

滚珠丝杠等效刚度解析表达研究

王曜宇, 胡育佳

(上海理工大学 机械工程学院, 上海 200093)

摘要: 为了得到精准的滚珠丝杠等效抗拉及抗扭刚度的计算公式,对一种丝杠刚度的计算方法进行了研究.通过理论推导、数值仿真和基于修正的二维对数正态分布的密度函数拟合得到了考虑不同参数的滚珠丝杠的抗弯和抗拉刚度的解析表达式.对比公式计算结果和有限元仿真结果,可以发现本文的刚度表达公式具有更强的通用性和计算精度.

关键词: 滚珠丝杠; 刚度; 对数正态分布

中图分类号: TH 114 **文献标志码:** A

Analytical Expressions for the Equivalent Stiffnesses of Ball Screws

WANG Yaoyu, HU Yujia

(School of Mechanical Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: To obtain the analytical expressions for a ball screw's axial and torsional stiffnesses and guarantee their high precision, a new method was proposed to calculate the ball screw's stiffnesses. Using the theoretical derivation, the finite element method analysis and the fitting of a modified density function with lognormal distribution, the analytical expressions of stiffnesses considering different parameters were provided. Comparing the data obtained by the expressions with the finite element method results, it is shown that the expressions proposed are of much better generality and accuracy.

Keywords: ball screw; stiffnesses; lognormal distribution

滚珠丝杠是将回转运动转化成直线运动的产品,它具有低摩擦、高精度及运动可逆性等优点,在工业设备和精密仪器传动中被广泛使用.在丝杠进给系统的研究中,丝杠的抗拉刚度和抗扭刚度是重要的参数,直接影响到进给系统的定位精度以及静、动力学性能.然而,关于丝杠刚度的计算方法,国家

标准 GB/T 17587.4—2008^[1] 以及一些已发表的研究结果仍旧存在不足.在国标 GB/T 17587.4—2008 中,抗拉刚度计算时只考虑丝杠沟槽与滚珠接触点的半径,忽略了沟槽深度及接触半径外侧材料对刚度的影响.Jarosch^[2] 将丝杠简化成直径与丝杠外径相同的圆柱体,并未考虑到沟槽对刚度的削弱作用.

收稿日期: 2016-09-29

第一作者: 王曜宇(1991-),男,硕士研究生.研究方向:参数辨识. E-mail: shineyao0221@163.com

通信作者: 胡育佳(1979-),男,副教授.研究方向:固体力学、计算力学. E-mail: huyujia@126.com

李东君^[3]设计了丝杠抗拉刚度的实验方案,并在理论分析的基础上,将理论计算与实验进行了比对^[4].徐凤翔^[5]对抗拉刚度进行了理论分析及实验方案设计,搭建了抗拉刚度测试平台. Messenger 等^[6]通过均质化理论分析了螺旋状物体的刚度. Dadalau 等^[7]研究了丝杠刚度与导程之间的联系,但未将沟槽和丝杠内径、外径对刚度的影响加入讨论范围.

本文建立的滚珠丝杠刚度通用的解析表达式,综合考虑滚珠丝杠外径、内径、沟槽直径、导程等的影响.首先在极坐标系下推导了等截面(截面形状为滚珠丝杠横截面)梁刚度的解析表达式.通过引入尺寸效应系数、修正的二维对数正态分布的密度函数和大量的有限元仿真计算结果,并考虑极限条件的影响,最终拟合得到了考虑不同参数的滚珠丝杠的抗弯和抗拉刚度的解析表达.对比公式计算结果和有限元仿真结果,可以发现,本文的刚度表达公式具有较高的计算精度,相比已有方法更具通用性.

1 滚珠丝杠的几何特征及模型建立

滚珠丝杠的几何形状主要由以下几个参数决

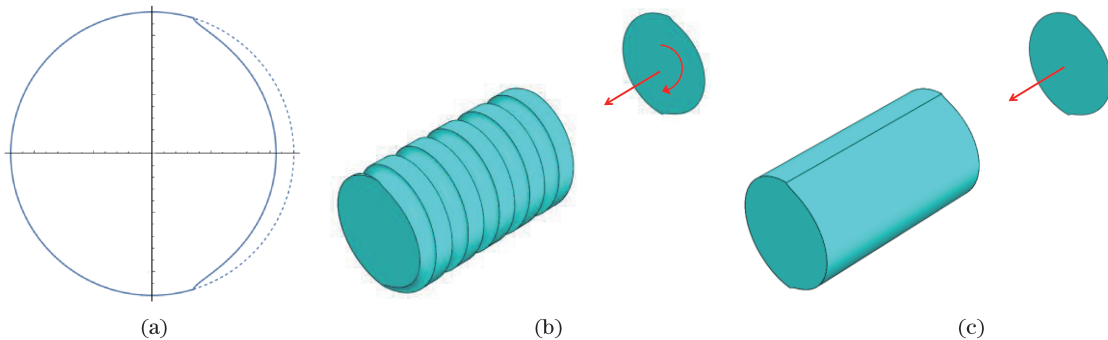


图2 丝杠横截面视图及建模过程

Fig.2 Screw's sectional view and its modeling procedure

为了获得滚珠丝杠的等效刚度公式,通过计算图 2(c)中丝杠截面在等截面梁的情况下的抗扭刚度 GI_ρ 和抗拉刚度 EA ,再引入尺寸效应系数 $f(d_1, d_2, d_w, P_h)$ 和 $g(d_1, d_2, d_w, P_h)$,最终得到滚珠丝杠的等效抗扭刚度 $(GI_\rho)_{eq}$ 以及等效抗拉刚度 $(EA_\rho)_{eq}$:

$$(GI_\rho)_{eq} = GI_\rho f(d_1, d_2, d_w, P_h)$$

$$(EA_\rho)_{eq} = EA g(d_1, d_2, d_w, P_h)$$

式中: G 和 E 分别为材料的剪切模量和弹性模量; I_ρ 为等截面梁的极惯性矩; A 为横截面面积; f, g 为尺寸效应系数,是与丝杠外径 d_1 、内径 d_2 、球径

定: 外径 d_1 、内径 d_2 、沟槽直径 d_g 、导程 P_h 和螺纹数 n . 沟槽直径可以通过它与滚珠直径之间的关系式^[6]来确定, $d_g = 1.08d_w$, 导程 P_h 是螺纹数 n 与螺距 P 的乘积. 本文考察的丝杠样本的螺纹数 n 为 1, 因此, 丝杠导程等于它的螺距, 图 1 是丝杠的参数示意图, α 为螺纹的升角.

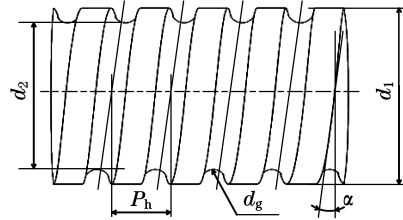


图1 滚珠丝杠模型

Fig.1 Model of a ball screw

丝杠横截面如图 2(a)所示,为去除一月牙形的类圆截面.丝杠的分析模型可以看成丝杠在其横截面沿法线方向拉伸的基础上,额外附加一个绕轴心 O 的旋转(图 2(b)).由于丝杠参数较多且形状复杂,因此,获得丝杠的刚度解析表达式十分困难,甚至不可实现.为了简化问题,引入等截面梁作为一个研究对象,即将横截面沿着法线方向拉伸(图 2(c)).

d_w 和导程 P_h 相关的函数.

2 等截面梁的刚度计算

在极坐标系中,将图 2(a)中的丝杠横截面分为两部分进行考虑.如图 3(a)所示,左侧区域为一标准扇形,其极矩 $\rho = \frac{1}{2}d_1$,极角区间为 $[\varphi, 2\pi - \varphi]$,面积和极惯性矩分别为 A_1 和 I_1 ,极角中的 φ 为未知量,其大小与丝杠参数有关;右侧区域由钟形曲线和两直线包围而成,钟形曲线的极矩为 $\rho(\theta)$, θ 为极角,最大值 $\rho(\theta)_{max}$ 为 $d_1/2$,最小值 $\rho(\theta)_{min}$ 为

$d_2/2$, 极角区间为 $[-\varphi, \varphi]$, 面积和极惯性矩分别为 A_2 和 I_2 . 对于已知表达式和积分区间的平面, 它的面积和极惯性矩可以通过 $A = \frac{1}{2} \int \rho^2 d\theta$, $I_\rho = \frac{1}{4} \int \rho^4 d\theta$ 求得.

假设将一直径为 d_g 、导程为 P_h 的螺旋体紧贴着沟槽缠绕在丝杠上, 再将丝杠按图 3(b) 所示的方向剖开, 得到图 3(c), 红色线条为丝杠横截面在

剖视图上的投影. 图中椭圆形区域为螺旋体的剖面, 结合 d_g 和滚珠丝杠的升角可以推导出椭圆的解析表达式; 连接椭圆圆心和椭圆与丝杠横截面的交点, 该连线与丝杠横截面形成的夹角为 β . 当 $\theta = 0$ 时, $\rho(\theta)$ 为 $d_2/2$, β 和 Δh 均为 0; 当 $\theta = \varphi$ 时, $\rho(\theta)$ 为 $d_1/2$, 通过图 3(c) 可以得到 Δh , $\rho(\theta)$ 和椭圆之间的尺寸关联, 进而可以得到 φ 和 $\rho(\theta)$ 的表达式.

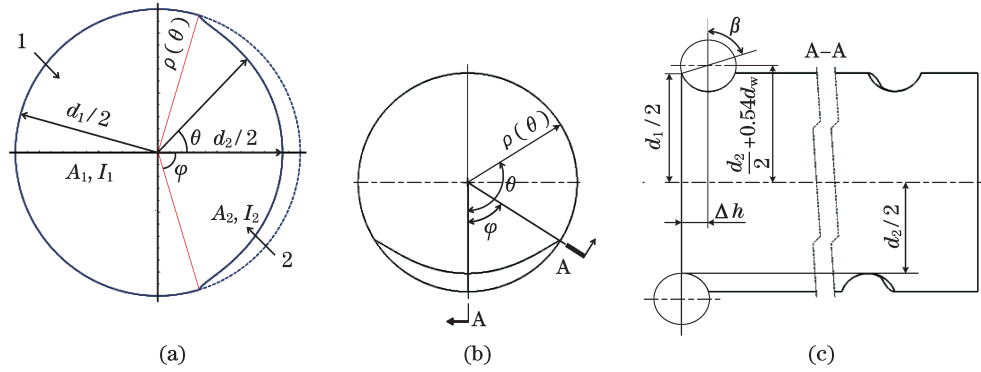


图3 滚珠丝杠截面及参数说明

Fig.3 Sectional view of the ball screw and the explanation of parameters

滚珠丝杠的升角

$$\alpha = \arctan \left[\frac{P_h}{\pi(d_2 + d_g)} \right]$$

当 $\rho(\theta)$ 转过角度 θ ,

$$\Delta h = \theta \frac{d_2 + d_g}{2} \tan \alpha = \frac{\theta P_h}{2\pi}$$

当 $\theta = \varphi$ 时,

$$\beta = \arccos \left(\frac{d_2 + d_g - d_1}{d_g} \right)$$

通过图 3(c) 中的尺寸关联, 可以得到

$$\varphi = \frac{\pi d_g \sin \beta}{P_h \cos \alpha}$$

同时也可以根据尺寸关联推得 $\rho(\theta)$ 的表达式为

$$\rho(\theta) = \frac{d_2 + d_g}{2} - \frac{d_g}{2} \cos \left[\arcsin \left(\frac{P_h \cos \alpha}{\pi d_g} \theta \right) \right],$$

$$\theta \in [-\varphi, \varphi]$$

有了钟形曲线的表达式和区间, 便可对截面两块区域的面积和极惯性矩分别进行计算, 区域 1 的面积和极惯性矩为

$$A_1 = \frac{d_1^2}{4} (\pi - k_4)$$

$$I_1 = \frac{d_1^4}{32} (\pi - k_4)$$

区域 2 的面积 A_2 和极惯性矩 I_2 通过积分后可以得到.

$$\begin{aligned} A_2 &= 2 \int_0^{\varphi} \frac{\rho^2}{2} d\theta = k_1^2 k_4 - \frac{1}{3} k_2^2 k_4 (-3 + k_5^2) - \\ &\quad \frac{k_1 k_2}{k_3} (\beta + k_5 \sqrt{1 - k_5^2}) \\ I_2 &= 2 \int_0^{\varphi} \frac{\rho^4}{4} d\theta = \frac{1}{60 k_3} \{ -60 k_1^2 k_2^2 k_5 (-3 + k_5^2) + \\ &\quad 2 k_2^4 k_5 (15 - 10 k_5^3 + 3 k_5^4) + 30 k_1^4 k_5 - \\ &\quad 60 k_1^3 k_2 (\beta + k_5 \sqrt{1 - k_5^2}) - \\ &\quad 15 k_1 k_2^3 [3\beta + k_5 (5 - 2 k_5^2) \sqrt{1 - k_5^2}] \} \end{aligned}$$

其中

$$k_1 = \frac{d_2}{2} + \frac{d_g}{2}, \quad k_2 = \frac{d_g}{2},$$

$$k_3 = \frac{L_a \cos \alpha}{\pi d_g}, \quad k_4 = \frac{\sin \beta}{k_3}, \quad k_5 = \sin \beta$$

将式(8)~(11)进行整理后, 便可得到丝杠截面在等截面梁情况下的极惯性矩 I_ρ 和面积 A .

$$I_\rho = I_1 + I_2, \quad A = A_1 + A_2$$

3 尺寸效应系数的计算

3.1 尺寸效应系数的仿真计算

通过有限元仿真计算, 可以得到给定参数的丝杠样本的等效刚度的数值, 将数值结果与等截面情况下的计算结果进行比对, 即可得到尺寸效应系数.

为了提高样本计算效率,本文使用 APDL 语言^[8]编写了宏文件,实现了样本的建模、加载和计算参数化.在比对不同的计算结果后,得到丝杠的惯性矩 I_y, I_z 与极惯性矩 I_ρ 存在以下的近似关系:

$$I_y \approx I_z \approx \frac{1}{2} I_\rho$$

为了得到更准确的计算结果和较高的计算效率,选取了某一型号的丝杠作为研究对象,它的尺寸参数为:外径 39 mm,内径 36.4 mm,球径 3.5 mm.通过改变丝杠模型的长度,观察计算结果的变化规律,如图 4 所示,最终选取 $10P_h$ 作为丝杠样本的建模长度.在该长度下,计算结果已经趋近于一个稳定的数值,且计算效率较高.

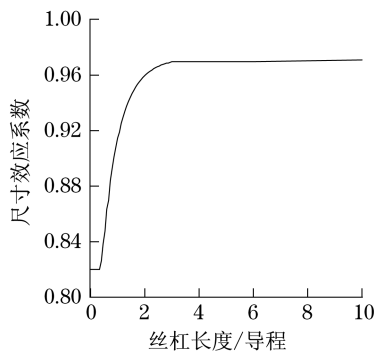


图 4 尺寸效应系数与丝杠样本长度的变化关系

Fig.4 Relationship between the ball screw's length and size-effect coefficient

3.2 考虑导程和球径的尺寸效应系数的研究

为了研究尺寸效应系数在丝杠内径、外径不变时的变化规律,选取某一型号丝杠作为样本,丝杠的参数^[9]如表 1 所示. p 为螺距, d_0 为公称直径.

表 1 丝杠样本参数表

Tab.1 Parameters of ball screw

d_0/mm	p/mm	n	d_1/mm	d_2/mm	d_w/mm
40	10	1	38	33.8	6

计算样本时,将 d_w/d_1 和 P_h/d_1 作为自变量,抗扭刚度的尺寸效应系数 f 的倒数作为因变量, d_w/d_1 的变化范围为 0.10~0.25, P_h/d_1 的变化范围为 0.12~1.50. 计算了 150 组样本,得到相对应的效应系数,并绘制得到了 $1/f(d_1, d_w, P_h)$ 分布图.

从图 5 可以看出,效应系数倒数的分布符合二维对数正态分布的密度函数^[10]. 对标准的二维对数正态分布进行修正,并给定表达式:

$$\frac{1}{f(d_1, d_w, P_h)} = 1 + a_1 \exp \left\{ -b_1 \cdot \left[\ln \left(\frac{d_w}{d_1} \right) - c_1 \right]^2 - d_1 \left[\ln \left(\frac{P_h}{d_1} \right) - e_1 \right]^2 \right\}$$

上式的形式满足边界条件:当 d_w/d_1 趋近于 0 或 $+\infty$ 时,丝杠的截面呈圆形,此时,尺寸效应系数 $f(d_1, d_w, P_h) = 1$; 当 P_h/d_1 趋近于 0 时,丝杠截面也呈现圆形,因此, $f(d_1, d_w, P_h) = 1$, 当其趋向于 $+\infty$ 时,可以看作是直线拉伸,此时, $f(d_1, d_w, P_h) = 1$. 将计算结果及表达式导入到 1stopt 软件中进行拟合,得到的结果如表 2 所示.

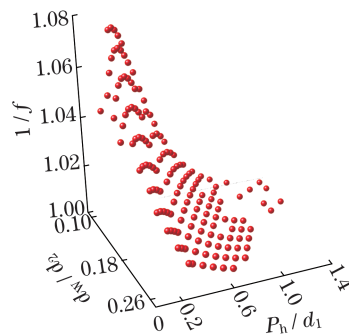


图 5 考虑导程和球径的尺寸效应系数分布图

Fig.5 Specific equivalent coefficient's distribution of the torsional stiffness

表 2 抗拉刚度的尺寸效应系数拟合结果

Tab.2 Fitted results of the size-effect coefficient of the axial stiffness

a_1	b_1	c_1	d_1	e_1	R^2
0.076 7	2.641 7	-2.330 7	1.179 3	-1.349 9	0.956 0

该次拟合判定系数为 0.956,拟合的结果十分良好.通过该样本可以看出,在丝杠内径、外径固定不变的情况下,丝杠的效应系数分布十分贴近修正后的二维对数正态分布的密度函数.对于等效抗拉刚度的尺寸效应系数 $g(d_1, d_w, P_h)$,本文假定其分布也类似抗扭刚度的效应系数分布形式.

3.3 综合尺寸效应系数的研究

前面得到的尺寸效应系数公式仅适用于表 1 的丝杠样本,对于不同型号的丝杠样本,它们本身的内径、外径也会发生变化.为了获得适用范围更广的等效系数公式,需要对更多不同型号的丝杠样本进行计算.本文将 10 组不同参数的丝杠样本进行了建模计算,得到 $1/f(d_1, d_2, d_w, P_h)$ 的分布,如图 6(a) 所示.

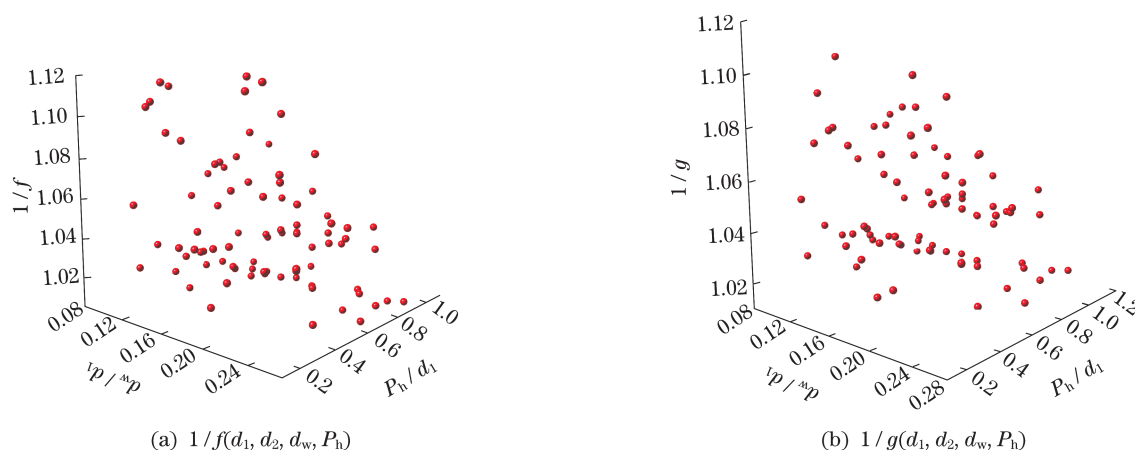


图6 通用的抗弯和抗拉刚度的尺寸效应系数分布图

Fig.6 General size-effect coefficient's distribution of the torsional and axial stiffness

由图4可知,单一丝杠的分布规律符合二维对数正态分布的密度函数,因此,可以将该分布看作是不同的丝杠的分布趋势的混叠.在这里引入变量 d_2/d_1 ,对式(14)进行修正,得到新的表达式:

$$\frac{1}{f(d_1, d_2, d_w, P_h)} = 1 + a_1 \left(1 - f_1 \frac{d_2}{d_1} \right) \cdot \exp \left\{ -b_1 \left[\ln \left(\frac{d_w}{d_1} \right) - c_1 \right]^2 - d_1 \left[\ln \left(\frac{P_h}{d_1} \right) - e_1 \right]^2 \right\}$$

将计算数据导入软件进行拟合,得到了新的拟合结果,各系数的值以及综合判定系数在表3中列出.

表3 抗扭刚度公式拟合结果

Tab.3 Fitted results of the general size-effect coefficient of the torsional stiffness

a_1	b_1	c_1	d_1	e_1	f_1	R^2
1.951 5	0.850 0	-2.631 7	0.593 7	-1.518 1	1.069 4	0.955 5

抗拉刚度的系数分布图如图6(b)所示,其分布的函数形式为

$$\frac{1}{g(d_1, d_2, d_w, P_h)} = 1 + a_A \left(1 - f_1 \frac{d_2}{d_1} \right) \cdot \exp \left\{ -b_A \left[\ln \left(\frac{d_w}{d_1} \right) - c_A \right]^2 - d_A \left[\ln \left(\frac{P_h}{d_1} \right) - e_A \right]^2 \right\}$$

将计算得到的结果导入软件进行拟合,可以得到表4.

对拟合后得到的式(15)和式(16)取倒数,便可

得到滚珠丝杠的抗扭刚度的尺寸效应系数 $f(d_1, d_2, d_w, P_h)$ 和抗拉刚度的尺寸效应系数 $g(d_1, d_2, d_w, P_h)$ 的公式,再通过式(1)便可得到丝杠的等效抗扭刚度和等效抗拉刚度.通过计算丝杠样本刚度得到仿真解,并将拟合所得公式计算的系数与仿真所得系数进行对比,得到了图7.

表4 抗拉刚度公式拟合结果

Tab.4 Fitted results of the general size-effect coefficient of the axial stiffness

a_A	b_A	c_A	d_A	e_A	f_A	R^2
1.257 6	0.111 7	-2.864 0	0.428 0	-1.240 4	1.053 5	0.964 1

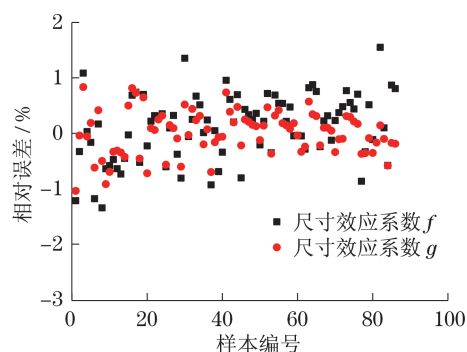


图7 拟合公式所得系数与仿真所得系数的误差对比

Fig.7 Comparison of relative errors between the size-effect coefficients obtained by the fitted expression and the simulation

通过图7可以看出,绝大多数样本的误差均在2%以内,通过综合尺寸效应系数计算得到的结果具有较高的精确性.

4 结束语

通过解析解和拟合得到的刚度公式,得到了滚珠丝杠在已知参数下的综合尺寸效应系数计算公式,与仿真结果进行比对,结果表明,其误差较小.相较于先前单纯考察丝杠某一参数的刚度的研究,本文的公式将丝杠的所有参数都包含在了计算分析的范围中,使得到的公式具有更好的准确性,且应用范围更加广.经过推广,申请了一种滚珠丝杠等效抗扭、抗拉和抗弯刚度的专利(申请号 201710232572.6),该专利所述方法计算所得的结果更精确,适用性更强.

参考文献:

- [1] 中华人民共和国国家质量监督检验检疫总局,中国国家标准化管理委员会. GB/T 17587.4-2008 滚珠丝杠副,第4部分:轴向静刚度[S]. 北京:中国标准出版社,2009.
 - [2] JAROSCH P. Zur Lebensdauerprognose zyklisch hoch belasteter Kugelgewindetriebe [M]. Buch: Shaker Verlag,2008.
 - [3] 李东君. 滚珠丝杠副轴向静刚度测试方案研究[J]. 机床与液压,2011,39(10):112-114.
 - [4] 李东君. 滚珠丝杠副轴向静刚度的分析[J]. 机械强度,2015,37(5):930-934.
 - [5] 徐凤翔. 滚珠丝杠副轴向静刚度理论分析及试验平台开发研究[D]. 南京:南京理工大学,2014.
 - [6] MESSENGER T, CARTRAUD P. Homogenization of helical beam-like structures; application to single-walled carbon nanotubes[J]. Computational Mechanics, 2008, 41(2): 335-346.
 - [7] DADALAU A, MOTTAHEDI M, GROH K, et al. Parametric modeling of ball screw spindles [J]. Production Engineering, 2010, 4(6): 625-631.
 - [8] ANSYS Inc. PDF documentation for release 15.0[DB/OL]. [2016-08-29]. 148. 204. 81. 206/ANSYS/readme.html.
 - [9] Bosch Rexroth Inc. Precision ball screw assemblies R310EN 3301 [DB/OL]. [2008-07-01]. <http://www.rexroth-kbh.com/pdf/BALLSCREW.pdf>.
 - [10] AITCHISON J, BROWN J A C. The lognormal distribution[M]. Cambridgeshire: CUP Archive, 1976.
(编辑:石 瑛)
-
- (上接第 209 页)
- [17] CLARKSON P A. New similarity solutions for the modified Boussinesq equation[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1989, 22(13): 2355-2367.
 - [18] CLARKSON P A. New similarity reductions and Painlevé analysis for the symmetric regularised long wave and modified Benjamin-Bona-Mahoney equations [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1989, 22(18): 3821-3848.
 - [19] CLARKSON P A, LUDLOW D K. Symmetry reductions, exact solutions, and Painlevé analysis for a generalized Boussinesq equation [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1994, 186(1): 132-155.
 - [20] CLARKSON P A. Nonclassical symmetry reductions of the Boussinesq equation [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 1995, 5(12): 2261-2301.
 - [21] CLARKSON P A, MANSFIELD E L, PRIESTLEY T J. Symmetries of a class of nonlinear third-order partial differential equations[J]. Mathematical and Computer Modelling, 1997, 25(8/9): 195-212.
 - [22] BLUMAN G W, COLE J D. Similarity methods for differential equations: applied mathematical sciences [M]. New York: Springer, 1974.
 - [23] MAN J. Similarity reductions and Painlevé property of coupled KdV equations [J]. Communications in Theoretical Physics, 2008, 49(2): 275-280.
 - [24] ADEM K R, KHALIQUE M. On the solutions and conservation laws of the coupled Drinfeld-Sokolov-Satsuma-Hirota system[J]. Boundary Value Problems, 2014, 2014: 248.
(编辑:董 伟)