

非线性耦合 Drinfeld-Sokolov-Satsuma-Hirota 方程的对称约化

牛莉莉, 胡恒春

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 由 Clarkson 和 Kruskal 提出的 Clarkson-Kruskal 直接法是一种不涉及群运算的求解非线性偏微分方程的代数方法, 不同于经典李群方法, Clarkson-Kruskal 直接法不要求解复杂的初值问题. 应用 Clarkson-Kruskal 直接法, 并且利用相应规则得到非线性耦合 Drinfeld-Sokolov-Satsuma-Hirota 方程的对称约化. 同时进一步求得了 Drinfeld-Sokolov-Satsuma-Hirota 方程新的相似变量和相似解, 并与经典李群方法得到的结果进行对比, 验证了 Clarkson-Kruskal 直接法与经典李群方法得到的结果可以互相变换.

关键词: 对称约化; 非线性耦合 Drinfeld-Sokolov-Satsuma-Hirota 方程; Clarkson-Kruskal 直接法
中图分类号: O 175 **文献标志码:** A

Symmetry Reduction for the Nonlinear Coupled Drinfeld-Sokolov-Satsuma-Hirota Equation

NIU Lili, HU Hengchun

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The Clarkson-Kruskal direct method was proposed by Clarkson and Kruskal, which is an algebraic method for solving nonlinear partial differential equations. The advantage of this method is that it does not involve group theory operations and complex initial value problems. It can give new similarity solutions of the nonlinear evolution equations which could not be obtained by the classical Lie group method and the nonclassical Lie group method. By using the Clarkson-Kruskal method and corresponding rules, the symmetry reduction and the similarity transformation of the Drinfeld-Sokolov-Satsuma-Hirota equation were obtained. It is verified that the results by the Clarkson-Kruskal method can be transformed into those by the classical Lie group method.

Keywords: *symmetry reduction; nonlinear coupled Drinfeld-Sokolov-Satsuma-Hirota equation; Clarkson-Kruskal direct method*

收稿日期: 2016-12-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11071164, 11201302); 上海市自然科学基金资助项目(10ZR1420800); 上海市重点学科建设资助项目(XTKX2012)

第一作者: 牛莉莉(1993-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 孤立子理论与可积系统. E-mail: 546174910@qq.com

通信作者: 胡恒春(1976-), 女, 副教授. 研究方向: 孤立子理论与可积系统. E-mail: hhengchun@163.com

近年来,人们在不同科学领域中都发现和提出了用非线性方程来模拟不同的实验模型.因此,找到非线性发展方程的解具有非常重要的研究意义.如何求解非线性发展方程是一项困难的工作,经过数学家们和物理学家们多年的不懈努力,人们提出了许多有效的求解非线性发展方程的方法,如:Weierstrass 椭圆函数展开法^[1]、达布变换法^[2]、Hirota 双线性方法^[3]、反散射方法^[4]、李群方法^[5-11]等.

本文研究 Drinfeld-Sokolov-Satsuma-Hirota 方程,简称 DSSH 方程,其形式如下:

$$\begin{cases} u_t - 6uu_x + uu_{xx} - 6v_x = 0 \\ v_t - 2v_{xxx} + 6uv_x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

该方程分别独立地由 Drinfeld, Sokolov^[12] 和 Satsuma, Hirota^[13] 提出.耦合 DSSH 方程是众多具有特殊形式 Lax 对的非线性方程之一,并且 DSSH 方程可以作为 KP 族的四约化的一个特殊情况,科学家们已经构建出它的精确单孤子解. Gürses 和 Karasu^[14] 发现了方程(1)的一个递归算子和一个双哈密顿结构, Wazwaz^[15] 用 3 种不同的方法,也就是 Cole-Hopf 变换、Hirota 双线性方法和指数函数法,获得了其多孤子解、多个单孤子解以及平面周期解.下面采用 Clarkson-Kruskal 直接法(简称 CK 直接法)对方程(1)进行约化,并求出选取特殊常数后的新的相似解.

1 方法简介

众所周知,求解非线性系统的约化相似解,有 3 种常用方法:经典李群法、非经典李群法以及 CK 直接法.其中,经典及非经典李群法用到李群的思想,并且只能得到非线性偏微分方程的部分相似约化.

1989 年,Clarkson 和 Kruskal 提出将 CK 直接法应用于 Boussinesq 方程^[16]和修正的 Boussinesq 方程^[17],并得到了新的相似解,而用经典李群法和非经典李群法是得不到这些结果的.这种方法的主要优点是避免了复杂的群论分析,并且有时能够得到更多的相似约化结果. CK 直接法被广泛应用在求解各种非线性偏微分方程上,如:对称正则长波方程^[18]、修正的 Benjamin-Bona-Mahoney 方程^[18]等.

首先介绍相似变换的定义.

设 $u(x, t)$ 是一个偏微分方程 $P(u) = 0$ 的解,作变换

$$x \rightarrow x', t \rightarrow t', u \rightarrow u' \quad (2)$$

使 $u'(x', t')$ 也是偏微分方程 $P(u) = 0$ 的解,即

$$P(u'(x', t')) = 0$$

当式(2)为单参数李群变换时,可以得到从 $x, t, u(x, t)$ 到 $x', t', u'(x', t')$ 的不变变换条件

$$\xi \frac{\partial u}{\partial x} + \tau \frac{\partial u}{\partial t} = \eta \quad (3)$$

将式(2)代入到式(3)中可以确定 $\xi(x, t), \tau(x, t), \eta(x, t)$, 从而由式(3)的特征方程

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dt}{\tau} = \frac{du}{\eta}$$

确定出相似变量和相似变换.

由 $\frac{dx}{\xi} = \frac{dt}{\tau}$ 解得 $f(x, t) = c_1$, 令 $f(x, t) = z$, 从

中解得 $x = h(z, t)$, 由

$$\frac{dt}{\tau(x, t)} = \frac{du}{\eta(h(z, t), t, u)}$$

解得 $U(x, t, h(z, t), u) = c_2$, 这时相似解可表示为

$$u(x, t) = U(x, t, \omega(z(x, t))) \quad (4)$$

基于以上,可直接寻求形如式(4)的解.将式(4)代入到 $P(u) = 0$ 中,可得到 $\omega(z)$ 满足的一个常微分方程,这是偏微分方程的一个一般的相似约化^[19].

CK 直接法^[16-22]的基本思想是:对一个偏微分方程

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (5)$$

寻找一个如下形式的相似解

$$u(x, t) = U(x, t, \omega(z(x, t)))$$

这是相似约化最一般的形式.将式(4)代入式(5)中,并且确保得到的结果是关于 $\omega(z)$ 的常微分方程,并且限制 U 和它的导数条件,使之能够解出 U 和 ω 的具体形式.

实际上,可以进一步假设方程(5)有如下形式的解

$$u(x, t) = \alpha(x, t) + \beta(x, t)\omega(z(x, t)) \quad (6)$$

这里 $\alpha(x, t), \beta(x, t), z(x, t)$ 是关于 x, t 的待定函数.

将式(6)代入到方程(5)中,并且按 $\omega(z)$ 的幂次及其导数的阶数进行整理.为了使得到的结果是关于 $\omega(z)$ 的常微分方程,需要要求 $\omega(z)$ (或其导数)的不同幂次项的系数成比例,并且比值只能是 z 的函数.因此可得到关于 $\alpha(x, t), \beta(x, t), z(x, t)$ 的超定方程组,便可解得方程(5)的相似约化.

2 Drinfeld-Sokolov-Satsuma-Hirota 方程的相似约化

对于 DSSH 方程,应用 CK 法求其对称约化、相

似变量及相似解的步骤具体如下.

a. 可以容易证明,对于大部分方程都存在形式为 $u(x, t) = \alpha(x, t) + \beta(x, t)\omega(z(x, t))$ 的相似约化,因此可假设方程(1)具有如下形式的对称变换

$$\begin{cases} u(x, t) = \alpha_1(x, t) + \beta_1(x, t)P(z(x, t)) \\ v(x, t) = \alpha_2(x, t) + \beta_2(x, t)Q(z(x, t)) \end{cases} \quad (7)$$

式中: $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 以及 $z(x, t)$ 是关于 x, t 的待定函数; $P(z), Q(z)$ 是关于 z 的常微分方程.

b. 将式(7)代入式(1)中,将得到的结果按照 $P(z), Q(z)$ 的幂次及其导数的阶数进行整理归纳得到

$$\begin{aligned} & \beta_1 z_x^3 P''' + (3\beta_{1x} z_x^2 + 3z_x z_{xx}) P'' + \\ & (\beta_1 z_t - 6\alpha_1 \beta_1 z_x + 3\beta_{1xx} z_x + 3\beta_{1x} z_{xx} + \\ & \beta_1 z_{xxx}) P' - 6\beta_1 \beta_{1x} P^2 + (\beta_{1t} - 6\alpha_1 \beta_{1x} - \\ & 6\alpha_{1x} \beta_1 + \beta_{1xxx}) P - 6\beta_1^2 z_x P P' - \\ & 6\beta_{2x} Q - 6\beta_2 z_x Q' + (\alpha_{1t} - \\ & \alpha_1 \alpha_{1x} + \alpha_{1xxx} - 6\alpha_{2x}) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \beta_1 z_x^3 Q''' + (-6\beta_{2x} z_x^2 - 6\beta_2 z_x z_{xx}) Q'' + \\ & (\beta_2 z_t - 6\beta_{2xx} z_x - 6\beta_{2x} z_{xx} - 2\beta_2 z_{xxx} + \\ & 6\alpha_1 \beta_2 z_x) Q' + (\beta_{2t} - 2\beta_{2xxx} + 6\alpha_1 \beta_{2x}) Q + \\ & 6\beta_1 \alpha_{2x} P + 6\beta_1 \beta_{2x} P Q + 6\beta_1 \beta_2 z_x P Q' + \\ & (\alpha_{2t} - 2\alpha_{2xxx} + 6\alpha_1 \alpha_{2x}) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

c. 找出其规范系数(假设为 $\varphi(x, t)$), 将 $P(z), Q(z)$ 及其各阶导数的系数写成 $\varphi(x, t) \Gamma_i(z)$ 的形式, 其中 Γ_i 是 z 的待定函数.

在这里, 分别以最高阶导数项 P''' 的系数 $\beta_1 z_x^3$ 和 Q''' 的系数 $-6\beta_2 z_x^3$ 作为规范系数, 则可得到

$$\begin{cases} 3\beta_{1x} z_x^2 + 3z_x z_{xx} = \beta_1 z_x^3 \Gamma_1 \\ \beta_1 z_t - 6\alpha_1 \beta_1 z_x + 3\beta_{1xx} z_x + \\ 3\beta_{1x} z_{xx} + \beta_1 z_{xxx} = \beta_1 z_x^3 \Gamma_2 \\ -6\beta_1 \beta_{1x} = \beta_1 z_x^3 \Gamma_3 \\ \beta_{1t} - 6\alpha_1 \beta_{1x} - 6\alpha_{1x} \beta_1 + \beta_{1xxx} = \beta_1 z_x^3 \Gamma_4 \\ -6\beta_1^2 z_x = \beta_1 z_x^3 \Gamma_5 \\ -6\beta_{2x} = \beta_1 z_x^3 \Gamma_6 \\ -6\beta_2 z_x = \beta_1 z_x^3 \Gamma_7 \\ \alpha_{1t} - \alpha_1 \alpha_{1x} + \alpha_{1xxx} - 6\alpha_{2x} = \beta_1 z_x^3 \Gamma_8 \end{cases} \quad (10)$$

式中, Γ_i 是关于 z 的待定函数. 为计算方便, 将经过一些运算后的 $\Gamma_i(z)$ 仍记为 $\Gamma_i(z)$.

$$\begin{cases} -6\beta_{2x} z_x^2 - 6\beta_2 z_x z_{xx} = -2\beta_2 z_x^3 \Omega_1 \\ \beta_2 z_t - 6\beta_{2xx} z_x - 6\beta_{2x} z_{xx} - 2\beta_2 z_{xxx} + \\ 6\alpha_1 \beta_2 z_x = -2\beta_2 z_x^3 \Omega_2 \\ \beta_{2t} - 2\beta_{2xxx} + 6\alpha_1 \beta_{2x} = -2\beta_2 z_x^3 \Omega_3 \\ 6\beta_1 \alpha_{2x} = -2\beta_2 z_x^3 \Omega_4 \\ 6\beta_1 \beta_{2x} = -2\beta_2 z_x^3 \Omega_5 \\ 6\beta_1 \beta_2 z_x = -2\beta_2 z_x^3 \Omega_6 \\ \alpha_{2t} - 2\alpha_{2xxx} + 6\alpha_1 \alpha_{2x} = -2\beta_2 z_x^3 \Omega_7 \end{cases} \quad (11)$$

式中, Ω_i 是关于 z 的待定函数.

在接下来确定 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 和 z 时, 在不失一般性, 并且确保方法有效的前提下, 对于 DSSH 方程, 有以下 5 个自由度规则:

规则 1 若 $\alpha_1(x, t)$ 具有形式 $\alpha_1 = \alpha_{10}(x, t) + \beta_1(x, t)\Omega(z(x, t))$, 那么取 $\Omega(z) \equiv 0$ (相当于作变换 $\omega(z) \rightarrow \omega(z) - \Omega(z)$);

规则 2 若 $\alpha_2(x, t)$ 具有形式 $\alpha_2 = \alpha_{20}(x, t) + \beta_2(x, t)\Omega(z(x, t))$, 那么取 $\Omega(z) \equiv 0$ (相当于作变换 $\omega(z) \rightarrow \omega(z) - \Omega(z)$);

规则 3 若 $\beta_1(x, t)$ 具有形式 $\beta_1 = \beta_0(x, t) \cdot \Omega(z(x, t))$, 那么取 $\Omega(z) \equiv 1$ (相当于作变换 $\omega(z) \rightarrow \omega(z)/\Omega(z)$);

规则 4 若 $\beta_2(x, t)$ 具有形式 $\beta_2 = \beta_0(x, t) \cdot \Omega(z(x, t))$, 那么取 $\Omega(z) \equiv 1$ (相当于作变换 $\omega(z) \rightarrow \omega(z)/\Omega(z)$);

规则 5 若 $z(x, t)$ 是由方程 $\Omega(z) = z_0(x, t)$ 确定的, 那么取 $\Omega(z) = z$ (相当于作变换 $z \rightarrow \Omega - 1(z)$).

接下来考虑 z_x 的不同取值情况.

a. 当 $z_x = 0$ 时, 根据上述规则 5 可得, z 是只关于 t 的函数, 即 $z = t$, 因此 $P(z), Q(z)$ 也是只关于 t 的函数, 得到形式为一阶常微分方程的约化方程. 因此重点考虑 $z_x \neq 0$ 的情况.

b. 根据上述 5 个规则, 当 $z_x \neq 0$ 时, 在方程(10)中由 P''' 和 PP' 前面的系数可知

$$-6\beta_1^2 z_x = \beta_1 z_x^3 \Gamma_5 \quad (12)$$

进一步可得到

$$\beta_1 = -\frac{1}{6} z_x^2 \Gamma_5$$

因此, 利用规则 3 可知

$$\beta_1 = z_x^2 \quad (13)$$

将 $\beta_1 = z_x^2$ 代入方程 $\beta_{1t} - 6\alpha_1 \beta_{1x} - 6\alpha_{1x} \beta_1 + \beta_{1xxx} = \beta_1 z_x^3 \Gamma_4$ 中, 得到

$$\frac{z_{xx}}{z_x} = -\frac{1}{12} z_x \Gamma_4$$

由规则 5 可知

$$\Omega(z) = \int \exp\left(-\frac{1}{12} \int \Gamma_4 dz\right) dz = \theta(t)x + \sigma(t)$$

再由规则 5 可得到 z 有如下形式

$$z = \theta(t)x + \sigma(t) \quad (14)$$

显然,再由式(13)可得

$$\beta_1 = z_x^2 = \theta^2 \quad (15)$$

再将 $\beta_1 = \theta^2$ 代入方程 $-6\beta_2 z_x = \beta_1 z_x^3 \Gamma_7$ 中,并且利用上述规则 4,可得

$$\beta_2 = \theta^4 \quad (16)$$

再由 $6\beta_1 \alpha_{2x} = -2\beta_2 z_x^3 \Gamma_4$,可得

$$\alpha_2 = -\frac{1}{3} \theta^3 \Omega_6 x + C \quad (C \text{ 为常数})$$

由上述规则 2,便可得到

$$\alpha_2 = 0 \quad (\text{取 } C = 0) \quad (17)$$

以及

$$\alpha_1 = 0 \quad (18)$$

将式(14)~(18)代入方程 $\beta_1 z_t - 6\alpha_1 \beta_1 z_x + 3\beta_{1xx} z_x + 3\beta_{1x} z_{xx} + \beta_1 z_{xxx} = \beta_1 z_x^3 \Gamma_2$ 中,可得

$$x \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\sigma}{dt} = \theta^3 \Gamma_2 \quad (19)$$

又因为 $z = \theta(t)x + \sigma(t)$,方程(19)左边是关于 x 的线性函数,因此 Γ_2 有如下形式:

$$\Gamma_2 = \bar{A}z + \bar{B}$$

式中, $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 都是常数.因此,有

$$\theta^3 (A(\theta x + \sigma) + B) = x \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\sigma}{dt}$$

比较上述方程两边 x 的系数,可得

$$\frac{d\theta}{dt} = A\theta^4 \quad (20)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \theta^3 (A\sigma + B) \quad (21)$$

式中: $A = \bar{A}$; $B = \bar{B}$; A 和 B 都是常数.

因此,得到了非线性耦合 DSSH 方程的对称约化为

$$u = \theta^3 P(z), v = \theta^4 Q(z) \quad (22)$$

将上述方程(20)~(22)代入方程(1)中,可得

$$\begin{cases} P''' + (-6P + Az + B)P' + 2AP = 0 \\ -2Q''' + (6P + Az + B)Q' + 4AQ = 0 \end{cases} \quad (23)$$

接下来考虑方程(23)的不同常数选取.

a. 当 $A = 0$ 时,可得到

$$\theta = c_1, \sigma = Bc_1^3 t + c_2$$

式中, c_1, c_2 是任意常数.

DSSH 方程的对称约化为

$$u = c_1^3 P(z), v = c_1^4 Q(z)$$

$$z = c_1 x + Bc_1^3 t + c_2$$

所对应方程(1)的约化方程为

$$\begin{cases} P''' + (-6P + B)P' = 0 \\ -2Q''' + (6P + B)Q' = 0 \end{cases} \quad (24)$$

其中, $P''' + (-6P + B)P' = 0$ 的解为椭圆积分,其形式为

$$P = \pm \int \sqrt{2P^3 - BP^2 - 2K_1 P + 2K_2} \quad (25)$$

式中, c_1, c_2 是常数.

b. 当 $A \neq 0$ 时,解方程(20)和(21),分别可得到

$$\theta = -(3At - c_1)^{-\frac{1}{3}}, \sigma = -\frac{B}{A} + c_2(3At - c_1)^{-\frac{1}{3}}$$

式中, c_1, c_2 是常数.

DSSH 方程的对称约化为

$$\begin{aligned} u &= (3At - c_1)^{-\frac{2}{3}} P(z), v = (3At - c_1)^{-\frac{4}{3}} Q(z) \\ z &= -(3At - c_1)^{-\frac{1}{3}} (x - c_2) - \frac{B}{A} \end{aligned}$$

式中, $P(z), Q(z)$ 由方程(24)决定.

对以上 CK 直接法得到的相似约化作出适当的变换,便能够得到由经典李群变换导出的相似约化.在经典李群变换中,若 Drinfeld-Sokolov-Satsuma-Hirota 方程通过如下变换具有不变性,

$$\begin{cases} \bar{x} = x + \epsilon X(x, t, u, v) \\ \bar{t} = t + \epsilon T(x, t, u, v) \\ \bar{u} = u + \epsilon U(x, t, u, v) \\ \bar{v} = v + \epsilon V(x, t, u, v) \end{cases}$$

则群不变量 $z, P(z)$ 以及 $Q(z)$ 能够通过求解以下特征方程

$$\begin{aligned} \frac{dx}{X(x, t, u, v)} &= \frac{dt}{T(x, t, u, v)} = \\ \frac{du}{U(x, t, u, v)} &= \frac{dv}{V(x, t, u, v)} \end{aligned}$$

得到.

在经典李对称中,群变换等价于

$$\begin{aligned} u &\rightarrow u + \epsilon (U(x, t, u, v) - X(x, t, u, v) u_x - \\ &\quad T(x, t, u, v) u_t) \equiv u + \epsilon \sigma^u \\ v &\rightarrow v + \epsilon (V(x, t, u, v) - X(x, t, u, v) v_x - \\ &\quad T(x, t, u, v) v_t) \equiv v + \epsilon \sigma^v \end{aligned}$$

这里 $\{\sigma^u, \sigma^v\}$ 是 Drinfeld-Sokolov-Satsuma-Hirota 方程对称方程的解

$$\begin{cases} \sigma_t^u + 6\sigma_x^u u - 6\sigma^u u_x + \sigma_{xxx}^u - 6\sigma_x^v = 0 \\ \sigma_t^v - 2\sigma_{xxx}^v + \sigma^v v_x + 6\sigma_t^v u = 0 \end{cases} \quad (26)$$

下面对应用 CK 直接法求得的式(22)进行群论

的解释^[23-24].

实际上,由已求得的式(14)可得到

$$\frac{dx}{dt} = \frac{X(x, t, u, v)}{T(x, t, u, v)} = -\frac{\theta'x + \sigma'}{\theta}$$

即

$$X(x, t, u, v) = -\frac{\theta'x + \sigma'}{\theta}T(x, t, u, v)$$

同样的方法,由 $u = \theta^3 P(z)$, $v = \theta^4 Q(z)$ 可得到

$$\frac{du}{dt} = \frac{U(x, t, u, v)}{T(x, t, u, v)} = \frac{2\theta'u}{\theta}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{V(x, t, u, v)}{T(x, t, u, v)} = \frac{4\theta'v}{\theta}$$

即

$$U(x, t, u, v) = \frac{2\theta'u}{\theta}T(x, t, u, v)$$

$$V(x, t, u, v) = \frac{4\theta'v}{\theta}T(x, t, u, v)$$

因此,方程的对称约化具有如下形式:

$$\sigma(x, t, u, v) = \begin{pmatrix} \sigma^u \\ \sigma^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} - X \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} - T \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \frac{T}{\theta} \begin{pmatrix} 2\theta'u + \theta'u_x x + \sigma'u_x - \theta u_t \\ 4\theta'v + \theta'v_x x + \sigma'v_x - \theta v_t \end{pmatrix} \quad (27)$$

若假设

$$\frac{dT}{dt} = -3A\theta^3 T, T = T(t)$$

即当 $A \neq 0$ 时 $T = \theta^3$, 当 $A = 0$ 时 $T = 1$, 式(27)求得的 σ 也是式(26)的解,也即由 CK 直接法求得的相似约化也可由经典李对称方法求得.

3 结论与展望

首先介绍了 CK 直接法求解偏微分方程的基本思想及具体步骤,并应用于 Drinfeld-Sokolov-Satsuma-Hirota 方程,得到了方程的对称约化以及其相似解.另外,比较了 CK 直接法和经典李群法的约化结果,可知 CK 直接法的结果可以推导出经典李群法的结果,即两种方法求得的结果可以互相变换.如何寻找其他类型的偏微分方程的约化结果也是今后的研究重点之一.

参考文献:

[1] CHEN Y, YAN Z Y. The Weierstrass elliptic function expansion method and its applications in nonlinear wave equations[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, 29(4): 948-964.

- [2] MATVEEV V B, SALLE M A. Darboux transformations and solitons[M]. Berlin: Springer, 1991.
- [3] HIROTA R. The direct method in soliton theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [4] ABLOWITZ M J, CLARKSON P A. Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- [5] BLUMAN G W, KUMEI S. Symmetries and differential equations: applied mathematical sciences [M]. New York: Springer, 1989.
- [6] OLVER P J. Applications of Lie groups to differential equations: graduate texts in mathematics [M]. New York: Springer, 1993.
- [7] OVSIIANNIKOV L V. Group analysis of differential equations[M]. New York: Academic Press, 1982.
- [8] IBRAGIMOV N H. CRC handbook of Lie group analysis of differential equations, volume I [M]. Boca Raton: CRC Press, 1993.
- [9] IBRAGIMOV N H. CRC handbook of Lie group analysis of differential equations, volume II [M]. Boca Raton: CRC Press, 1994.
- [10] IBRAGIMOV N H. CRC handbook of Lie group analysis of differential equations, volume III [M]. Boca Raton: CRC Press, 1995.
- [11] ADEM K R, KHALIQUE C M. Exact solutions and conservation laws of a $(2+1)$ -dimensional nonlinear KP-BBM equation[J]. Abstract and Applied Analysis, 2013, 2013: 791863.
- [12] DRINFELD V G, SOKOLOV V V. Equations of Korteweg-de Vries type and simple Lie algebras[J]. Doklady Akademii Nauk SSSR, 1981, 258: 11-16.
- [13] SATSUMA J, HIROTA R. A coupled KdV equation is one case of the four-reduction of the KP hierarchy[J]. Journal of the Physical Society of Japan, 1982, 51(10): 3390-3397.
- [14] GÜRSERES M, KARASU A. Integrable KdV systems: recursion operators of degree four[J]. Physics Letters A, 1999, 251(4): 247-249.
- [15] WAZWAZ A M. The Cole-Hopf transformation and multiple soliton solutions for the integrable sixth-order Drinfeld-Sokolov-Satsuma-Hirota equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 207(1): 248-255.
- [16] CLARKSON P A, KRUSKAL M D. New similarity reductions of the Boussinesq equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1989, 30(10): 2201-2213.

(下转第 254 页)

4 结束语

通过解析解和拟合得到的刚度公式,得到了滚珠丝杠在已知参数下的综合尺寸效应系数计算公式,与仿真结果进行比对,结果表明,其误差较小.相较于先前单纯考察丝杠某一参数的刚度的研究,本文的公式将丝杠的所有参数都包含在了计算分析的范围中,使得到的公式具有更好的准确性,且应用范围更加广.经过推广,申请了一种滚珠丝杠等效抗扭、抗拉和抗弯刚度的专利(申请号 201710232572.6),该专利所述方法计算所得的结果更精确,适用性更强.

参考文献:

- [1] 中华人民共和国国家质量监督检验检疫总局,中国国家标准化管理委员会. GB/T 17587.4-2008 滚珠丝杠副,第4部分:轴向静刚度[S]. 北京:中国标准出版社,2009.
 - [2] JAROSCH P. Zur Lebensdauerprognose zyklisch hoch belasteter Kugelgewindetriebe [M]. Buch: Shaker Verlag,2008.
 - [3] 李东君. 滚珠丝杠副轴向静刚度测试方案研究[J]. 机床与液压,2011,39(10):112-114.
 - [4] 李东君. 滚珠丝杠副轴向静刚度的分析[J]. 机械强度,2015,37(5):930-934.
 - [5] 徐凤翔. 滚珠丝杠副轴向静刚度理论分析及试验平台开发研究[D]. 南京:南京理工大学,2014.
 - [6] MESSENGER T, CARTRAUD P. Homogenization of helical beam-like structures; application to single-walled carbon nanotubes[J]. Computational Mechanics, 2008, 41(2): 335-346.
 - [7] DADALAU A, MOTTAHEDI M, GROH K, et al. Parametric modeling of ball screw spindles [J]. Production Engineering, 2010, 4(6): 625-631.
 - [8] ANSYS Inc. PDF documentation for release 15.0[DB/OL]. [2016-08-29]. 148. 204. 81. 206/ANSYS/readme.html.
 - [9] Bosch Rexroth Inc. Precision ball screw assemblies R310EN 3301 [DB/OL]. [2008-07-01]. <http://www.rexroth-kbh.com/pdf/BALLSCREW.pdf>.
 - [10] AITCHISON J, BROWN J A C. The lognormal distribution[M]. Cambridgeshire: CUP Archive, 1976.
(编辑:石 瑛)
-
- (上接第 209 页)
- [17] CLARKSON P A. New similarity solutions for the modified Boussinesq equation[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1989, 22(13): 2355-2367.
 - [18] CLARKSON P A. New similarity reductions and Painlevé analysis for the symmetric regularised long wave and modified Benjamin-Bona-Mahoney equations [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1989, 22(18): 3821-3848.
 - [19] CLARKSON P A, LUDLOW D K. Symmetry reductions, exact solutions, and Painlevé analysis for a generalized Boussinesq equation [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1994, 186(1): 132-155.
 - [20] CLARKSON P A. Nonclassical symmetry reductions of the Boussinesq equation [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 1995, 5(12): 2261-2301.
 - [21] CLARKSON P A, MANSFIELD E L, PRIESTLEY T J. Symmetries of a class of nonlinear third-order partial differential equations[J]. Mathematical and Computer Modelling, 1997, 25(8/9): 195-212.
 - [22] BLUMAN G W, COLE J D. Similarity methods for differential equations: applied mathematical sciences [M]. New York: Springer, 1974.
 - [23] MAN J. Similarity reductions and Painlevé property of coupled KdV equations [J]. Communications in Theoretical Physics, 2008, 49(2): 275-280.
 - [24] ADEM K R, KHALIQUE M. On the solutions and conservation laws of the coupled Drinfeld-Sokolov-Satsuma-Hirota system[J]. Boundary Value Problems, 2014, 2014: 248.
(编辑:董 伟)