推广.这类解的好处是对任意大的初始能量和非负密度都容易证明解的存在性.但是,这一类解的集合比较大,通常还包含了非物理解.由于这类解的光滑性不够,因此,对解的性质分析起来比较困难.

第三类解是 Hoff 解.对于 Hoff 解而言,优点是它保持了解的非线性性和物理上关心的一些有意义的特性.另一方面,这类解当初值具有足够的正则性时,解一般也具有较好的正则性,一般可以根据相关定理来证明解的唯一性和连续性.关于全空间的 Cauchy 问题, Hoff 解的研究已经非常完备了.但是,对于有界区域,由于多了边界,处理起来要相对困难一些.对有界区域,边界条件有很多种提法,如 Dirichlet 边界、No-Slip 边界和 Navier-Slip 边界等.

前人关于 Navier-Stokes 方程组 Dirichlet 边值问题解的存在性的研究结果比较丰富.例如,对于 Dirichlet 边界条件,文献[6]给出了等熵 Navier-Stokes 方程

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ (\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - \mu \Delta u - \\ (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u + \nabla P = \rho f \end{cases} \quad (1)$$

的解的局部存在性.

但是,关于 Slip 边值问题的解的局部存在性研究起来更加困难.最近文献[7]证明了等熵的 Navier-Stokes 方程组带有 Slip 边值问题的解的局部存在性.而本文研究了非等熵的 Navier-Stokes 方程组带有 Slip 边值问题的解的局部存在性.因为,非等熵 Navier-Stokes 方程组比等熵的 Navier-Stokes 方程组多了一个能量方程,在研究时除了要估计密度和速度,还要估计温度,而温度和速度是耦合在一起的,方程组更加复杂,因此,研究起来更加困难.

本文研究了带有 Navier-Slip 边界条件的非等熵 Navier-Stokes 方程

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ (\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - \mu \Delta u - \\ (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u + \nabla P = \rho f \\ c_v [(\rho \theta)_t + \operatorname{div}(\rho u \theta)] - \kappa \Delta \theta + P \operatorname{div} u = \\ 2\mu |S(u)|^2 + \lambda (\operatorname{div} u)^2 + \rho h \end{cases} \quad (2)$$

式中: t 表示时间, $t \geq 0$; Ω 是 R^3 有界区域; ρ 表示密度; u 表示速度,且 $u = (u_1, u_2, u_3)^t$; θ 表示流体的绝对温度; P 表示压力, $P = R\rho\theta$ ($R > 0$); h 和 f 是已知函数,且 h 表示单位质量的热源, f 表示单

位质量上所受到的外力; div 是空间散度; Δ 是 Laplace 算子; 正数 c_v 和 κ 分别代表热容量和热传导系数与热容量之比. $S(u)$ 表示形变张量,且 $S(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t)$; μ 和 λ 均为粘性系数,且满足 $\mu > 0, 2\mu + 3\lambda \geq 0$.

初始值条件为

$$(\rho(\cdot, 0), u(\cdot, 0), \theta(\cdot, 0)) = (\rho_0, u_0, \theta_0) \quad (3)$$

Navier-Slip 边界条件为

$$\begin{aligned} u \cdot n &= 0, 2\mu(S(u) \cdot n)_\tau = (Bu)_\tau, \\ \kappa \frac{\partial \theta}{\partial n} &= \alpha \theta, x \in \partial\Omega, t > 0 \end{aligned} \quad (4)$$

式中, $n(x)$ 为 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量; $(\cdot)_\tau$ 为 $(\cdot)$ 的切向分量; α 为正常数; B 为对称矩阵,并且区域 Ω 和矩阵 B 满足下列条件:

- Ω 是三维空间中的有界开集,且 $\partial\Omega \in C^3$;
- B 在 (ρ, u, θ) 的邻域内是 C^1 光滑的.

在本文中,如果不加特别说明,用字母 C 表示常数.为了方便后面的叙述,构造一个函数空间 W .

$$W = \{w \in (H^1(\Omega))^3 : w(x) \cdot n(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$$

其中, W 是具有 H^1 内积的 Hilbert 空间,参见文献[7].

现给出解的定义.

定义 1 对一个固定的时间 T ,在 $[0, T]$ 内,若下列条件成立:

- $\rho \in C([0, T]; W^{1,q}(\Omega)), (u, \theta) \in C([0, T];$

$$H^2(\Omega)) \cap L^2([0, T]; W^{2,q}(\Omega))$$

$$\rho_t \in C([0, T]; L^q(\Omega)), (u_t, \theta_t) \in C([0, T];$$

$$L^2(\Omega)) \cap L^2([0, T]; H^1(\Omega))$$

- 对任意时间 $t_1, t_2 \in [0, T]$,有

$$\int_{\Omega} \rho(x, \cdot) \varphi(x, \cdot) dx \Big|_{t_2}^{t_1} = \int_{t_2}^{t_1} \int_{\Omega} \rho(\varphi_t + \nabla \varphi \cdot u) dx dt$$

$$\int_{\Omega} (\rho u)(x, \cdot) \psi(x, \cdot) dx \Big|_{t_1}^{t_2} -$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} [\rho u \otimes u \cdot \nabla \psi + P \operatorname{div} \psi] dx dt -$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} (Bu) \psi dS dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} [2\mu S(u) : S(\psi) +$$

$$\lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} \psi] dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho f \psi dx dt$$

$$c_v \int_{\Omega} (\rho \theta)(x, \cdot) \phi(x, \cdot) dx \Big|_{t_1}^{t_2} +$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} [-c_v \rho \theta u \cdot \nabla \phi + \kappa \nabla \theta \cdot \nabla \phi + P \phi \operatorname{div} u] dx dt -$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} \alpha \theta \phi dS dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} [2\mu |\mathbf{S}(u)|^2 + \lambda (\operatorname{div} u)^2 \phi + \rho h \phi] dx dt$$

其中, φ, ψ, ϕ 在 $\Omega \times [0, T]$ 上是 Lipschitz 连续的. 则对于任意 $t, \varphi, \psi \in W$, 有 (ρ, u, θ) 是式(2)~(4)的解.

现介绍本文的主要结果(定理1).

定理1 令 $q \in (3, 6]$, 且 q 是常数, 如果初始值 (ρ_0, u_0, θ_0) 以及 h, f 满足下列条件:

$$\rho \leq \rho_0 \in W^{1,q}(\Omega), (h, f) \in C([0, T];$$

$$L^2(\Omega)) \cap L^2([0, T]; L^q(\Omega))$$

$$(u_0, \theta_0) \in H^2(\Omega), (f_t, h_t) \in L^2([0, T]; L^2(\Omega))$$

和相容性条件:

$$u_0 \in W \cap H^2(\Omega), 2\mu(\mathbf{S}(u_0) \cdot \mathbf{n})_\tau = \mathbf{B}(u_0)_\tau$$

则存在时间 $T_* > 0$ 和唯一解 (ρ, u, θ) 满足带有条件式(3)和式(4)的初边值问题, 使得

$$\rho \in C([0, T_*]; W^{1,q}(\Omega)), (u, \theta) \in C([0, T_*];$$

$$H^2(\Omega)) \cap L^2([0, T_*]; W^{2,q}(\Omega))$$

$$\rho_t \in C([0, T_*]; L^q(\Omega)), (u_t, \theta_t) \in C([0, T_*];$$

$$L^2(\Omega)) \cap L^2([0, T_*]; H^1(\Omega))$$

u, θ 满足边界条件(4).

2 几个重要引理^[8]

引理1 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的有界区域, $\partial\Omega \in C^1(\Omega)$, 则对于 $u \in W^{1,1}(\Omega)$, 存在有界迹算子: $W^{1,1}(\Omega) \rightarrow L^1(\partial\Omega)$, 常数 $C = C(\Omega)$, 有

$$\int_{\partial\Omega} |u(x)| dS \leq C \int_{\Omega} (|u(x)| + |\nabla u(x)|) dx \quad (5)$$

对于 $u \in H^1(\Omega)$, 有

$$\int_{\partial\Omega} |u(x)|^2 dS \leq C \int_{\Omega} (|u(x)|^2 + |u(x)| \cdot |\nabla u(x)|) dx \quad (6)$$

引理2 对于 $p \in [2, 6]$, $u \in H^1(\Omega)$, 存在一个常数 $C = C(\Omega)$, 使得

$$\|u\|_{L^p} \leq C(\|u\|_{L^2} + \|u\|_{L^{\frac{6-p}{2p}}}) \quad (7)$$

引理3 对于 $u \in H^1(\Omega)$, 存在常数 $C = C(\Omega)$, 使得

$$\|u\|_{H^1} \leq C(\|u\|_{L^2} + \|\mathbf{S}(u)\|_{L^2}) \quad (8)$$

3 Lamé 算子和它的谱理论^[9]

讨论 Lamé 算子 L 和特征函数的正则性. 设式

(2)和式(4)成立,

考虑问题: 求解 $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$, 使得

$$\begin{cases} Lu + \beta u = g, & x \in \Omega \\ un = 0, 2\mu(\mathbf{S}(u)n)_\tau = (\mathbf{B}u)_\tau, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (9)$$

式中: β 为常数; g 为已知函数.

问题等价于: 存在 $u \in W$, 使得对所有 $w \in W$, 有

$$A_\beta(u, w) = \int_{\Omega} gw dx$$

$$A_\beta(u, w) = - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{B}u) \cdot w dS + \int_{\Omega} [2\mu \mathbf{S}(u) : \mathbf{S}(w) + \lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} w + \beta uw] dx$$

由 Lax-Milgram 定理, 存在有界解算子 $S_\beta: L^2(\Omega) \rightarrow W$, 使得对所有 $w \in W$, 满足

$$A_\beta(S_\beta g, w) = \int_{\Omega} gw dx \quad (10)$$

引理4 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是有界开集, $\partial\Omega \in C^3(\Omega)$, $\mu > 0, 2\mu + 3\lambda > 0, \mathbf{B} \in L^\infty(\partial\Omega)$, 且 $\mathbf{B}$ 是对称矩阵, 则对足够大的 β , 存在紧自伴算子 $S_\beta: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, $S_\beta \in W$, 使得式(10)成立. 对所有 $g \in L^2(\Omega)$ 和 $w \in W$, 存在一组标准正交基 $\{w_k\}_k \in L^2(\Omega)$, 且 $L^2(\Omega) \subset W \cap C^\infty(\Omega)$, 使得 $S_\beta w_k = \lambda_k^{-1} w_k, \lambda_k \rightarrow \infty$.

引理5 设 $\mu > 0, 2\mu + 3\lambda \geq 0, m \geq 0, \Omega$ 是有界开集, $\partial\Omega \in C^{m+1}(\Omega)$, $B \in C^{m+1}(\Omega)$, 其中, $C_m = C(\mu, \lambda, \Omega, \mathbf{B}, m)$ 依赖于 $\mu, \lambda, \Omega, \mathbf{B}, m$. 若 u 是式(9)的解, $\beta, g \in H^m(\Omega)$, 则 $u \in H^{m+2}(\Omega)$, 且 $\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C_m(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^m(\Omega)}) \quad (11)$

对于算子 $-\Delta$, 考虑问题: 存在 $\theta: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$, 使得

$$\begin{cases} -\kappa \Delta \theta + \gamma \theta = \bar{g}, & x \in \Omega \\ \kappa \frac{\partial \theta}{\partial n} = \alpha \theta, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (12)$$

其中, $\gamma \in R, \bar{g}: \Omega \rightarrow R$ 是已知函数, 令 $B_\gamma(\theta, \varphi) = -\alpha \int_{\partial\Omega} \theta \varphi dS + \int_{\Omega} (\kappa \nabla \theta \cdot \nabla \varphi + \gamma \theta \cdot \varphi) dx$, 则式(12)对应的弱形式为

$$B_\gamma(\theta, \varphi) = \int_{\Omega} \bar{g} \varphi dx$$

与 Lamé 算子类似, 存在有界解算子 $T_\gamma: L^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$, 满足

$$B_\gamma(T_\gamma \bar{g}, \varphi) = \int_{\Omega} \bar{g} \varphi dx$$

对所有 $\varphi \in H^1(\Omega)$, γ 足够大且与 κ, α, Ω 有关.

引理6 设 Ω 是 R^3 上的有界开集, $\partial\Omega \in C^{m+1}(\Omega)$, 对于足够大的 γ , 存在紧自伴算子

$T_\gamma: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), L^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, 使得对所有 $\bar{g} \in L^2(\Omega), \varphi \in H^1(\Omega)$, 上式都成立, 并且存在一组 $L^2(\Omega)$ 中的标准正交基 $\{\varphi_k\}_k$ 使得 $T_\gamma \varphi_k = \tilde{\lambda}_k^{-1} \varphi_k, \tilde{\lambda}_k \rightarrow \infty$.

引理 7 令 $m \geq 0$, 设 Ω 是有界开集, $\partial\Omega \in C^{m+1}(\Omega)$. 若 θ 是式(12)的解, $\bar{g} \in H^m(\Omega)$, 则 $\theta \in H^{m+2}(\Omega)$, 且

$$\|\theta\|_{H^{m+2}} \leq \tilde{C}_m (\|\theta\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{g}\|_{H^m(\Omega)}) \quad (13)$$

其中, $\tilde{C}_m = C(\kappa, \alpha, \Omega, m)$ 是依赖于 $\kappa, \alpha, \Omega, m$ 的常数.

4 先验估计

现推导式(2)的解的先验估计, 在本文中假设存在常数 c_0 , 使得

$$\|\rho_0\|_{W^{1,q}} + \|(u_0, \theta_0)_{H^2}\| + 1 \leq c_0 \quad (14)$$

然后作如下先验假设: 存在 c_1 和 T_* , 使得

$$\sup_{0 \leq t \leq T_*} (\|(u(t), \theta(t))\|_{H^2} + \|(u_t(t), \theta_t(t))\|_{L^2}) + \int_0^{T_*} (\|\nabla u_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla^2 u\|_{L^q}^2) dt + 1 \leq c_1 \quad (15)$$

其中, $1 \leq c_0 \leq c_1, 0 < T_* \leq T$.

本文中如果不加说明, C 是依赖于 $\mu, \lambda, \kappa, \alpha, B, \Omega$ 以及 f 和 h 的范数的正常数.

4.1 密度的估计

关于密度 ρ 的存在唯一性, Diperna 等^[10]得到式(16).

$$\rho(x, t) = \rho_0(X(t, x; 0)) \cdot \exp\left\{-\int_0^t \operatorname{div}(X(t, x; s), s) ds\right\} \quad (16)$$

其中, $X(t, x; s) \in C([0, T] \times \bar{\Omega} \times [0, T])$ 是初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} X(t, x; s) = u(X(t, x; s), s), \\ 0 \leq s \leq t \leq T \\ X(t, x; t) = x, \\ 0 \leq t \leq T, x \in \bar{\Omega} \end{cases} \quad (17)$$

的解.

由式(16)可知,

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &\geq \underline{\rho} \exp\left(-\int_0^t \|\nabla u\|_{L^\infty} ds\right) \geq \\ &\underline{\rho} \exp\left(-\left(\int_0^t \|\nabla u\|_{W^{1,q}}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}\right) \geq \\ &\underline{\rho} \exp\left(-(c_1 t)^{\frac{1}{2}}\right) \geq \underline{\rho} \end{aligned}$$

令 $T_1 = c_1^{-1}$, 则当 $0 \leq t \leq \min(T_*, T_1)$ 时, 上式变为

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &\leq \|\rho_0\|_{L^\infty} \exp\left(\int_0^t \|\nabla u\|_{L^\infty} ds\right) \leq \\ &\|\rho_0\|_{W^{1,q}} \exp\left(\left(\int_0^t \|\nabla u\|_{W^{1,q}}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}\right) \leq \\ &\|\rho_0\|_{W^{1,q}} \exp\left((c_1 t)^{\frac{1}{2}}\right) \leq c \|\rho_0\|_{W^{1,q}} \end{aligned}$$

首先在方程(2)的第2个等式两边同乘以 ρ^{q-1} , 并在 Ω 上积分, 有

$$\frac{d}{dt} \|\rho\|_{L^q} \leq C \|\rho\|_{L^q} \|\nabla u\|_{W^{1,q}} \quad (18)$$

然后对方程(2)的第2个等式关于 x_j 求偏导, 乘以 $\partial_{x_j} \rho |\partial_{x_j} \rho|^{q-2}, 1 \leq j \leq 3$, 并在 Ω 上积分, 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\partial_{x_j} \rho\|_{L^q}^q &\leq C \int |\nabla \rho|^q |\nabla u| + \\ &\rho |\nabla \rho|^{q-1} |\nabla^2 u| \leq C \|\nabla \rho\|_{L^q}^q \|\nabla u\|_{L^\infty} + \\ &C \|\rho\|_{L^\infty} \|\nabla \rho\|_{L^q}^{\frac{1}{q-1}} \|\nabla^2 u\|_{L^\infty} \end{aligned} \quad (19)$$

联合式(18)和式(19), 利用 Gronwall 不等式, 有

$$\begin{aligned} \|\rho\|_{W^{1,q}} &\leq C \|\rho_0\|_{W^{1,q}} \cdot \\ \exp\left(C \int_0^t \|\nabla u\|_{W^{1,q}} ds\right) &\leq C \|\rho_0\|_{W^{1,q}} \cdot \\ \exp\left(C \left(\int_0^t \|\nabla u\|_{W^{1,q}}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}\right) &\leq C c_0^2 \end{aligned} \quad (20)$$

令 $T_1 = c_1^{-1}$, 则对 $0 \leq t \leq \min(T_*, T_1)$, 由式(20)可知,

$$\begin{aligned} \|\rho_t\|_{L^q} &\leq C \|u \cdot \nabla \rho\|_{L^q} + C \|\rho \operatorname{div} u\|_{L^q} \leq \\ &C \|u\|_{H^2} \|\rho\|_{W^{1,q}} \leq C c_1^2 \end{aligned} \quad (21)$$

4.2 热能估计

用 θ 乘以方程(2)的第3个等式, 在 Ω 上积分, 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\sqrt{\rho} \theta\|_{L^2}^2 + \kappa \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 &\leq C \int_{\partial\Omega} \theta^2 dS + \\ &C \int_{\Omega} \rho \theta^2 |\nabla u| + |\nabla u|^2 \theta + \rho \theta |h| \triangleq \\ &I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \end{aligned} \quad (22)$$

由引理1可知,

$$\begin{aligned} I_1 &= C \int_{\partial\Omega} \theta^2 dS \leq C \int_{\Omega} (\theta^2 + |\theta| \cdot \\ &|\nabla \theta|) dx \leq \frac{k}{8} \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 + C \|\theta\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= C \int_{\Omega} \rho \theta^2 |\nabla u| dx \leq C \|\rho\|_{L^\infty} \|\theta\|_{L^2}^3 \|\nabla u\|_{L^3} \leq \\ &C c_0 \|\theta\|_{L^2} \|\theta\|_{H^1} \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &C c_1^{-2} (\|\theta\|_{L^2}^2 + \|\theta\|_{L^2} \|\nabla \theta\|_{L^2}) \leq \\ &\frac{k}{8} \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 + C c_1^{-4} (\|\theta\|_{L^2}^2 + 1) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \theta dx \leq C \|\theta\|_{L^3} \|\nabla u\|_{L^3}^2 \leq \\
&Cc_1^{-2} \|\theta\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|\theta\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \leq \frac{k}{8} \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 + \\
&Cc_1^{-4} (\|\theta\|_{L^2}^2 + 1) \quad (25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= C \int_{\Omega} \rho \theta |h| dx \leq C \|\rho\|_{L^\infty} \|\theta\|_{L^2} \|h\|_{L^2} \leq \\
&Cc_0^{-2} \|\theta\|_{L^2}^2 + C \|h\|_{L^2}^2 \quad (26)
\end{aligned}$$

令 $T_2 = c_1^{-4} < -1$, 则当 $0 \leq t \leq \min(T_*, T_2)$ 时, 将式(23)~(26)代入式(22), 利用 Gronwall 不等式, 得到

$$\|\theta\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 dx \leq Cc_0^2$$

用 θ_t 乘以方程(2)的第 3 个等式, 在 Ω 上积分, 有

$$\begin{aligned}
\frac{\kappa}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \theta|^2 dx - \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega} \theta^2 dS + \int_{\Omega} \rho \theta_t^2 dx = \\
\int_{\Omega} (-\rho u \cdot \nabla \theta - P \operatorname{div} u + Q(\nabla u) + \rho h) \theta_t dx
\end{aligned}$$

其中, $Q(\nabla u) = \frac{\mu}{2} |\nabla u + \nabla u^t|^2 + \lambda (\operatorname{div} u)^2$.

然后对上述方程在 $(0, t)$ 上积分, 有

$$\begin{aligned}
\|\nabla \theta\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\theta_t\|_{L^2}^2 dS \leq Cc_0^2 + \int_{\partial\Omega} \theta^2 dS + \\
C \int_0^t (\rho |u| \cdot |\nabla \theta| \cdot |\theta_t| + P |\nabla u| \cdot |\theta_t| + \\
|\nabla u|^2 |\theta_t| + \rho |h| \cdot |\theta_t|) dx = \\
Cc_0^2 + \sum_{i=1}^5 J_i \quad (27)
\end{aligned}$$

根据引理 1, 可得

$$\begin{aligned}
J_1 &= C \int_{\partial\Omega} \theta^2 dS \leq C \int_{\Omega} \theta^2 + |\theta| \cdot |\nabla \theta| dx \leq \\
\frac{1}{4} \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 + C \|\theta\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1}{4} \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 + Cc_0^2 \quad (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_2 &= C \int_0^t \int_{\Omega} \rho |u| \cdot |\nabla \theta| \cdot |\theta_t| dx ds \leq \\
C \int_0^t \|\rho\|_{L^\infty} \|u\|_{L^\infty} \|\nabla \theta\|_{L^2} \|\theta_t\|_{L^2} ds &\leq \\
\frac{1}{8} \int_0^t \|\theta_t\|_{L^2}^2 ds + Cc_1^4 \int_0^t \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 ds &\quad (29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_3 &= C \int_0^t \int_{\Omega} P |u| \cdot |\nabla u| \cdot |\theta_t| dx ds \leq \\
C \int_0^t \|\rho\|_{L^\infty} \|\theta\|_{H^1} \|\nabla u\|_{L^3} \|\theta_t\|_{L^2} ds &\leq \\
\frac{1}{8} \int_0^t \|\theta_t\|_{L^2}^2 ds + Cc_1^4 \int_0^t \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 ds + \\
Cc_0^2 c_1^4 t &\quad (30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_4 &= C \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 |\theta_t| dx ds \leq \\
C \int_0^t \|\rho\|_{L^\infty} \|h\|_{L^2} \|\theta_t\|_{L^2} ds &\leq
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{8} \int_0^t \|\theta_t\|_{L^2}^2 ds + C \|h\|_{L^2}^2 c_0^2 t \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
J_5 &= C \int_0^t \int_{\Omega} \rho |h| \cdot |\theta_t| dx ds \leq \\
C \int_0^t \|\rho\|_{L^\infty} \|h\|_{L^2} \|\theta_t\|_{L^2} ds &\leq \\
\frac{1}{8} \int_0^t \|\theta_t\|_{L^2}^2 ds + C \|h\|_{L^2}^2 c_0^2 t &\quad (32)
\end{aligned}$$

当 $0 \leq t \leq \min(T_*, T_2)$ 时, 将式(28)~(32)代入式(27), 利用 Gronwall 不等式, 有

$$\|\nabla \theta\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\theta_t\|_{L^2}^2 ds \leq Cc_0^2$$

对方程(2)的第 3 个等式关于 t 求偏导, 乘以 θ_t , 在 Ω 上积分, 有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \theta_t^2 dx + \kappa \int_{\Omega} |\nabla \theta_t|^2 dx &= \alpha \int_{\partial\Omega} \theta_t^2 dS + \\
\int_{\Omega} (-\rho_t \theta_t - \rho_t u \cdot \nabla \theta - \rho u_t \cdot \nabla \theta - P_t \operatorname{div} u - \\
P \operatorname{div} u_t + Q(\nabla u)_t + (\rho h)_t) \theta_t dx &\leq C \int_{\partial\Omega} \theta_t^2 dS + \\
C \int_{\Omega} (|\rho_t| \theta_t^2 + |\rho_t| |u| |\nabla \theta| |\theta_t| + \\
\rho |u_t| |\nabla \theta| |\theta_t|) dx + C \int_{\Omega} (|P_t| |\nabla u| \cdot \\
|\theta_t| + P |\nabla u_t| |\theta_t| + |\nabla u| |\nabla u_t| \cdot \\
|\theta_t| + |(\rho h)_t| |\theta_t|) dx &= \sum_{i=1}^8 K_i \quad (33)
\end{aligned}$$

根据引理 1, 可得

$$\begin{aligned}
K_1 &= C \int_{\partial\Omega} \theta_t^2 dS \leq C \int_{\Omega} \theta_t^2 + |\theta_t| \cdot \\
|\nabla \theta_t| dx &\leq \frac{k}{16} \|\nabla \theta_t\|_{L^2}^2 + C \|\theta_t\|_{L^2}^2 \quad (34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_2 &= C \int_{\Omega} |\rho_t| \cdot |\theta_t|^2 dx \leq C \|\rho_t\|_{L^3} \|\theta_t\|_{L^3}^2 \leq \\
Cc_1^2 \|\theta_t\|_{L^2} \|\theta_t\|_{H^1} &\leq \frac{k}{16} \|\nabla \theta_t\|_{L^2}^2 + \\
Cc_1^4 \|\theta_t\|_{L^2}^2 &\quad (35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_3 &= C \int_{\Omega} |\rho_t| \cdot |u| \cdot |\nabla \theta| \cdot |\theta_t| dx \leq \\
C \|u\|_{L^\infty} \|\rho_t\|_{L^3} \|\nabla \theta\|_{L^2} \|\theta_t\|_{L^6} &\leq \\
Cc_1^4 \|\theta_t\|_{H^1} &\leq \frac{k}{16} \|\nabla \theta_t\|_{L^2}^2 + \\
Cc_1^4 \|\theta_t\|_{L^2}^2 + Cc_1^8 &\quad (36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_4 &= C \int_{\Omega} \rho |u_t| \cdot |\nabla \theta| \cdot |\theta_t| dx \leq \\
C \|\rho\|_{L^\infty} \|u_t\|_{L^3} \|\nabla \theta\|_{L^2} \|\theta_t\|_{L^6} &\leq Cc_0^2 \|u_t\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \cdot \\
\|u_t\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|\theta_t\|_{H^1} &\leq \frac{k}{16} \|\nabla \theta_t\|_{L^2}^2 + C \|\theta_t\|_{L^2}^2 + \\
Cc_0^4 \|\nabla u_t\|_{L^2}^2 + Cc_1^6 &\quad (37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_5 &= C \int_{\Omega} |P_t| \cdot |\nabla u| \cdot |\theta_t| dx \leq \\
&C \|\rho_t\|_{L^3} \|\theta\|_{L^6} \|\nabla u\|_{L^6} \|\theta_t\|_{L^3} + \\
&C \|\rho\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^3} \|\theta_t\|_{L^3}^2 \leq C c_1^4 \|\theta_t\|_{H^1} + \\
&C c_1^2 \|\theta_t\|_{L^2} \|\theta_t\|_{H^1} \leq \frac{k}{16} \|\nabla \theta_t\|_{L^2}^2 + \\
&C c_1^4 \|\theta_t\|_{L^2}^2 + C c_1^8 \quad (38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_6 &= C \int_{\Omega} P |\nabla u_t| \cdot |\theta_t| dx \leq \\
&C \cdot \|\rho\|_{L^\infty} \|\theta\|_{L^6} \|\nabla u_t\|_{L^2} \cdot \|\theta_t\|_{L^3} \leq \\
&C c_0^2 \|\nabla u_t\|_{L^2} \cdot \|\theta_t\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\theta_t\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\frac{k}{16} \|\nabla \theta_t\|_{L^2}^2 + C \|\theta_t\|_{L^2}^2 + C c_0^4 \|\nabla u_t\|_{L^2}^2 \quad (39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_7 &= C \int_{\Omega} |\nabla u| \cdot |\nabla u_t| \cdot |\theta_t| dx \leq \\
&C \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u_t\|_{L^2} \|\theta_t\|_{H^1} \leq \\
&\frac{k}{16} \|\nabla \theta_t\|_{L^2}^2 + C \|\theta_t\|_{L^2}^2 + C c_1^2 \|\nabla u_t\|_{L^2}^2 \quad (40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_8 &= C \int_{\Omega} |(\rho h)_t \theta_t| dx \leq C \|\rho_t\|_{L^3} \|h\|_{L^2} + \\
&C \|\theta_t\|_{L^6} + C \|\rho\|_{L^\infty} \|h_t\|_{L^2} + \|\theta_t\|_{H^1} \leq \\
&\|\nabla \theta_t\|_{L^2}^2 + C \|\theta_t\|_{L^2}^2 + C c_1^4 \|h\|_{L^2}^2 + \\
&C c_0^2 \|h_t\|_{L^2}^2 \quad (41)
\end{aligned}$$

当 $0 \leq t \leq \min(T_*, T_2)$ 时, 将式(34)~(41)代入式(33), 在 (τ, t) 上积分, 由式(15)可知, 有

$$\begin{aligned}
&\|\sqrt{\rho} \theta_t\|_{L^2}^2 + \int_{\tau}^t \|\nabla \theta_t\|_{L^2}^2 ds \leq \\
&C \lim_{\tau \rightarrow 0} \|\sqrt{\rho} \theta_t(\tau)\|_{L^2}^2 + C c_1^4 \int_0^t \|\theta_t\|_{L^2}^2 ds + C c_1^5 \\
&\lim_{\tau \rightarrow 0} \|\sqrt{\rho} \theta_t(\tau)\|_{L^2}^2 \leq C \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\Omega} (\rho |u|^2 |\nabla \theta|^2 + \\
&|\Delta \theta|^2 + \rho \theta^2 |\nabla u|^2 + |\nabla u|^4 + \rho h^2) dx \leq \\
&C (\|\rho_0\|_{L^\infty} \|u_0\|_{L^\infty}^2 \|\nabla \theta_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla^2 \theta_0\|_{L^2}^2 + \\
&\|\rho_0\|_{L^\infty} \|\theta_0\|_{L^\infty}^2 \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 \cdot \\
&\|\nabla u_0\|_{H^1}^3 + \|\rho_0\|_{L^\infty} \|h\|_{L^2}^2) \leq C c_1^5
\end{aligned}$$

由上面 2 个式子, 并且利用 Gronwall 不等式, 有

$$\|\theta_t\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla \theta_t\|_{L^2}^2 ds \leq C c_1^5$$

$$\begin{aligned}
&\text{由椭圆的正则性, 对 } 0 \leq t \leq \min(T_*, T_2), \text{ 有} \\
&\|\nabla \theta\|_{H^1} \leq C (\|\rho \theta_t\|_{L^2}^2 + \|\rho u \cdot \nabla \theta\|_{L^2}^2 + \\
&\|P \operatorname{div} u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^4}^2 + \|\rho h\|_{L^2}^2 + \|\theta\|_{L^2}^2) \leq \\
&C (\|\rho\|_{L^\infty} \|\theta_t\|_{L^2}^2 + \|\rho\|_{L^\infty} \|u\|_{L^\infty} \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 + \\
&\|\rho\|_{L^\infty} \|\theta\|_{H^1} \|\nabla u\|_{L^3} + \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \cdot \\
&\|\nabla u\|_{H^1}^{\frac{3}{2}} + \|\rho\|_{L^\infty} \|h\|_{L^2}^2 + \|\theta\|_{L^2}^2) \leq C c_1^{\frac{7}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \|\nabla \theta\|_{W^{1,q}}^2 ds \leq C \int_0^t (\|\rho \theta_t\|_{L^q}^2 + \|\rho u \cdot \nabla \theta\|_{L^q}^2 + \\
&\|P \operatorname{div} u\|_{L^q}^2 + \|Q(\nabla u)\|_{L^q}^2 + \|\rho h\|_{L^q}^2 + \\
&\|\theta\|_{L^q}^2) ds \leq C \int_0^t (\|\rho\|_{L^\infty}^2 \|\theta_t\|_{H^1}^2 + \|\rho\|_{L^\infty}^2 \cdot \\
&\|u\|_{L^\infty}^2 \|\nabla \theta\|_{H^1}^2 + \|\rho\|_{L^\infty}^2 \|\theta\|_{L^\infty}^2 \|\nabla u\|_{H^1}^2) ds + \\
&C \int_0^t (\|\nabla u\|_{L^q}^{4-\frac{6}{q}} \|\nabla u\|_{W^{1,q}}^{\frac{6}{q}} + \|\rho\|_{L^\infty}^2 \|h\|_{L^q}^2 + \\
&\|\theta\|_{H^1}^2) ds \leq C c_1^7
\end{aligned}$$

4.3 速度估计

用 u 来乘以方程(2)的第 2 个等式, 在 Ω 上积分, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho |u|^2 dx + \int_{\Omega} (2\mu |S(u)|^2 + \\
&\lambda (\operatorname{div} u)^2) dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{B} u u dS + \\
&\int_{\Omega} (P \operatorname{div} u + \rho u f) dx
\end{aligned}$$

对上式两端在 $(0, t)$ 上积分, 由引理 1 和引理 3 可得

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u\|_{L^2}^2 ds \leq C \|u_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|u\|_{L^2}^2 ds + \\
&C \int_0^t \int_{\Omega} (P |\operatorname{div} u| + \rho |u| \cdot |f|) dx ds \leq \\
&\frac{1}{2} \int_0^t \|\nabla u\|_{L^2}^2 ds + C \int_0^t \|u\|_{L^2}^2 ds + C c_0^2
\end{aligned}$$

对上式利用 Gronwall 不等式, 则对 $0 \leq t \leq \min(T_*, T_2)$, 有

$$\|u\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u\|_{L^2}^2 ds \leq C c_0^2$$

用 u_t 乘以方程(2)的第 2 个等式, 在 Ω 上积分, 有

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \rho |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (2\mu |S(u)|^2 + \\
&\lambda (\operatorname{div} u)^2) dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega} \mathbf{B} u u dS + \\
&\int_{\Omega} (-\rho u \nabla u u_t - u_t \nabla P + \rho u_t f) dx
\end{aligned}$$

对上式在 $(0, t)$ 上积分, 由引理 2 和引理 3 可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \|u_t\|_{L^2}^2 ds + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq C \int_0^t \int_{\Omega} (\rho |u| \cdot \\
&|\nabla u| |u_t| + |u_t| |\nabla P| + \\
&\rho |u_t| |f|) dx ds + C \int_{\partial\Omega} |u|^2 dS + C c_0^2 \triangleq \\
&L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + C c_0^2 \quad (42)
\end{aligned}$$

根据引理 1, 可得

$$\begin{aligned}
L_1 &= C \int_{\partial\Omega} |u|^2 dS \leq C \int_{\Omega} (|u|^2 + \\
&|u| |\nabla u|) dx \leq \frac{1}{4} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + C c_0^2 \quad (43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_2 &= \int_0^t \int_{\Omega} \rho |u| |\nabla u| |u_t| dx ds \leq \\
&C \int_0^t \|\rho\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2} \|u_t\|_{L^2} ds \leq \\
&\frac{1}{8} \int_0^t \|u_t\|_{L^2}^2 ds + C c_1^6 t \quad (44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_3 &= \int_0^t \int_{\Omega} |u_t| |\nabla P| dx ds \leq C \int_0^t (\|u_t\|_{L^2} \cdot \\
&\|\rho\|_{L^\infty} \|\nabla \theta\|_{L^2} + \|u_t\|_{L^2} \|\nabla P\|_{L^2} \cdot \\
&\|\theta\|_{L^\infty}) ds \leq \frac{1}{8} \int_0^t \|u_t\|_{L^2}^2 ds + C c_1^9 t \quad (45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_4 &= C \int_0^t \int_{\Omega} \rho |u_t f| dx ds \leq C \int_{\Omega} \|\rho\|_{L^\infty} \|f\|_{L^2} \cdot \\
&\|u_t\|_{L^2} dx \leq \frac{1}{8} \int_0^t \|u_t f\|_{L^2}^2 ds + \\
&C \|f\|_{L^2}^2 c_0^2 t \quad (46)
\end{aligned}$$

令 $T_3 = c_1^{-9} < 1$, 则当 $0 \leq t \leq \min(T_*, T_3)$ 时, 将式(43)~(46)代入式(42), 有

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|u_t\|_{L^2}^2 ds \leq C c_0^2$$

对方程(2)的第 2 个等式关于 t 求导, 乘以 u_t , 在 Ω 上积分, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho |u_t|^2 dx + \int_{\Omega} (2\mu |S(u(t))|^2 + \\
&\lambda (\operatorname{div} u_t)^2) dx = \int_{\Omega} (Bu_t) u_t dS + \\
&\int_{\Omega} (-\rho_t u_t - \rho_t u \cdot \nabla u - \rho u_t \nabla u - \\
&\nabla P_t + (\rho f)_t) u_t dx \leq C \int_{\partial\Omega} |u_t|^2 dS + \\
&C \int_{\Omega} (|\rho_t| |u_t|^2 + |\rho_t| |u| |\nabla u| |u_t| + \\
&\rho |u_t|^2 |\nabla u|) dx + C \int_{\Omega} (|P_t| \cdot |\nabla u_t| + \\
&|(\rho f)_t| |u_t|) dx \triangleq \sum_{i=1}^6 M_i \quad (47)
\end{aligned}$$

根据引理 1, 可得

$$\begin{aligned}
M_1 &= C \int_{\partial\Omega} |u_t|^2 dS \leq C \int_{\Omega} (|u_t|^2 + |u_t| \cdot \\
&|\nabla u_t|) dx \leq \epsilon \|\nabla u_t\|_{L^2}^2 + C_\epsilon \|u_t\|_{L^2}^2 \quad (48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_2 &= C \int_{\Omega} |\rho_t| |u_t|^2 dx \leq C \|\rho_t\|_{L^3} \|u_t\|_{L^3}^2 \leq \\
&C c_1^2 \|u_t\|_{L^2} \|u_t\|_{H^1} \leq \epsilon \|\nabla u_t\|_{L^2}^2 + \\
&C_\epsilon c_1^4 \|u_t\|_{L^2}^2 \quad (49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_3 &= C \int_{\Omega} |\rho_t| |u| |\nabla u| |u_t| dx \leq \\
&C \|\rho_t\|_{L^3} \|u\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2} \|u_t\|_{L^6} \leq \\
&C c_1^4 \|u_t\|_{H^1} \leq \epsilon \|\nabla u_t\|_{L^2}^2 + \\
&C \|u_t\|_{L^2}^2 + C_\epsilon c_1^8 \quad (50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_4 &= C \int_{\Omega} \rho |u_t|^2 \cdot |\nabla u| dx \leq C \|\rho\|_{L^\infty} \cdot \\
&\|u_t\|_{L^4}^2 \|\nabla u\|_{L^2} \leq C c_0^2 \|u_t\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|u_t\|_{H^1}^{\frac{3}{2}} \leq \\
&\epsilon \|\nabla u_t\|_{L^2}^2 + C_\epsilon c_1^8 \|u_t\|_{L^2}^2 \quad (51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_5 &= C \int_{\Omega} |P_t| |\nabla u_t| dx \leq \\
&C (\|\rho\|_{L^\infty} \|\theta_t\|_{L^2} + \|\rho_t\|_{L^2} \|\theta\|_{L^\infty}) \|\nabla u_t\|_{L^2} \leq \\
&\epsilon \|\nabla u_t\|_{L^2}^2 + C_\epsilon c_1^{11} \quad (52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_6 &= C \int_{\Omega} |(\rho f)_t| |u_t| dx \leq C \|\rho\|_{L^\infty} \|f_t\|_{L^2} \cdot \\
&\|u_t\|_{H^1} + C \|\rho_t\|_{L^3} \|f\|_{L^2} \|u_t\|_{H^1} \leq \\
&\epsilon \|\nabla u_t\|_{L^2}^2 + C_\epsilon c_0^2 \|f_t\|_{L^2}^2 + \\
&C_\epsilon c_1^4 \|f\|_{L^2}^2 + \|u_t\|_{L^2}^2 \quad (53)
\end{aligned}$$

令 $T_4 = c_1^{-11} < 1$, 则当 $0 \leq t \leq \min(T_*, T_4)$ 时, 在 (τ, t) 上积分, 并且将式(48)~(53)代入式(47), 利用 Korn 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
&\|\sqrt{\rho} u_t\|_{L^2}^2 + \int_{\tau}^t \|\nabla u_t\|_{L^2}^2 ds \leq C \lim_{\tau \rightarrow 0} \|\sqrt{\rho} u_t(\tau)\|_{L^2}^2 + \\
&C c_1^8 \int_0^t \|\sqrt{\rho} u_t\|_{L^2}^2 ds + C c_0^2 \quad (54)
\end{aligned}$$

令 $T_5 = c_1^{-13} < 1$, 由动量方程可以估计 $\lim_{\tau \rightarrow 0} \|\sqrt{\rho} u_t(\tau)\|_{L^2}^2$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{\tau \rightarrow 0} \|\sqrt{\rho} u_t(\tau)\|_{L^2}^2 \leq C \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\Omega} (\rho |u|^2 |\nabla u|^2 + \\
&|\nabla^2 u|^2 + |\nabla P|^2 + \rho |f|^2) dx \leq \\
&C (\|\rho_0\|_{L^\infty} \|u_0\|_{L^\infty}^2 \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla^2 u\|_{L^2}^2 + \\
&\|\rho_0\|_{L^\infty}^2 \|\nabla \theta_0\|_{L^2}^2) + C (\|\nabla \rho_0\|_{L^2}^2 \|\theta_0\|_{L^\infty}^2 + \\
&\|\rho_0\|_{L^\infty} \|f\|_{L^2}^2) \leq C c_0^5 \quad (55)
\end{aligned}$$

由式(54)和式(55)可知, 对 $0 \leq t \leq \min(T_*, T_5)$, 利用 Gronwall 不等式, 有

$$\|u_t\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u_t\|_{L^2}^2 ds \leq C c_0^5$$

令 $T_6 = c_1^{-22} < 1$, 由椭圆的正则性, 则对 $0 \leq t \leq \min(T_*, T_6)$, 有

$$\begin{aligned}
&\|\nabla u\|_{H^1} \leq C (\|\rho u_t\|_{L^2} + \|\rho u \nabla u\|_{L^2} + \\
&\|\nabla P\|_{L^2} + \|\rho f\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}) \leq C (\|\rho\|_{L^\infty} \cdot \\
&\|u_t\|_{L^2} + \|\rho\|_{L^\infty} \|u\|_{H^1} \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla u\|_{H^1}) + \\
&C (\|\rho\|_{L^\infty} \|\nabla \theta\|_{L^2} + \|\nabla \rho\|_{L^2} \|\theta\|_{L^\infty} + \\
&\|\rho\|_{L^\infty} \|f\|_{L^2} + \|u\|_{L^2})
\end{aligned}$$

由 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned}
&\|\nabla u\|_{H^1} \leq C (\|\rho\|_{L^\infty} \|u_t\|_{L^2} + \|\rho\|_{L^\infty}^2 \|u\|_{H^1}^3 + \\
&\|\rho\|_{L^\infty} \|\nabla \theta\|_{L^2}) + C (\|\nabla \rho\|_{L^2} \|\theta\|_{L^\infty} + \\
&\|\rho\|_{L^\infty} \|f\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}) \leq C c_0^5
\end{aligned}$$

同时, 有

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\nabla u\|_{W^{1,q}}^2 ds &\leq C \int_0^t (\|\rho u_t\|_{L^q}^2 + \|\rho u \cdot \nabla u\|_{L^q}^2 + \\ &\quad \|\nabla P\|_{L^q}^2 + \|\rho f\|_{L^q}^2 + \|u\|_{L^q}^2) ds \leq \\ C \int_0^t (\|\rho\|_{L^\infty}^2 \|u_t\|_{H^1}^2 + \|\rho\|_{L^\infty}^2 \|u\|_{L^\infty}^2 \|\nabla u\|_{H^1}^2 + \\ &\quad \|\rho\|_{L^\infty}^2 \|\nabla \theta\|_{H^1}^2) ds + C \int_0^t (\|\nabla \rho\|_{H^1}^2 \|\theta\|_{L^\infty}^2 + \\ &\quad \|\rho\|_{L^\infty}^2 \|f\|_{L^q}^2 + \|u\|_{H^1}^2) ds \leq C c_0^7 \end{aligned}$$

由前面的推导过程可得先验估计.

定义 $c_1 = C c_0^7$, $C > 1$ 是常数. $\forall T_*$, 当 $0 < T_* \leq T_{**} = \min(T, T_6(c_1))$ 时, 有

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T_*} (\|\rho\|_{W^{1,q}} + \|\rho_t\|_{L^q}) &\leq C c_1^2 \\ \sup_{0 \leq t \leq T_*} (\|\theta\|_{H^2}^2 + \|\theta_t\|_{L^2}^2) + \\ \int_0^{T_*} (\|\nabla \theta_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta\|_{W^{1,q}}^2) ds &\leq C c_1^7 \\ \sup_{0 \leq t \leq T_*} (\|u\|_{H^2}^2 + \|u_t\|_{L^2}^2) + \\ \int_0^{T_*} (\|\nabla u_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{W^{1,q}}^2) ds &\leq c_1 \end{aligned}$$

5 线性化方程组的解的存在性

考虑方程(2)的线性化方程组

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ (\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho v \otimes u) + \\ \quad Lu + \nabla P = \rho f \\ c_v[(\rho \theta)_t + \operatorname{div}(\rho v \theta)] - \kappa \Delta \theta + \\ \quad P \operatorname{div} v = Q(\nabla v) + \rho h \end{cases} \quad (56)$$

其中, $Lu = -\mu \Delta u - (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u$, $Q(\nabla v) = 2\mu |\mathbf{S}(v)|^2 + \lambda (\operatorname{div} v)^2$, v 是速度矢量.

现证明该线性化方程组在 Navier-Slip 边界条件下解的局部存在性.

引理 8 令 $q \in (3, 6]$, 设 $v \in L^\infty([0, T]; H^2(\Omega)) \cap L^2([0, T]; W^{2,q}(\Omega))$, Ω 是 R^3 中的有界区域, $v_t \in L^\infty([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2([0, T]; H^1(\Omega))$, (ρ_0, u_0, θ_0) , f, h 是已知函数, 且满足正则条件:

$$\begin{aligned} \rho &\leq \rho_0 \in W^{1,q}(\Omega), (f, h) \in C([0, T]; \\ &\quad L^2(\Omega)) \cap L^2([0, T]; L^q(\Omega)) \\ (u_0, \theta_0) &\in H^2(\Omega), (f_t, h_t) \in L^2([0, T]; \\ &\quad L^2(\Omega)) \end{aligned}$$

边界条件为

$$v \cdot n = 0, 2\mu(\mathbf{S}(v) \cdot n)_\tau = (\mathbf{B}v)_\tau, x \in \partial\Omega$$

则带有条件式(3)和式(4)的初边值问题(56)存在唯

一解 (ρ, u, θ) , 使得

$$\begin{aligned} \rho &\in C([0, T]; W^{1,q}(\Omega)), (u, \theta) \in \\ &\quad C([0, T]; H^2(\Omega)) \cap L^2([0, T]; W^{2,q}(\Omega)) \\ \rho_t &\in C([0, T]; L^q(\Omega)), (u_t, \theta_t) \in \\ &\quad C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2([0, T]; H^1(\Omega)) \end{aligned}$$

其中, (u, θ) 满足边界条件式(4).

证明 可由文献[8]中的定理 4 得到方程(56)的第 1 个等式的唯一解的存在性和正则性, 现在用 v 代 u , 类似于式(20), 可得到唯一解 ρ , 并且

$$0 < \rho \in C([0, T]; W^{1,q}(\Omega))$$

$$\rho_t \in L^\infty([0, T]; L^q(\Omega))$$

线性动量方程和能量方程可以写成如下形式:

$$\begin{aligned} c_v(\theta_t + v \cdot \nabla \theta) - \rho^{-1} \kappa \Delta \theta + \\ \rho^{-1} P \operatorname{div} v = \rho^{-1} Q(\nabla v) + h \end{aligned} \quad (57)$$

$$u_t + v \cdot \nabla u + \rho^{-1} Lu + \rho^{-1} \nabla P = f \quad (58)$$

现用 Galerkin 方法得到式(57)中 (θ, u) 的存在性. 令

$$\begin{aligned} B[\theta, \varphi; t] &= - \int_{\partial\Omega} \alpha \rho^{-1} \theta \varphi dS + \\ &\quad \int_{\Omega} (\kappa \rho^{-1} \nabla \theta \cdot \nabla \varphi + c_v v \cdot \nabla \theta \varphi - \\ &\quad \kappa \rho^{-2} \nabla \theta \cdot \nabla \rho \varphi + \rho^{-1} P \operatorname{div} v \varphi) dx \\ B[u, \psi; t] &= - \int_{\partial\Omega} \rho^{-1} \mathbf{B} u \psi dS + \\ &\quad \int_{\Omega} (2\mu \rho^{-1} \mathbf{S}(u) \cdot \mathbf{S}(\psi) + \lambda \rho^{-1} \operatorname{div} u \operatorname{div} \psi - \\ &\quad \rho^{-2} (2\mu \mathbf{S}(u) \cdot \nabla \rho \psi + \lambda \operatorname{div} u \psi \cdot \nabla \rho)) dx \\ D[\theta, \psi; t] &= \int_{\Omega} \rho^{-1} \psi \nabla P dx \end{aligned}$$

则对 $\theta, \varphi \in H^1(\Omega)$, $u, \psi \in W$, 式(57)和式(58)的弱形式为

$$(c_v \theta_t, \varphi) + B[\theta, \varphi; t] = (\rho^{-1} Q(\nabla v) + h, \varphi) \quad (59)$$

$$(u_t, \psi) + B[u, \psi; t] + D[\theta, \psi; t] = (f, \psi) \quad (60)$$

首先, 构造逼近解 (u_m, θ_m) , 其中, $u_m(\cdot, 0) \in Z^m$, $V^m = \operatorname{spa} n\{\boldsymbol{\varphi}_l \mid \boldsymbol{\varphi}_l \text{ 为 } -\Delta \text{ 的前 } m \text{ 个特征向量}\}$, $W^m = \operatorname{spa} n\{\mathbf{w}_l \mid \mathbf{w}_l \text{ 为 } L \text{ 的前 } m \text{ 个特征向量}\}$, 令

$$\theta_m(t) = \sum_{l=1}^m \alpha_m^l(t) \boldsymbol{\varphi}_l, u_m(t) = \sum_{l=1}^m b_m^l(t) \mathbf{w}_l$$

取 $u_m(\cdot, 0) \in W^m$, $\theta_m(\cdot, 0) \in V^m$, 则有引理 9.

引理 9 存在一组序列 $\{u_m^0\} \in W^m$, $u_0 \in H^2(\Omega)$, 使得当 $m \rightarrow \infty$ 时, $\{u_m^0\}_m \rightarrow u_0$, 且

$$\|u_m^0\|_{H^2} \leq M_1 \|u_0\|_{H^2}$$

其中, M_1 与 $\mathbf{B}, L$ 和 Ω 有关.

证明 令 $\eta = L_\beta u_0 = (L + \beta) u_0$, 则 $\|\eta\|_{L^2} \leq$

$C(\lambda, \mu) \|u_0\|_{H^2}$, 取 $\eta_m \in L^2(\Omega)$, η_m 是 η 到 W^m 的正交映射, 定义 $u_m^0 = S_\beta(\eta_m) \in W^m$, 则 $L_\beta u_m^0 = \eta_m$, 且 u_m^0 满足边界条件式(4), 由引理 5 和 $S_\beta: L^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ 的连续性, 有

$$\begin{aligned} \|u_m^0\|_{H^2} &\leq C(\|\eta_m\|_{L^2} + \|u_m^0\|_{L^2}) \leq \\ C\|\eta_m\|_{L^2} &\leq C\|\eta\|_{L^2} \leq C_2\|u_0\|_{L^2} \end{aligned}$$

且 $\{u_m^0\}_m$ 在 $H^1(\Omega)$ 和 $H^2(\Omega)$ 是 Cauchy 序列, 由于 $\eta_m \rightarrow \eta$, 所以, u_m^0 在 H^2 中强收敛于 $\bar{u}$, 令 $\bar{u} = S_\beta(\eta)$, 则对 $\forall w \in W$, 有

$$\begin{aligned} A_\beta(\bar{u}, w) &= \int_\Omega \eta w dx = \\ \int_\Omega (Lu_0 + \beta u_0) w dx &= A_\beta(u_0, w) \quad (61) \end{aligned}$$

由 A_β 的强制性可得, $\bar{u} = u_0$, 所以, $u_m^0 \rightarrow u_0$, $u_0 \in H^2(\Omega)$.

类似于引理 9 的证明, 可以证明引理 10.

引理 10 存在一组序列 $\{\theta_m^0\}_m \in V^m$, $\theta_0 \in H^2(\Omega)$, 使得当 $m \rightarrow \infty$ 时, $\{\theta_m^0\}_m \rightarrow \theta_0$, 且

$$\|\theta_m^0\|_{H^2} \leq M_2 \|\theta_0\|_{H^2} \quad (62)$$

其中, 常数 M_2 与 κ, α 和 Ω 有关.

选取系数 $a_m^l(t), b_m^l(t) (0 \leq t \leq T, k = 1, 2, \dots, m)$, 使得如下方程组成立:

$$\begin{cases} (c_v \theta_m, \varphi_k) + B[\theta_m, \varphi_k; t] = \\ (\rho^{-1} Q(\nabla v) + h, \varphi_k) \\ (u_m, w_k) + B[u_m, w_k; t] + \\ D[\theta_m, w_k; t] = (f, w_k) \end{cases} \quad (63)$$

其中, $(\cdot, \cdot)$ 是 $L^2(\Omega)$ 的内积, 将 $\theta_m(t)$ 和 $u_m(t)$ 代入式(59), 则式(63)转为如下线性常微分方程组:

$$\begin{cases} c_v \frac{d}{dt} a_m^k(t) + \sum_{l=1}^m a_m^l(t) B^{kl}(t) = \bar{h}^k(t), \\ \frac{d}{dt} b_m^k(t) + \sum_{l=1}^m b_m^l(t) e^{kl}(t) + \\ \sum_{l=1}^m a_m^l(t) d_k^l(t) = f^k(t), \\ k = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (64)$$

并具有初始值 u_m^0 和 θ_m^0 , 其中, $B[\varphi_l, \varphi_k; t] \triangleq B^{kl}(t), B[w_l, w_k; t] \triangleq \rho^{kl}(t), D[\varphi_l, w_k; t] \triangleq d^{kl}(t), (\rho^{-1} Q(\nabla v) + h, \varphi_k)(t) \triangleq \bar{h}^k(t), (f, w_k) \triangleq f^k(t)$.

根据常微分方程解的存在性定理, 存在唯一的连续函数, $a_m(t) = (a_m^1(t), \dots, a_m^m(t)), b_m(t) = (b_m^1(t), \dots, b_m^m(t))$ 满足式(64)和初始条件. 对于 $0 \leq t \leq T$, 则 θ_m, u_m 是式(63)的解. 由前面的能量

估计可知,

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} (\|u_m, \theta_m\|_{H^2} + \|\partial_t(u_m, \theta_m)\|_{L^2}) + \\ \int_0^T (\|\partial_t \nabla(u_m, \theta_m)\|_{L^2}^2 + \\ \|\nabla^2(u_m, \theta_m)\|_{L^2}^2) dt \leq \tilde{C} \end{aligned}$$

其中, $\tilde{C}$ 是通用正常数, 且只与引理 8 中 v 的范数有关. 所以, 有下列结论成立:

$$(\theta_m, u_m) \rightarrow (\theta, u), x \in C([0, T]; H^1(\Omega))$$

$$(\theta_m, u_m) \xrightarrow{w} (\theta, u), x \in L^2([0, T]; W^{2,q}(\Omega))$$

$$(\theta_m, u_m) \xrightarrow{w^*} (\theta, u), x \in L^\infty([0, T]; H^2(\Omega))$$

$$(\partial_t \theta_m, \partial_t u_m) \xrightarrow{w} (\partial_t \theta, \partial_t u), x \in L^2([0, T]; H^1(\Omega))$$

现通过迭代方法构造初边值问题(2)~(4)的近似解.

a. 定义 $u^0 = 0$;

b. 设 $u^{k-1}, k \geq 1$, 则 (ρ^k, u^k, θ^k) 是下面的初边值问题:

$$\begin{cases} \rho_t^k + \operatorname{div}(\rho^k u^{k-1}) = 0 \\ (\rho^k u^k)_t + \operatorname{div}(\rho^k u^{k-1} \otimes u^k) + \\ Lu^k + \nabla P^k = \rho^k f \\ c_v[(\rho^k \theta^k)_t + \operatorname{div}(\rho^k u^{k-1} \theta^k)] - \kappa \Delta \theta^k + \\ P^k \operatorname{div} u^{k-1} = Q(\nabla u^{k-1}) + \rho^k h \end{cases}$$

的解, 且满足初始条件和边界条件:

$$\begin{aligned} (\rho^k, u^k, \theta^k)|_{t=0} &= (\rho_0, u_0, \theta_0), (\rho_0, u_0, \theta_0) \in \Omega \\ u^k \cdot n &= 0, 2\mu(S(u^k) \cdot n)_T = (Bu^k)_T, \end{aligned}$$

$$\kappa \frac{\partial}{\partial n} = \alpha \theta^k, x \in \partial \Omega$$

$$\begin{aligned} Lu^k &= -\mu \Delta u^k - (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u^k \\ Q(\nabla u^k) &= 2\mu |S(u^k)|^2 + \lambda (\operatorname{div} u^k)^2 \end{aligned}$$

6 定理 1 的证明

由引理 8 可知强解 (ρ^k, u^k, θ^k) 的整体解的存在性.

由前面估计可知,

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T_*} (\|\rho^k\|_{W^{1,q}} + \|\rho_t^k\|_{L^q} + \|(u^k, \theta^k)\|_{H^2} + \\ \|(u_t^k, \theta_t^k)\|_{L^2}) + \int_0^{T_*} (\|\nabla u_t^k, \nabla \theta_t^k\|_{L^2}^2 + \\ \|\nabla^2 u^k, \nabla^2 \theta^k\|_{L^2}^2) dt \leq C \end{aligned}$$

其中, C 是仅依赖于 $\alpha, \mu, \kappa, B, \Omega$ 和 f, h 的范数的正常数. 由 Aubin-Lions 引理可得

$$\rho^k \rightarrow \rho, x \in C([0, T_*]; L^q(\Omega))$$

$$\rho^k \xrightarrow{w} \rho, x \in C([0, T_*]; W^{1,q}(\Omega))$$

$$(u^k, \theta^k) \rightarrow (u, \theta), x \in C([0, T_*]; H^1(\Omega))$$

因此,可得

$$\begin{aligned} \rho &\in L^\infty([0, T_*]; W^{1,q}(\Omega)), (u, \theta) \in \\ &L^\infty([0, T_*]; H^2(\Omega)) \cap L^2([0, T_*]; W^{2,q}(\Omega)) \\ \rho_t &\in L^\infty([0, T_*]; L^q(\Omega)), (u_t, \theta_t) \in \\ &L^\infty([0, T_*]; L^2(\Omega)) \cap L^2([0, T_*]; H^1(\Omega)) \end{aligned}$$

类似于文献[8]中的连续性讨论,可证 $u \in C([0, T_*]; H^1(\Omega)) \cap C([0, T_*]; H^2(\Omega))$, 并由标准嵌入定理可得, $\rho \in C([0, T_*]; W^{1,q}(\Omega))$. 定理1证毕.

参考文献:

- [1] MATSUMURA A, NISHIDA T. Initialboundary value problems for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids[J]. Communications in Mathematical Physics, 1983, 89(4): 445 - 446.
- [2] DANCHIN R. Global existence in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations[J]. Inventiones Mathematicae, 2000, 141(3): 579 - 614.
- [3] DANCHIN R. Global existence in critical spaces for flows of compressible viscous and heat-conductive gases [J]. Archive for Rational Mechanics and

Analysis, 2001, 160(1): 1 - 39.

- [4] HOFF D. Existence of solutions to a model for sparse, one-dimensional fluids [J]. Journal of Differential Equations, 2011, 250(132): 1083 - 1113.
- [5] HOFF D, SERRE D. The failure of continuous dependence on initial data for the Navier-Stokes equations of compressible flow[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1991, 51(4): 887 - 898.
- [6] HOFF D. Local solutions of a compressible flow problem with Navier boundary conditions in general three-dimensional domains [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2012, 44(2): 633 - 650.
- [7] CHO Y G, CHOE H J, KIM H. Unique solvability of the initial boundary value problems for compressible viscous fluids[J]. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 2004, 83(2): 243 - 275.
- [8] EVANS L C. Partial differential equations[M]. 2nd ed. Providence, RI: American Mathematical Society, 2010.
- [9] 刘炳初. 泛函分析[M]. 2版. 北京: 科学出版社, 2004.
- [10] DIPERNA R J, LIONS P L. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces [J]. Inventiones Mathematicae, 1989, 98(3): 511 - 547.

(编辑: 石 瑛)

(上接第14页)

概念,给出了矩阵的秩、非零特征值个数和矩阵指数这三者差的取值范围以及上下确界,推广了已有文献仅对 $\text{rank}(\mathbf{A}) - \mu(\mathbf{A}) = 0$ 和 $\text{rank}(\mathbf{A}) - \mu(\mathbf{A}) = n - 1$ 的研究.

参考文献:

- [1] 张景晓. 矩阵的秩与其非零特征值个数相等的条件[J]. 德州学院学报, 2012, 28(4): 5 - 8.
- [2] 梁小春, 陈梅香, 杨忠鹏, 等. 矩阵的秩和非零特征值个数关系的进一步讨论[J]. 闽南师范大学学报(自然科学版), 2014(2): 1 - 6.
- [3] 钟成义, 陈永生, 朱德文. 方阵零特征值代数重数与秩之间的关系[J]. 苏州科技学院学报(自然科学版), 2008, 25(2): 29 - 31.
- [4] 于清江, 包研科. 用 n 阶方阵的迹判定其互异特征值的个数[J]. 大学数学, 2006, 22(5): 157 - 159.
- [5] 林志兴, 杨忠鹏, 陈梅香. 秩与非零特征值个数的差为

3 的矩阵[J]. 莆田学院学报, 2015, 22(2): 1 - 4.

- [6] 吕洪斌, 杨忠鹏, 冯晓霞, 等. 矩阵的秩与非零特征值个数差的确定[J]. 吉林大学学报(理学版), 2014, 52(6): 1210 - 1214.
- [7] 郭文静, 杨忠鹏, 陈梅香. (m, l) 秩幂等矩阵和 (m, l) 幂等矩阵的特性研究[J]. 北华大学学报(自然科学版), 2009, 10(1): 5 - 9.
- [8] BAKSALARY O M, TRENKLER G. On k -potent matrices[J]. Electronic Journal of Linear Algebra, 2013, 26: 446 - 470.
- [9] NIKUIE M, MIRNIA M K, MAHMOUDI Y. Some results about the index of matrix and Drazin inverse [J]. Mathematical Sciences Quarterly Journal, 2010, 4(3): 283 - 294.
- [10] BERNSTEIN D S. Matrix mathematics: theory, facts, and formulas [M]. 2nd ed. Princeton: Princeton University Press, 2009.

(编辑: 丁红艺)