

涉及实零点的亚纯函数的 Picard 型定理 II

赵海燕, 刘晓俊

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 利用亚纯函数的值分布理论和正规族理论的基本知识、研究方法及研究成果, 在徐成雨、刘晓俊的一个定理基础上进一步考虑例外函数是有理函数的情况, 得到了如下定理: 设 f 为复平面 C 上的超越亚纯函数, 若存在 $M \geq 0$, 使 f 满足: $f = 0 \Rightarrow |z^2 f'| \leq M$; f 的零点均为实数; f 的极点重级至少为 3, 则 $f' - \frac{1}{z^2}$ 有无穷多个零点.

关键词: 超越亚纯函数; 实零点; Picard 型定理; 正规族

中图分类号: O 174.52 **文献标志码:** A

Picard Theorem II of Meromorphic Functions with Real Zeros

ZHAO Haiyan, LIU Xiaojun

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: By using some fundamental knowledge, research methods and research results about the theories of value distribution and normal family for meromorphic functions and based on one result of Xu Chengyu, Liu Xiaojun's theorem, and by further considering the condition that the exceptional function is a rational function, the following result was achieved: let f be a transcendental meromorphic function on C , if there exists $M \geq 0$ such that for f , $f = 0 \Rightarrow |z^2 f'| \leq M$, all zeros of f are real zeros and all of whose poles have multiplicity at least 3, then $f' - \frac{1}{z^2}$ has infinite number of zeros.

Keywords: transcendental meromorphic function; real zeros; Picard theorem; normal family

1 问题的提出

1959 年, Hayman^[1] 证明了如下的 Picard 型

定理:

定理 1 设 f 是复平面 C 上的亚纯函数, $k \in \mathbb{N}^+$, 若 $f \neq 0$, 且 $f^{(k)} \neq 1$, 则 $f \equiv \text{常数}$.

1979 年, 顾永兴^[2] 证明了对应的正规规则:

定理 2 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的亚纯函数族, $k \in$

收稿日期: 2016-11-15

基金项目: 国家自然科学基金青年基金资助项目(11401381)

第一作者: 赵海燕(1990-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 复分析. E-mail: 919004902@qq.com

通信作者: 刘晓俊(1982-), 男, 副教授. 研究方向: 复分析. E-mail: xiaojunliu2007@hotmail.com

$\mathbb{N}^+$, 若对任意 $f \in \mathcal{F}, f \neq 0$, 且 $f^{(k)} \neq 1$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

2013 年, 童晓丽等^[3]从另一方面将定理 2 中的限制条件“ $f \neq 0$ ”减弱为“ f 的零点分布在一条直线上”, 得到定理 3.

定理 3 设 $\mathcal{F}$ 是定义在单位圆盘 D 上的亚纯函数族, 若存在 $M \geq 0$, 使得对任意的 $f \in \mathcal{F}$, 有:

- $f = 0 \Rightarrow |f'| \leq M$;
- f 的零点分布在一直线上;
- f 的极点重级 $m \geq 3$;
- $f' \neq 1$.

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规.

2015 年, 洪苏敏等^[4]又将定理 3 中的条件“ $f' \neq 1$ ”改为“ $f' \neq z^d$ ”, 得到定理 4.

定理 4 设 $d \in \mathbb{N}^+$, $\mathcal{F}$ 是定义在单位圆盘 D 上的亚纯函数族, 若存在 $M \geq 0$, 使得对任意的 $f \in \mathcal{F}$, 有:

- $f = 0 \Rightarrow |f'| \leq M |z^d|$;
- f 的零点分布在一直线上;
- f 的极点重级 $m \geq 3$;
- $f' \neq z^d$.

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规.

2003 年, Bergweiler 等^[5]将定理 1 中的条件“ $f(z) \neq 0$ ”减弱为“ f 的零点和极点除有限多个外都是重级的”, 并把例外值推广到“不恒为零的有理函数”, 得到定理 5.

定理 5 设 f 是一个超越亚纯函数, R 是一个有理函数, 且 $R \neq 0$, f 的零点和极点除有限多个外都是重级的, 则 $f' - R$ 有无穷多个零点.

2016 年, 徐成雨等^[6]在定理 5 的基础上, 把“ f 的零点是重级的”减弱为“ f 只有实零点”, 得到了例外函数是多项式的 Picard 型定理 6.

定理 6 设 $d \in \mathbb{N}^+$, f 是复平面 C 上的超越亚纯函数, 若存在 $M \geq 0$, 使 f 满足:

- $f = 0 \Rightarrow |f'| \leq M |z^d|$;
- f 的零点均为实数;
- f 的极点重级至少为 3.

则 $f' - z^d$ 有无穷多个零点.

本文在定理 6 的基础上进一步考虑例外函数是有理函数的情况, 得到定理 7.

定理 7 设 f 是复平面 C 上的超越亚纯函数, 若存在 $M \geq 0$, 使 f 满足:

- $f = 0 \Rightarrow |z^2 f'| \leq M$;
- f 的零点均为实数;

c. f 的极点重级至少为 3.

则 $f' - \frac{1}{z^2}$ 有无穷多个零点, 并得到相应的正规定则定理 8.

定理 8 设 $\mathcal{F}$ 是定义在单位圆盘 Δ 上的亚纯函数族, 若存在 $M > 0$, 使得对任意的 $f \in \mathcal{F}$, 有

- $f = 0 \Rightarrow |z^2 f'| \leq M$;
- f 的零点均为实数;
- f 的极点重级至少为 3;
- $f' \neq \frac{1}{z^2}$.

则 $\mathcal{F}$ 在 Δ 上正规.

2 主要引理

引理 1 (Pang-Zalcman 引理)^[7-8] 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 上的亚纯函数族, 零点重级至少为 $k (\geq 1)$, 存在 $A (\geq 1)$ 使得对任意的 $f \in \mathcal{F}$, 当 $f = 0$ 时, 必有 $|f^{(k)}(z)| \leq A$. 若 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处不正规, 那么对每一个 $\alpha, 0 \leq \alpha \leq k$, 必存在

- 点列 $z_n \rightarrow z_0$;
- 函数列 $f_n \in \mathcal{F}$;
- 正数列 $\rho_n \rightarrow 0^+$.

使得 $g_n(\zeta) = \rho_n^{-\alpha} f_n(z_n + \rho_n \zeta) \rightarrow g(\zeta)$, 这里 $g(\zeta)$ 是非常值有穷级亚纯函数, 并且满足 $g^\#(\zeta) \leq g^\#(0) = kA + 1$.

定义 1^[5] 设 g 是定义在复平面 C 上的亚纯函数, 如果当 $|z| \rightarrow \infty$ 时, 有 $g^\#(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$, 则称 g 为 Julia 例外函数.

由 Ahlfors-Shimizu 特征函数^[8-9]的表达式可知, 若 g 为 Julia 例外函数, 则当 $r \rightarrow \infty$ 时有 $T(r, g) = O((\log r)^2)$.

引理 2^[5] 设 g 是一个亚纯函数, 但不是 Julia 例外函数, 则存在 C 上的点列 $\{a_n\}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $a_n \rightarrow \infty, g(a_n) \rightarrow 0, a_n g'(a_n) \rightarrow \infty$.

引理 3^[5,10] 超越 Julia 例外函数没有渐近值.

引理 4^[11] 设 $\mathcal{F} = \{f_n\}$ 为单位圆盘 Δ 上的亚纯函数族, $k \in \mathbb{N}^+, \{b_n\}$ 是 Δ 上的全纯函数列, 且在 Δ 上, $b_n \Rightarrow 1$, 若 $f_n(z) \neq 0, f_n'(z) \neq \frac{b_n(z)}{z^k}$, $z \in \Delta$, 则 $\mathcal{F}$ 在 Δ 上正规.

引理 5^[5] 设 f 为超越亚纯函数, R 是一个有理函数, 满足: 当 $z \rightarrow \infty$ 时, $R(z) \sim cz^d$, 这里 $c \in C \setminus \{0\}$,

$d \in \mathbb{Z}$. 若 $f' - R$ 仅有有限多个零点, 且 $r \rightarrow \infty$ 时,
 $T(r, f) = O((\log r)^2)$, 令 $g(z) := \frac{f(z)}{z^{d+1}}$, 当 $d =$
 -1 时, $g := f$, 则 g 有一个渐近值.

引理 6^[11-12] 设 f 为非多项式有理函数, 且对任意的 $z \in C$, $f'(z) \neq 1$, 则 $f(z) = z + c + \frac{a}{(z+b)^m}$, 这里 $a (\neq 0)$, b, c 为常数, m 为正整数, 若 f 的零点为重级零点, 则 $m = 1$.

3 定理 7 的证明

假设 $f' - \frac{1}{z^2}$ 只有有限多个零点. 令 $g(z) = zf(z)$, 假设 $g(z)$ 是 Julia 例外函数, 则当 $r \rightarrow \infty$ 时有, $T(r, g) = O((\log r)^2)$, 从而有 $T(r, f) = O((\log r)^2)$. 由引理 5 知 $g(z)$ 有一个渐近值, 这与引理 3 矛盾, 故 $g(z)$ 不是 Julia 例外函数.

故由引理 2 知, 存在点列 $\{a_n\}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $a_n \rightarrow \infty, g(a_n) \rightarrow 0, a_n g'(a_n) \rightarrow \infty$, 从而有 $a_n f(a_n) = g(a_n) \rightarrow 0, a_n^2 f'(a_n) = a_n g'(a_n) - a_n f(a_n) \rightarrow \infty$. 设 $a_n = x_n + iy_n$, 下面分两种情形讨论.

情形 1 假设 $x_n \rightarrow x_0 \in R, y_n \rightarrow \infty$.

令 $f_n(z) = iy_n f(iy_n z)$, 则对充分大的 n , 有:

a. $f_n(z)$ 在 $|z-1| < \frac{1}{2}$ 内没有零点; b. $f'_n(z) \neq \frac{1}{z^2}$, 由引理 4 知 $\{f_n(z)\}$ 在 $\Delta(1, \frac{1}{2})$ 内正规, 故 $\{f_n(z)\}$ 在 $z=1$ 处正规.

又因为

$$f_n \left(1 - i \frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{a_n f(a_n)}{1 - i \frac{x_n}{y_n}} \rightarrow 0$$

$$f'_n \left(1 - i \frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{a_n^2 f'(a_n)}{\left(1 - i \frac{x_n}{y_n} \right)^2} \rightarrow \infty$$

故

$$f_n^\# \left(1 - i \frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{\left| f'_n \left(1 - i \frac{x_n}{y_n} \right) \right|}{1 + \left| f_n \left(1 - i \frac{x_n}{y_n} \right) \right|^2} \rightarrow \infty$$

又由于当 $n \rightarrow \infty$ 时, $1 - i \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 1$, 由 Marty 正规定则知, $\{f_n(z)\}$ 在 $z=1$ 处不正规, 矛盾.

情形 2 $x_n \rightarrow \infty$, 下面再分两种情形讨论.

情形 2.1 $\frac{y_n}{x_n} \rightarrow \infty$

令 $f_n(z) = iy_n f(iy_n z)$, 处理方法如上, 同样可

得出矛盾.

情形 2.2 $\frac{y_n}{x_n} \rightarrow c (c \neq \infty)$

令 $f_n(z) = x_n f\left(-\frac{x_n}{z}\right)$, 设 $f_n(z) = 0$, 则

$f\left(-\frac{x_n}{z}\right) = 0$. 由定理 7 中的条件可知

$\left| \left(-\frac{x_n}{z}\right)^2 f'\left(-\frac{x_n}{z}\right) \right| \leq M$, 则有 $f_n(z) = 0 \Rightarrow$

$|f'_n(z)| = \left| \frac{x_n^2}{z^2} f'\left(-\frac{x_n}{z}\right) \right| \leq M$. 故有: a.

$f_n(z) = 0 \Rightarrow |f'_n(z)| \leq M$, 由定理条件知

$f'\left(-\frac{x_n}{z}\right) \neq \left(\frac{z}{x_n}\right)^2$, 从而 $f'_n(z) = \frac{x_n^2}{z^2} f'\left(-\frac{x_n}{z}\right) \neq 1$;

b. $f'_n(z) \neq 1$; c. $f_n(z)$ 只有实零点, 即 $f_n(z)$ 的零

点在一根直线上; d. $f_n(z)$ 的极点重级至少为 3. 故由

定理 3 可知 $\{f_n(z)\}$ 在 $\Delta\left(-\frac{1}{1+ic}, \frac{1}{2}\right)$ 内正规, 故

$\{f_n(z)\}$ 在 $z = -\frac{1}{1+ic}$ 处正规.

又因为

$$f_n \left(-\frac{1}{1+i\frac{y_n}{x_n}} \right) = \frac{a_n f(a_n)}{1+i\frac{y_n}{x_n}} \rightarrow 0$$

$$f'_n \left(-\frac{1}{1+i\frac{y_n}{x_n}} \right) = a_n^2 f'(a_n) \rightarrow \infty$$

故

$$f_n^\# \left(-\frac{1}{1+i\frac{y_n}{x_n}} \right) \rightarrow \infty$$

又由于当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $-\frac{1}{1+i\frac{y_n}{x_n}} \rightarrow -\frac{1}{1+ic}$, 故由

Marty 正规定则可知 $\{f_n(z)\}$ 在 $z = -\frac{1}{1+ic}$ 处不正规, 矛盾.

故 $f' - \frac{1}{z^2}$ 有无穷多个零点, 定理得证.

4 定理 8 的证明

4.1 在证明定理 8 之前先证明一个引理

引理 7 设 $\{f_n\}$ 是复平面 C 上的一族亚纯函数, f_n 的零点均为实数, 极点重级至少为 3, 若存在 $M > 0$, 使 f_n 满足:

a. $f_n = 0 \Rightarrow |z^2 f'_n| \leq M$;

b. $f'_n \neq \frac{1}{z^2}$;

c. $f_n \xrightarrow{x} f$.

则 $f \equiv$ 常数.

证明 假设 f 不是常数, 由条件可知: f 的零点均为实数, 极点重级至少为 3, $f=0 \Rightarrow |z^2 f'| \leq M$.

断言: $f'(z) - \frac{1}{z^2} \neq 0$

假设在复平面 C 上 $f'(z) \neq \frac{1}{z^2}$, 令集合 $E = \{z: f(z) = \infty\} \cup \{0\}$, 则 E 在复平面 C 上无聚点. 由条件可知在 $C \setminus E$ 上有 $f'_n(z) - \frac{1}{z^2} \Rightarrow f'(z) - \frac{1}{z^2}$, 故由 Hurwitz 定理可知 $f'(z) - \frac{1}{z^2} \equiv 0$ 或 $f'(z) - \frac{1}{z^2} \neq 0$. 若 $f'(z) - \frac{1}{z^2} \equiv 0$, 则 $f(z) = -\frac{1}{z} + c$, 这与 f 的极点重级至少为 3 矛盾, 从而在 $C \setminus \{0\}$ 上 $f'(z) - \frac{1}{z^2} \neq 0$. 令 $H_n(z) = \frac{1}{f'_n(z) - \frac{1}{z^2}}$, 则 H_n 在复平面 C 上全纯, $H_n(0) = 0$, 且在 $C \setminus \{0\}$ 上 $H_n(z) \Rightarrow \frac{1}{f'(z) - \frac{1}{z^2}}$.

由于对任意的 $\delta > 0$, 在 $\Delta'(0, \delta)$ 上 $f'(z) - \frac{1}{z^2} \neq 0$, 由最大模原理知 $\{H_n\}$ 在 $\Delta(0, \delta)$ 一致收敛. 因此, $z=0$ 时, $f'(z) - \frac{1}{z^2} \neq 0$, 故在复平面 C 上, $f'(z) - \frac{1}{z^2} \neq 0$, 断言成立.

由定理 7 知 $f(z)$ 为有理函数, 分两种情形讨论.

情形 1 若 $f(z)$ 为多项式, 则 $f'(z)$ 也为多项式, 这与 $f'(z) = \frac{1}{z^2} + c_1$ 矛盾.

情形 2 若 $f(z)$ 为非多项式有理函数, 设 $F(z) = f(z) + \frac{1}{z} + z$, 则 $F'(z) = f'(z) - \frac{1}{z^2} + 1 \neq 1$, 则由引理 6 可知 $F(z) = z + c + \frac{a}{(z+b)^m}$. 这里 $a(\neq 0)$, b, c 为常数, m 为正整数. 因此 $f(z) = -\frac{1}{z} + c + \frac{a}{(z+b)^m}$. 由于 f 的极点重级至少为 3, 从而得到 $b=0, m \geq 3$, 从而 $f(z) = -\frac{1}{z} + c + \frac{a}{z^m}$.

由于 f 不是常数, $f_n \Rightarrow f$, 且 $f(0) = \infty, f(z) \neq \infty$, 故由 Hurwitz 定理知存在 $z_n \rightarrow 0$, 使得 $f_n(z_n) = \infty$. 又因为 $f_n(0) \neq \infty$, 故 $z_n \neq 0$.

因为 $f(0) = \infty$, 但 $f(z) \neq \infty$, 则存在 $\delta > 0$, 使得 f, f_n 在圆周 $\{z: |z| = \delta\}$ 上全纯, 且 $f_n^{(j)} \Rightarrow f^{(j)}, j=0, 1, 2, \dots$, 所以有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\delta} \frac{\left(f'_n - \frac{1}{z^2}\right)'}{f'_n - \frac{1}{z^2}} dz \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\delta} \frac{\left(f' - \frac{1}{z^2}\right)'}{f' - \frac{1}{z^2}} dz$$

因为上式两端都是整数, 故对充分大的 n 有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\delta} \frac{\left(f'_n - \frac{1}{z^2}\right)'}{f'_n - \frac{1}{z^2}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\delta} \frac{\left(f' - \frac{1}{z^2}\right)'}{f' - \frac{1}{z^2}} dz$$

由幅角原理可知

$$n \left[\delta, \frac{1}{f'_n - \frac{1}{z^2}} \right] - n \left(\delta, f'_n - \frac{1}{z^2} \right) = n \left[\delta, \frac{1}{f' - \frac{1}{z^2}} \right] - n \left(\delta, f' - \frac{1}{z^2} \right)$$

又由于 $f' - \frac{1}{z^2} = -\frac{ma}{z^{m+1}}$, 故 $n \left[\delta, \frac{1}{f' - \frac{1}{z^2}} \right] = 0$,

$n \left(\delta, f' - \frac{1}{z^2} \right) = m+1$. 又因为 f_n 在 $\Delta(0, \delta)$ 上有 m 个非零极点 (计重级), 设 f_n 的极点为 $z_1, \dots, z_l$ ($l \geq 1$), 其重级记为 $\tau_1, \dots, \tau_l$, 则 $\sum_{i=1}^l \tau_i = m$ ($m \geq 3$). 而 z_i 为 f'_n 的 $\tau_i + 1$ 重极点, $\sum_{i=1}^l (\tau_i + 1) = m + l \geq m + 1$, 故 $n \left(\delta, f'_n - \frac{1}{z^2} \right) \geq m + 3$, 从而

$n \left[\delta, \frac{1}{f'_n - \frac{1}{z^2}} \right] \geq 2$, 故 $f'_n - \frac{1}{z^2}$ 在 $\Delta(0, \delta)$ 上有零

点, 这与引理条件 $f'_n \neq \frac{1}{z^2}$ 矛盾.

从而 $f \equiv$ 常数, 引理得证.

4.2 定理 8 的证明

由定理 3 的证明知 $\mathcal{F}$ 在 Δ' 上正规, 只需要证明 $\mathcal{F}$ 在 $z=0$ 处正规即可. 令 $\mathcal{F}_1 = \{H = z^2 f: f \in \mathcal{F}\}$, 对任意的 $f \in \mathcal{F}$, 由定理条件知 $f'(0) \neq \infty$, 因此 $f(0) \neq \infty$, 所以对任意的 $H \in \mathcal{F}_1, H(0) = 0$, 显然 $\mathcal{F}_1$ 在 Δ' 上正规. 下面证 $\mathcal{F}_1$ 在 $z=0$ 处正规.

假设 $\mathcal{F}_1$ 在 $z=0$ 处不正规, 由引理 1 知, 存在点列 $z_n \rightarrow 0$, 正数列 $\rho_n \rightarrow 0^+$, 函数列 $\{H_n\} \in \mathcal{F}_1$, 使得

$$g_n(\zeta) = \frac{H_n(z_n + \rho_n \zeta)}{\rho_n} = \frac{(z_n + \rho_n \zeta)^2 f_n(z_n + \rho_n \zeta)}{\rho_n} \xrightarrow{x} g(\zeta)$$

其中, $g(\zeta)$ 为非常值有穷级亚纯函数, 且满足 $g^\#(\zeta) \leq g^\#(0) = M + 1$.

然后分情形讨论.

情形 1 $\frac{z_n}{\rho_n} \rightarrow \infty$.

断言:

- a. $g(\zeta) = 0 \Rightarrow |g'(\zeta)| \leq M$;
- b. $g'(\zeta) \neq 1$;
- c. $g(\zeta)$ 的零点在一直线上.

先证断言 a. 设存在 ζ_0 使 $g(\zeta_0) = 0$, 则 $g(\zeta) \not\equiv 0$. 由 Hurwitz 定理知, 存在 $\zeta_n, \zeta_n \rightarrow \zeta_0$, 对充分大的 n 有 $g_n(\zeta_n) = 0$. 而 $g_n(\zeta_n) = \frac{(z_n + \rho_n \zeta_n)^2 f_n(z_n + \rho_n \zeta_n)}{\rho_n}$, 则或者 $z_n + \rho_n \zeta_n = 0$, 或者 $f_n(z_n + \rho_n \zeta_n) = 0$. 若 $z_n + \rho_n \zeta_n = 0$, 则 $\zeta_n = -\frac{z_n}{\rho_n}$, 令 $n \rightarrow \infty$, 得到 $\zeta_0 = \infty$, 矛盾, 从而有 $f_n(z_n + \rho_n \zeta_n) = 0$.

由定理条件知 $f_n(z_n + \rho_n \zeta_n) = 0 \Rightarrow |(z_n + \rho_n \zeta_n)^2 \cdot f'_n(z_n + \rho_n \zeta_n)| \leq M$. 从而 $|g'(\zeta)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |g'_n(\zeta_n)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |2(z_n + \rho_n \zeta_n) f_n(z_n + \rho_n \zeta_n) + (z_n + \rho_n \zeta_n)^2 f'_n(z_n + \rho_n \zeta_n)| \leq M$, 故断言 a 成立.

再证断言 b. 设存在 ζ_0 使得 $g'(\zeta_0) = 1$, 则 $g'(\zeta) \not\equiv 1$, 否则 $g(\zeta) \equiv \zeta + c$, 经简单计算 $g^\#(0) = \frac{1}{1+|c|^2} < M + 1$, 矛盾. 因此存在 ζ_0 的邻域 $U(\zeta_0)$, 使得 $g_n(\zeta)$ 在 $U(\zeta_0)$ 上全纯, 且 $g_n(\zeta) \Rightarrow g(\zeta), g'_n(\zeta) \Rightarrow g'(\zeta)$, 由

$$\begin{aligned} g'_n(\zeta) &= 2(z_n + \rho_n \zeta) f_n(z_n + \rho_n \zeta) + \\ &\quad (z_n + \rho_n \zeta)^2 f'_n(z_n + \rho_n \zeta) = \\ &\quad \frac{(z_n + \rho_n \zeta)^2 f_n(z_n + \rho_n \zeta)}{\rho_n} \frac{2\rho_n}{(z_n + \rho_n \zeta)} + \\ &\quad (z_n + \rho_n \zeta)^2 f'_n(z_n + \rho_n \zeta) = \\ &\quad g_n(\zeta) \frac{2}{(z_n/\rho_n + \zeta)} + \\ &\quad (z_n + \rho_n \zeta)^2 f'_n(z_n + \rho_n \zeta) \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} (z_n + \rho_n \zeta)^2 f'_n(z_n + \rho_n \zeta) &= \\ g'_n(\zeta) - g_n(\zeta) \frac{2}{z_n/\rho_n + \zeta} \end{aligned}$$

再由 Hurwitz 定理知存在点列 $\zeta_n, \zeta_n \rightarrow \zeta_0$, 当 n 充分大时有 $(z_n + \rho_n \zeta_n)^2 f'_n(z_n + \rho_n \zeta_n) = 1$. 这与定理条件矛盾, 故断言 b 得证.

再证断言 c. 不妨设 $g(\zeta)$ 至少有 3 个不同的零点, 记为 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$. 又由 $g_n(\zeta) = \frac{H_n(z_n + \rho_n \zeta)}{\rho_n} =$

$\frac{(z_n + \rho_n \zeta)^2 f_n(z_n + \rho_n \zeta)}{\rho_n} \xrightarrow{\lambda} g(\zeta)$ 和 Hurwitz 定理

知, 当 $\delta > 0$ 时, 存在点列 $\zeta_{n,i} \in \Delta_\delta(\zeta_i), i = 1, 2, 3$,

当 n 充分大时有 $\frac{(z_n + \rho_n \zeta_{n,i})^2 f_n(z_n + \rho_n \zeta_{n,i})}{\rho_n} =$

0. 由断言 a 知 $f_n(z_n + \rho_n \zeta_{n,i}) = 0$.

由定理条件 $f_n(z)$ 的零点在一直线上, 可得到

$$\frac{(z_n + \rho_n \zeta_{n,3}) - (z_n + \rho_n \zeta_{n,1})}{(z_n + \rho_n \zeta_{n,2}) - (z_n + \rho_n \zeta_{n,1})} = t_n \quad (t_n \text{ 为实常数}),$$

$$\text{即 } \frac{\zeta_{n,3} - \zeta_{n,1}}{\zeta_{n,2} - \zeta_{n,1}} = t_n.$$

令 $n \rightarrow \infty$ 得到 $\frac{\zeta_3 - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1} = t_0$ (t_0 为实常数). 即

$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ 在一直线上, 由 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ 的任意性可知 $g(\zeta)$ 的零点在一直线上, 断言 c 得证.

显然, $g(\zeta)$ 的极点重级至少为 3. 故由定理 3 的证明知上述 $g(\zeta)$ 不存在.

情形 2 $\frac{z_n}{\rho_n} \rightarrow \alpha, \alpha$ 为有穷复数

令

$$G_n(\zeta) = \rho_n f_n(\rho_n \zeta) = \frac{(\rho_n \zeta)^2 f_n(\rho_n \zeta)}{\rho_n \zeta^2} =$$

$$((z_n + \rho_n(\zeta - z_n/\rho_n))^2 \cdot$$

$$f_n(z_n + \rho_n(\zeta - z_n/\rho_n))) / \rho_n \zeta^2 \xrightarrow{\lambda}$$

$$g(\zeta - \alpha) \frac{1}{\zeta^2} = G(\zeta)$$

则 $g(\zeta - \alpha)$ 在 $\zeta = 0$ 处的零点重级至少为 2, 所以 $G(0) \neq \infty$.

显然易得: $G_n(\zeta) = 0 \Rightarrow |\zeta^2 G'_n(\zeta)| \leq M$; $G_n(\zeta)$ 的零点均为实数; $G_n(\zeta)$ 的极点重级至少为 3; $G'_n(\zeta) \neq \frac{1}{\zeta^2}$. 故由引理 7 知 $G(\zeta) \equiv \text{常数}$. 下证这样的 $G(\zeta)$ 不存在.

令 $G \equiv c$ (c 为常数), 由于 g 为非常值亚纯函数, 故 $c \neq 0$, 由 $G_n(\zeta) = \rho_n f_n(\rho_n \zeta)$ 知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $f_n(0) = \frac{G_n(0)}{\rho_n} \rightarrow \infty$, 下面再分两种情形讨论.

情形 2.1 假设存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $z \in \Delta(0, \delta)$, 有 $f_n(z) \neq 0$, 则由定理条件 $f_n(z) \neq \frac{1}{z^2}$ 和引理 4 可知 $\{f_n\}$ 在 $\Delta(0, \delta)$ 上正规, 这与假设没有 $\mathcal{F}$ 的子列在 $z = 0$ 处正规矛盾.

情形 2.2 假设对任意的 $\delta > 0$, 在 $\Delta(0, \delta)$ 内存在点列 $z_n^*, z_n^* \rightarrow 0$ 时 $f_n(z_n^*) = 0$, 令 z_n^* 为 f_n 模最小的零点, 由定理条件 f_n 只有实零点知 $z_n^* \in \mathbb{R}$,

由 $G_n(\zeta) = \rho_n f_n(\rho_n \zeta) \rightarrow c (\neq 0)$, 得 $\frac{z_n^*}{\rho_n} \rightarrow \infty$, 令 $G_n^*(\zeta) = z_n^* f_n(z_n^* \zeta)$, 则在 Δ 内 $G_n^*(\zeta) \neq 0$, 且 $G_n^{*'}(\zeta) = (z_n^*)^2 f_n'(z_n^* \zeta) \neq \frac{1}{\zeta^2}$, 则由引理 4 知 $\{G_n^*(\zeta)\}$ 在 Δ 上正规.

显然 $G_n^*(\zeta)$ 只有实零点, 即 $G_n^*(\zeta)$ 的零点在一直线上; $G_n^*(\zeta)$ 的极点重级至少为 3; $G_n^*(\zeta) = 0 \Rightarrow |\zeta^2 G_n^{*'}| \leq M$. 由定理 3 的证明知 $G_n^*(\zeta)$ 在 $C \setminus \{0\}$ 上正规, 因此 $G_n^*(\zeta)$ 在复平面 C 上正规. 假设 $G_n^*(\zeta) \xrightarrow{\chi} G^*(\zeta)$, 由引理 7 知 $G^*(\zeta)$ 为常数. 又由于 $G_n^*(1) = z_n^* f_n(z_n^*) = 0$, 故 $G^*(\zeta) \equiv 0$, 这与 $G_n^*(0) = z_n^* f_n(0) = \frac{z_n^*}{\rho_n} G_n(0) \rightarrow \infty$ 矛盾, 因此这样的 $G(\zeta)$ 不存在.

所以 $\mathcal{F}_1$ 在 $z=0$ 处正规, 所以 $\mathcal{F}_1$ 在区域 Δ 上正规.

下证 $\mathcal{F}$ 在 Δ 上正规. 任取 $\{f_n(z)\} \in \mathcal{F}$, 令 $H_n(z) = z^2 f_n(z)$, 则 $\{H_n(z)\} \in \mathcal{F}_1$, 又由于 $\mathcal{F}_1$ 在 $z=0$ 处正规, 所以存在 $\{H_n(z)\}$ 的子列 (仍记为 $\{H_n(z)\}$), $\eta > 0$, 使得 $\{H_n(z)\}$ 在 $\Delta(0, \eta)$ 上按球距内闭一致收敛于一个亚纯函数 $H(z)$. 由于 $f_n(0) \neq \infty$, 所以 $H_n(0) = 0$, 令 $n \rightarrow \infty$ 得 $H(0) = 0$. 所以存在 $\eta_1 > 0$, 使得对任意的 $z \in \Delta(0, \eta_1)$ 有 $|H(z)| \leq 1$. 由于 $\{H_n(z)\}$ 在 $\bar{\Delta}(0, \frac{1}{2}\eta_1)$ 上按球距内闭一致收敛于 $H(z)$, 所以对任意的 $z \in \bar{\Delta}(0, \frac{1}{2}\eta_1)$ 有 $|H_n(z)| \leq 2$. 对任意的 $z \in \bar{\Delta}(0, \frac{1}{2}\eta_1)$ 有 $f_n(z) \neq \infty$, 所以 $f_n(z)$ 在 $\bar{\Delta}(0, \frac{1}{2}\eta_1)$ 上解析. 而在 $|z| = \frac{1}{2}\eta_1$ 上, $|f_n(z)| = \frac{|H_n(z)|}{|z|^2} \leq \frac{8}{\eta_1^2}$, 由最大模原理知在 $\bar{\Delta}(0, \frac{1}{2}\eta_1)$ 上 $|f_n(z)| \leq \frac{8}{\eta_1^2}$, 由 Montel 正规规定则知, $\mathcal{F}$ 在 $\bar{\Delta}(0, \frac{1}{2}\eta_1)$ 上正规. 又由定理 3 的证明知,

$\mathcal{F}$ 在 Δ' 上正规, 因此 $\mathcal{F}$ 在 $\Delta = \bar{\Delta}(0, \frac{1}{2}\eta_1) \cup \Delta'$ 上正规. 定理得证.

参考文献:

- [1] HAYMAN W K. Meromorphic function [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.
- [2] GU Y X. A normal criterion of meromorphic families [J]. Scientia Sinica, Mathematical Issue (I), 1979, 1: 267 - 274.
- [3] 童晓丽, 刘晓俊. 零点位于直线上的亚纯函数的正规规定则 [J]. 上海理工大学学报, 2014, 36(4): 362 - 365.
- [4] 洪苏敏, 刘晓俊. 零点分布在直线上的亚纯函数的正规规定则 [J]. 上海理工大学学报, 2016, 38(3): 211 - 217.
- [5] BERGWEILER W, PANG X C. On the derivative of meromorphic functions with multiple zeros [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, 278(2): 285 - 292.
- [6] 徐成雨, 刘晓俊. 涉及实零点的亚纯函数 Picard 型定理 [J]. 上海理工大学学报, 2016, 38(5): 414 - 418.
- [7] PANG X C, ZALCMAN L. Normal families and shared values [J]. Bulletin of London Mathematical Society, 2000, 32(3): 325 - 331.
- [8] 顾永兴, 庞学诚, 方明亮. 正规族理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [9] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.
- [10] LEHTO O, VIRTANEN K L. On the behaviour of meromorphic functions in the neighbourhood of an isolated singularity [J]. Annals of the Academy of Science Fenn, Series A, 1957, 240: 1 - 9.
- [11] PANG X C, YANG D G, ZALCAMAN L. Normal families and omitted functions [J]. Indiana University Mathematics Journal, 2005, 54(1): 223 - 236.
- [12] WANG Y F, FANG M L. Picard values and normal families of meromorphic functions with multiple zeros [J]. Acta Mathematica Sinica, 1998, 14(1): 17 - 26.

(编辑: 丁红艺)