

4 度点数固定的树的距离谱半径

汪云, 吴宝丰

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 引入了一种图的变换, 得到了距离谱半径的变化规律. 进一步研究了四度点数固定的树集, 刻画了该图类中距离谱半径最大的极图. 最后, 讨论了更一般的图类, 即度至少为 4 的点数固定的树集, 并确定了极图.

关键词: 距离矩阵; 距离谱半径; 距离 Perron 向量; 树

中图分类号: O 157.5 **文献标志码:** A

Distance Spectral Radius of Trees with Given Number of Vertices of Degree 4

WANG Yun, WU Baofeng

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: A graph transformation was introduced to show the effect of the distance spectral radius. Further, the set of trees with given number of vertices of degree 4 was studied, characterizing the extremal graph with the largest distance spectral radius. Finally, the more general class of graphs, namely, the set of trees with given number of vertices of degree at least 4 was discussed, and also its extremal graph was characterized.

Keywords: distance matrix; distance spectral radius; distance Perron vector; tree

1 基本概念

研究的图均为连通的简单无向图. 设 G 是 n 阶连通图, $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别是顶点集和边集. 对于任意顶点 $v \in V(G)$, 用 $N_G(v)$ 表示它的邻集, 并根据其度数的奇偶性, 称它为奇度点或偶度点. 对于图 G 的任意 2 点 u, v , 用 $d_G(u, v)$ 表示它们的距离,

$D(G) = (d_G(u, v))_{u, v \in V(G)}$ 表示图 G 的距离矩阵. 显然, $D(G)$ 是实对称的, 所以, 它的特征值全为实数. 图 G 的距离谱半径用 $\rho(G)$ 表示, 代表 $D(G)$ 的最大特征值. 连通图对应的距离矩阵是不可约的, 由 Perron-Frobenius 定理可知, $\rho(G)$ 是单根, 且有相应的正单位特征向量, 记为 $X(G)$, 称为 G 的距离 Perron 向量.

任取向量 $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ (这里 X 可能

收稿日期: 2017-06-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11301340); 上海自然科学基金资助项目(12ZR1420300); 沪江基金资助项目(B14005)

第一作者: 汪云(1993-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 代数图论. E-mail: 751488437@qq.com

通信作者: 吴宝丰(1978-), 男, 讲师. 研究方向: 代数图论. E-mail: baufern@usst.edu.cn

是 G 的距离 Perron 向量,也可能不是),可将它的分量与 G 中的点一一对应,即分量 x_i 对应顶点 v_i ,则

$$\mathbf{X}^T \mathbf{D}(G) \mathbf{X} = 2 \sum_{\{u, v\} \subseteq V(G)} d_G(u, v) x_u x_v$$

若 $\mathbf{X}$ 是 $\mathbf{D}(G)$ 的相应于 λ 的特征向量,则对每一点 $u \in V(G)$,有

$$\lambda x_u = \sum_{v \in V(G)} d_G(u, v) x_v \quad (1)$$

称式(1)为 G 在 u 点处的 $(\lambda, \mathbf{X})$ -特征方程.对于任意单位向量 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$,由 Rayleigh-Ritz 定理^[1],有

$$\rho(G) \geq \mathbf{X}^T \mathbf{D}(G) \mathbf{X}$$

当 $\mathbf{X}$ 是 G 的距离 Perron 向量时,上式等号成立.对于 G 的子图 H ,记 $\sigma_G(H)$ 为 G 的距离 Perron 向量中对应于 $V(H)$ 的所有分量之和.

P_n 表示 n 阶路,它是 n 阶连通图中距离谱半径最大的图^[2].若一棵树,将其所有悬挂点删去后所得图是一条路,则称该树为毛毛虫图.显然, P_n 自身也是毛毛虫图.

设 $V_1 \subset V(G)$,则 $G - V_1$ 表示将图 G 删去 V_1 中的点以及相关的所有边后所得到的图.若 $V_1 = \{u\}$,则用 $G - u$ 来代替 $G - \{u\}$.对于 $E_1 \subset E(G)$, $G - E_1$ 表示将图 G 删去 E_1 中的边后所得到的图.相应地,用 $G - uv$ 来代替 $G - \{uv\}$.若 E' 是 G 的补图的一些边的集合,类似地,可以定义 $G + E'$ 和 $G + uv$.

距离矩阵的定义可以追溯到 1841 年 Cayley 的论文^[3],后来 Graham^[4]于 1971 年在距离矩阵的负特征值个数与数据通信系统中的寻址问题之间建立了一种关系,自此,距离谱的研究引起了众多图论学者的兴趣.与邻接矩阵相比,距离矩阵包含了图的更多信息,但同时也更加复杂,任意一条边的移动或者删除,都会给距离矩阵带来很大的变化,所以,研究难度较大.关于距离谱的综述见文献^[5].

文献^[6]研究了奇度点数固定的树集,刻画了距离谱半径最大的极图.受此启发,本文研究 4 度点数固定的树集,以及度至少为 4 的点数固定的树集,刻画了距离谱半径最大的极图.

2 关于图 $C(n, a, b)$

现引入一类图 $C(n, a, b)$,并得到了一些性质.在考虑 4 度点数固定的树集时,距离谱半径最大的图就是此类图.

定义 1 设 $b \geq a \geq 0, 3(a+b) \leq n-2, r = n-3a-3b-2$,记图 1 所示的图为 $C(n, a, b)$.特

别地, $C(n, 0, 0)$ 是路 P_n .

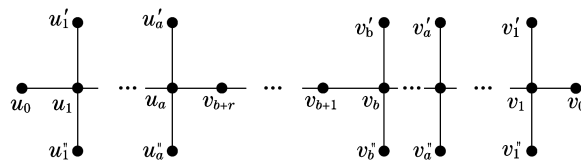


图 1 $C(n, a, b)$

Fig.1 $C(n, a, b)$

定义 2 设 $2 \leq \Delta \leq n-1$,路 $P_{n-\Delta+1}$ 的 1 个端点连接 $\Delta-1$ 个悬挂点所得到的图记为 $B_{n,\Delta}$,如图 2 所示.

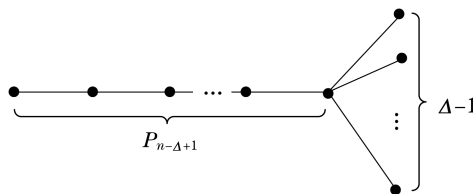


图 2 $B_{n,\Delta}$

Fig.2 $B_{n,\Delta}$

引理 1^[7] 设 T 是 n ($n \geq 4$) 阶树, Δ 为最大度,则 $\rho(T) \leq \rho(B_{n,\Delta})$,等式成立当且仅当 $T \cong B_{n,\Delta}$.进一步,若 $\Delta_1 > \Delta_2$,则 $\rho(B_{n,\Delta_1}) < \rho(B_{n,\Delta_2})$.

推论 1 设 T 是 n ($n \geq 5$) 阶树,最大度 $\Delta \geq 4$,则 $\rho(T) \leq \rho(C(n, 0, 1))$,等式成立当且仅当 $T \cong C(n, 0, 1)$.

证明 因为, $\Delta \geq 4$,由引理 1 可知, $\rho(T) \leq \rho(B_{n,\Delta}) \leq \rho(B_{n,4}) = \rho(C(n, 0, 1))$,等号成立当且仅当 $T = C(n, 0, 1)$,证毕.

引理 2^[7] 设 G 是 n 阶连通图, $\mathbf{X}$ 是 G 的距离 Perron 向量,其分量 x_v 与顶点 v 对应.令 $u, v \in V(G)$, u', v' 分别是 u, v 的悬挂邻点,则 $x'_u - x'_v = \frac{\rho(G)}{\rho(G)+2}(x_u - x_v)$.

引理 3^[6] 设 T 是树, $u \in V(T)$, $N_T(u) = \{u_1, \dots, u_k\}$,其中, $k \geq 3$, T_i 为 $T - u$ 的包含 u_i ($1 \leq i \leq k$) 的分支, $w \in V(T_k)$,对于任意 $t = 2, 3, \dots, k-1$,令 $T' = T - \{uu_i : 2 \leq i \leq t\} + \{wu_i : 2 \leq i \leq t\}$.若 $\sigma_T(T_k) \leq \sigma_T(T_1)$,则 $\rho(T') > \rho(T)$.

引理 4^[8] 设 G 是 n 阶连通图, $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 是 G 的距离 Perron 向量,其分量 x_i 与顶点 v_i 对应.令 $v_{i-1}v_i, v_iv_{i+1}$ 是 G 的 2 条边,且 $v_{i-1}v_i, v_iv_{i+1}$ 中至少有 1 条是割边,若 $x_{i-1} < x_i$,则 $x_i < x_{i+1}$.

引理 5 设图 $C(n, a, b)$ 如图 1 所示, $b \geq a +$

$2 \geq 2, 3(a+b) < n-2, r = n-3a-3b-2, \mathbf{X}$ 是它的距离 Perron 向量, 其分量 x_v 与顶点 v 对应, 则有结论:

- a. $0 < x_{u_0} - x_{v_0} < x_{u_1} - x_{v_1} < \dots < x_{u_a} - x_{v_a} < x_{v_{b+r}} - x_{v_{a+1}};$
 b. $x_{v_{b+r-i}} - x_{v_{b+i}} > x_{v_{b+r-(i+1)}} - x_{v_{b+(i+1)}} > 0 \left(0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor\right).$

证明 设图 $C(n, a, b)$ 的直径为 d , 对图 1 进行重新编号, 如图 3 所示, 并设 $\mathbf{X}$ 的分量 x_i, x'_i, x''_i 分别对应顶点 $u_i, u'_i, u''_i, s = \left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor, t = \left\lceil \frac{r+1}{2} \right\rceil$, 则结论 a 和 b 转化为结论 c 和 d.

- c. $0 < x_0 - x_d < x_1 - x_{d-1} < \dots < x_a - x_{d-a} < x_{a+1} - x_{d-(a+1)};$
 d. $x_{a+1} - x_{a+r+1} > x_{a+2} - x_{a+r} > \dots > x_{a+s} - x_{a+t+1} > 0$, 其中, $a+r+1 = d-b, a+t+1 = a+r+2-s$.

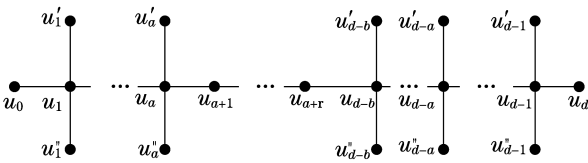


图 3 重新编号的 $C(n, a, b)$

Fig.3 Renumbered $C(n, a, b)$

现证明结论 c.

令 $p = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor, q = \left\lceil \frac{d-1}{2} \right\rceil$, 且对于任意 $i = 0, 1, \dots, d$, 令

$$y_i = \begin{cases} x_i + x'_i + x''_i, & d_T(u_i) = 4 \\ x_i, & d_T(u_i) \neq 4 \end{cases}$$

断言 1 $x_p > x_{q+1}$.

假设 $\sum_{i=0}^p y_i \geq \sum_{i=q+1}^d y_i$, 用数学归纳法可推出 $x_{p-i} \leq x_{q+1+i} (0 \leq i \leq p)$.

当 $i = 0$ 时, 由式(1)可知,

$$\rho(T)(x_p - x_{q+1}) = (q+1-p) \left(\sum_{i=q+1}^d y_i - \sum_{i=0}^p y_i \right) \quad (2)$$

在假设条件下, 有 $x_p \leq x_{q+1}$ 成立.

当 $i \geq 1$ 时, 设 $x_{p-j} \leq x_{q+1+j} (0 \leq j \leq i-1)$ 已成立. 若 $d_T(u_{p-j}) = 2$, 则 $y_{p-j} = x_{p-j} \leq x_{q+1+j} \leq y_{q+1+j}$; 若 $d_T(u_{p-j}) = 4$, 则由引理 2 可知, $x'_{p-j} + x''_{p-j} \leq x'_{q+1+j} + x''_{q+1+j}$, 从而有

$$y_{p-j} = x_{p-j} + x'_{p-j} + x''_{p-j} \leq x_{q+1+j} + x'_{q+1+j} + x''_{q+1+j} = y_{q+1+j}$$

于是, 有 $y_{p-j} \leq y_{q+1+j} (0 \leq j \leq i-1)$ 成立. 因此,

$$\begin{aligned} \rho(T)(x_{p-i} - x_{q+1+i}) - \rho(T)(x_{p-(i-1)} - x_{q+i}) &= \\ 2 \left(\sum_{j=q+1+i}^d y_j - \sum_{j=0}^{p-i} y_j \right) &= 2 \left(\sum_{j=q+1}^d y_j - \sum_{j=0}^p y_j \right) + \\ 2 \sum_{j=0}^{i-1} (y_{p-j} - y_{q+1+j}) &\leq 0 \end{aligned}$$

即 $x_{p-i} - x_{q+1+i} \leq x_{p-(i-1)} - x_{q+i} \leq 0$, 亦即 $x_{p-i} \leq x_{q+1+i}$ 也成立.

由数学归纳法可知, 对于所有 $0 \leq i \leq p$, 均有 $x_{p-i} \leq x_{q+1+i}$ 成立, 从而有 $y_{p-i} \leq y_{q+1+i}$ 成立.

又因 $b \geq a+2$, 则存在一个 $i_0 (0 \leq i_0 \leq p)$, 满足 $d_T(u_{p-i_0}) = 2$ 且 $d_T(u_{q+1+i_0}) = 4$, 于是,

$$y_{p-i_0} = x_{p-i_0} \leq x_{q+1+i_0} < y_{q+1+i_0}, \text{ 从而 } \sum_{i=0}^p y_i < \sum_{i=q+1}^d y_i, \text{ 与假设 } \sum_{i=0}^p y_i \geq \sum_{i=q+1}^d y_i \text{ 矛盾.}$$

因此, $\sum_{i=0}^p y_i < \sum_{i=q+1}^d y_i$, 根据式(2), 有 $x_p > x_{q+1}$, 断言 1 成立.

断言 2 $x_0 > x_d$.

假设 $x_0 \leq x_d$, 现利用数学归纳法证 $x_i \leq x_{d-i} (0 \leq i \leq p)$.

当 $i \geq 1$ 时, 设 $x_j \leq x_{d-j} (0 \leq j \leq i-1)$ 已成立. 由引理 2 可知, $y_j \leq y_{d-j} (0 \leq j \leq i-1)$, 因此,

$$\begin{aligned} \rho(T)(x_i - x_{d-i}) - \rho(T)(x_{i-1} - x_{d-(i-1)}) &= \\ 2 \sum_{j=0}^{i-1} (y_j - y_{d-j}) &\leq 0 \end{aligned}$$

于是, $x_i - x_{d-i} \leq x_{i-1} - x_{d-(i-1)} \leq 0$, 因此, $x_i \leq x_{d-i} (0 \leq i \leq p)$. 特别地, $x_p \leq x_{q+1}$, 矛盾, 所以, $x_0 > x_d$, 断言 2 成立.

在断言 2 成立的基础上, 类似地, 可用数学归纳法得, $0 < x_i - x_{d-i} < x_{i+1} - x_{d-(i+1)} (0 \leq i \leq a)$, 结论 c 成立.

现证明结论 d.

因 $b \geq a+2$, 易得 $a+s \leq p, a+t \leq q$, 再根据

结论 c 的证明过程可知, $\sum_{i=0}^p y_i < \sum_{i=q+1}^d y_i$, 所以

$$\sum_{j=0}^{a+s} y_j \leq \sum_{j=0}^p y_j < \sum_{j=q+1}^d y_j \leq \sum_{j=a+t+1}^d y_j$$

现证明 $x_{a+s-i} > x_{a+t+1+i} (0 \leq i \leq s-1)$.

当 $i = 0$ 时,

$$\begin{aligned} \rho(T)(x_{a+s} - x_{a+t+1}) &= \\ (t+1-s) \left(\sum_{j=a+t+1}^d y_j - \sum_{j=0}^{a+s} y_j \right) &> 0 \end{aligned}$$

故 $x_{a+s} > x_{a+t+1}$ 成立.

当 $1 \leq i \leq s-1$ 时, 设 $x_{a+s-j} > x_{a+t+1+j}$ ($0 \leq j \leq i-1$) 已成立, 即 $y_{a+s-j} > y_{a+t+1+j}$ ($0 \leq j \leq i-1$), 则

$$\begin{aligned} \rho(T)(x_{a+s-i} - x_{a+t+1+i}) - \rho(T)(x_{a+s-(i-1)} - x_{a+t+i}) = \\ 2\left(\sum_{j=a+t+1+i}^d y_j - \sum_{j=0}^{a+s-i} y_j\right) = 2\left(\sum_{j=a+t+1}^d y_j - \sum_{j=0}^{a+s} y_j\right) + \\ 2\sum_{j=0}^{i-1} (y_{a+s-j} - y_{a+t+1+j}) > 0 \end{aligned}$$

于是,

$$x_{a+s-i} - x_{a+t+1+i} > x_{a+s-(i-1)} - x_{a+t+i} > 0 \quad (3)$$

从而 $x_{a+s-i} > x_{a+t+1+i}$ 成立. 由数学归纳法可知, 对于所有 $0 \leq i \leq s-1$, 均有 $x_{a+s-i} > x_{a+t+1+i}$ 成立. 再由式(3)得结论 d 成立.

综上, 引理 5 成立.

定理 1 设图 $C(n, a, b)$ 如图 1 所示, $b \geq a + 2 \geq 2, 3(a+b) < n-2, r = n-3a-3b-2$, 则

$$\rho(C(n, a+1, b-1)) > \rho(C(n, a, b))$$

证明 令 $T = C(n, a, b)$, $\mathbf{X} = X(T)$ 是它的距离 Perron 向量, 其分量 $x_{u_i}, x'_{u_i}, x''_{u_i}$ 分别对应顶点 u_i, u'_i, u''_i , 分量 $x_{v_i}, x'_{v_i}, x''_{v_i}$ 分别对应顶点 v_i, v'_i, v''_i , 令

$$y_i = \begin{cases} x_{u_i} + x'_{u_i} + x''_{u_i}, & 1 \leq i \leq a \\ x_{u_i}, & i = 0 \end{cases}$$

$$z_i = \begin{cases} x_{v_i} + x'_{v_i} + x''_{v_i}, & 1 \leq i \leq b \\ x_{v_i}, & i = 0 \end{cases}$$

设 T_1, T_2 分别是 T 删去 v_b 所得的含有点 u_0, v_0 的分支, 当 $\sigma_T(T_1) \leq \sigma_T(T_2)$ 时, 由引理 3 可知, 结论显然成立. 当 $\sigma_T(T_1) > \sigma_T(T_2)$ 时, $\rho(T) \cdot (x_{v_b} - x_{v_{b-1}}) = \sigma(T_2) - (\sigma(T_1) + z_b) < 0$, 所以, $x_{v_b} < x_{v_{b-1}}$. 由引理 4 可知, $x_{v_b} < x_{v_{b-1}} < \dots < x_{v_{a+1}} < x_{v_a} < \dots < x_{v_1} < x_{v_0}$, 从而

$$x_{v_b} < x_{v_{a+1}} \quad (4)$$

由引理 2 可知,

$$x'_{v_b} - x'_{v_{b-1}} = x''_{v_b} - x''_{v_{b-1}} = \frac{\rho(T)}{2 + \rho(T)}(x_{v_b} - x_{v_{b-1}})$$

所以

$$x'_{v_b} + x''_{v_b} = \frac{2\rho(T)}{2 + \rho(T)}(x_{v_b} - x_{v_{b-1}}) + x'_{v_{b-1}} + x''_{v_{b-1}}$$

从而

$$x'_{v_b} + x''_{v_b} < x'_{v_{b-1}} + x''_{v_{b-1}} \quad (5)$$

令 $T' = T - \{v_b v'_b, v_b v''_b\} + \{v_{b+r} v'_b, v_{b+r} v''_b\}$, 显然, $T' \cong C(n, a+1, b-1)$. 考虑

$$\begin{aligned} \rho(T') - \rho(T) &\geq \mathbf{X}^T (\mathbf{D}(T') - \mathbf{D}(T)) \mathbf{X} = \\ &2(x'_{v_b} + x''_{v_b})w \end{aligned}$$

其中

$$w = r \sum_{i=0}^a (z_i - y_i) + r \sum_{i=a+1}^{b-1} z_i + \sum_{i=0}^{\lceil \frac{r}{2} \rceil - 1} (r - 2i)(x_{v_{b+i}} - x_{v_{b+r-i}})$$

现分两部分来证明 $w > 0$.

a. 要证 $\rho(T') > \rho(T)$, 只需证 $w > 0$. 由引理 2 和引理 5 的 a 可得

$$\begin{cases} y_0 - z_0 = x_{u_0} - x_{v_0} < x_{v_{b+r}} - x_{v_{a+1}}; \\ y_i - z_i = \left(\frac{2\rho(T)}{\rho(T) + 2} + 1\right)(x_{u_i} - x_{v_i}) < 3(x_{v_{b+r}} - x_{v_{a+1}}), 1 \leq i \leq a. \end{cases} \quad (6)$$

于是, 由引理 5 的 b 及式(4)~(6)可得

$$\begin{aligned} \rho(T)(x_{v_{b+r}} - x_{v_b}) &= w + r(x'_{v_b} + x''_{v_b}) < \\ &w + r(x'_{v_{b-1}} + x''_{v_{b-1}}) < w + rz_{b-1} = \\ &2w + \sum_{i=0}^{\lceil \frac{r}{2} \rceil - 1} (r - 2i)(x_{v_{b+r-i}} - x_{v_{b+i}}) + \\ &r \sum_{i=0}^a (y_i - z_i) - r \sum_{i=a+1}^{b-1} z_i < \\ &2w + \sum_{i=0}^{\lceil \frac{r}{2} \rceil - 1} (r - 2i)(x_{v_{b+r}} - x_{v_b}) + \\ &r(3a+1)(x_{v_{b+r}} - x_{v_{a+1}}) < 2w + \\ &\left[\sum_{i=0}^{\lceil \frac{r}{2} \rceil - 1} (r - 2i) + (3a+1)r \right] (x_{v_{b+r}} - x_{v_b}) \end{aligned}$$

因此

$$2w > \left(\rho(T) - \left[\sum_{i=0}^{\lceil \frac{r}{2} \rceil - 1} (r - 2i) + (3a+1)r \right] (x_{v_{b+r}} - x_{v_b}) \right)$$

b. 由引理 5 的 b 可知, $x_{v_{b+r}} - x_{v_b} > 0$, 由 Perron-Frobenius 定理可知, 不可约非负矩阵的谱半径大于等于最小行和, 故要证 $w > 0$, 只需证下面的命题.

命题 $\mathbf{D}(T)$ 的最小行和大于 $\sum_{i=0}^{\lceil \frac{r}{2} \rceil - 1} (r - 2i) + (3a+1)r$.

若 $a \geq 1$, 则对于 $1 \leq i \leq a$, 令 $U_i = \{u_i, u'_i, u''_i\}, V_i = \{v_i, v'_i, v''_i\}$, 并令 $R = \{v_{b+1}, \dots, v_{b+r}\}$.

对于任意 $0 \leq j \leq a$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V(T)} d_T(u_j, v) &> \sum_{v \in R} d_T(u_a, v) + \\ &d_T(u_a, v_0) + \sum_{i=1}^a \sum_{v \in V_i} d_T(u_a, v) > \\ &\sum_{i=1}^r i + r + \sum_{i=1}^a 3r > \sum_{i=0}^{\lceil \frac{r}{2} \rceil - 1} (r - 2i) + (3a+1)r \end{aligned}$$

若 $a \geq 1$, 则对于任意 $1 \leq j \leq a$, 有

$$\sum_{u \in V(T)} d_T(u'_j, u) = \sum_{u \in V(T)} d_T(u''_j, u) > \sum_{u \in V(T)} d_T(u_j, u)$$

对于任意 $v \in R$, 有

$$\sum_{u \in V(T)} d_T(v, u) > \sum_{u \in R \cup \{v_b\}} d_T(v, u) + d_T(v, u_0) +$$

$$d_T(v, v_0) + \sum_{i=1}^a \sum_{u \in U_i \cup V_i} d_T(v, u) >$$

$$\sum_{u \in R \cup \{v_b\}} d_T(v_b, \lfloor \frac{r}{2} \rfloor, u) + (3a+1)r =$$

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 1} (r-2i) + (3a+1)r$$

对于任意 $0 \leq j \leq b$, 有

$$\sum_{u \in V(T)} d_T(v_j, u) > \sum_{u \in R} d_T(v_b, u) +$$

$$d_T(v_b, u_0) + \sum_{i=1}^a \sum_{u \in U_i} d_T(v_b, u) > \sum_{i=1}^r i +$$

$$(3a+1)r > \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 1} (r-2i) + (3a+1)r$$

对于任意 $1 \leq j \leq b$, 有

$$\sum_{u \in V(T)} d_T(v'_j, u) =$$

$$\sum_{u \in V(T)} d_T(v''_j, u) > \sum_{u \in V(T)} d_T(v_j, u)$$

综上, 命题成立, 从而 $\rho(T') > \rho(T)$, 定理 1

得证.

3 4度点数固定的树

引入一种图的变换, 得到距离谱半径的变化规律(引理 6). 进一步, 研究 4 度点数固定的树集, 以及度至少为 4 的点数固定的树集, 刻画距离谱半径最大的极图(定理 2 和定理 3).

引理 6 设 $G_2^1(s, t)$ 如图 4 所示, 其中, G_1, G_2 为连通图, 且至少有 1 个是非平凡的. 若 $t \geq s \geq 2$, 则有

$$\rho(G_2^1(s-1, t+1)) > \rho(G_2^1(s, t))$$

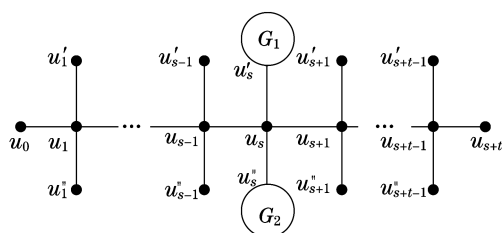


图 4 $G_2^1(s, t)$

Fig.4 $G_2^1(s, t)$

证明 令 $G = G_2^1(s, t)$, G_3, G_4 分别是 $G - u_s$ 的包含点 u_0 和 u_{s+t} 的分支, 令

$$G' = G - \{u_{s-1}u'_{s-1}, u_{s-1}u''_{s-1}, u_su'_s, u_su''_s\} + \{u_{s-1}u'_s, u_{s-1}u''_s, u_su'_{s-1}, u_su''_{s-1}\}$$

显然, $G' \cong G_2^1(s-1, t+1)$. 令 $\mathbf{X} = \mathbf{X}(G)$ 为图 G 的距离 Perron 向量, 从 G 到 G' , $V(G_1) \cup V(G_2)$ 中的点到 $V(G_3) \setminus \{u'_{s-1}, u''_{s-1}\}$ 中的点的距离减少 1, $V(G_1) \cup V(G_2)$ 中的点到 $V(G_4) \cup \{u_s\}$ 中的点的距离增加 1, u'_{s-1}, u''_{s-1} 到 $V(G_3) \setminus \{u'_{s-1}, u''_{s-1}\}$ 中的点的距离增加 1, u'_{s-1}, u''_{s-1} 到 $V(G_4) \cup \{u_s\}$ 中的点的距离减少 1, 其他点之间的距离保持不变, 因此,

$$\frac{1}{2}(\rho(G') - \rho(G)) \geq \frac{1}{2}\mathbf{X}^T(\mathbf{D}(G') - \mathbf{D}(G))\mathbf{X} =$$

$$(\sigma_G(G_1) + \sigma_G(G_2))(\sigma_G(G_4) + x_{u_s}) -$$

$$(\sigma_G(G_1) + \sigma_G(G_2))(\sigma_G(G_3) - x_{u'_{s-1}} - x_{u''_{s-1}}) +$$

$$(x_{u'_{s-1}} + x_{u''_{s-1}})(\sigma_G(G_3) - x_{u'_{s-1}} - x_{u''_{s-1}}) -$$

$$(x_{u'_{s-1}} + x_{u''_{s-1}})(\sigma_G(G_4) + x_{u_s}) =$$

$$(\sigma_G(G_1) + \sigma_G(G_2) - x_{u'_{s-1}} - x_{u''_{s-1}})(\sigma_G(G_4) -$$

$$\sigma_G(G_3) + x_{u'_{s-1}} + x_{u''_{s-1}} + x_{u_s})$$

断言 3 $\sigma_G(G_1) + \sigma_G(G_2) - x_{u'_{s-1}} - x_{u''_{s-1}} > 0$.

因为, G_1, G_2 中至少有 1 个非平凡分支, 不妨设 G_1 是非平凡分支. 选 1 点 $v \in V(G_1)$, 满足

$$d_G(v, u'_s) = \max_{w \in V(G_1)} d_G(w, u'_s)$$

令 $d = d_G(v, u'_s)$, 因为 $|V(G_1)| \geq 2$, 所以, $d \geq 1$ 且 $v \neq u'_s$. 考虑在 $u'_s, u''_s, v, u'_{s-1}, u''_{s-1}$ 处的 $(\rho(G), \mathbf{X})$ -特征方程, 可得

$$\rho(G)(x_{u'_s} + x_{u''_s} + x_v - x_{u'_{s-1}} - x_{u''_{s-1}}) =$$

$$\sum_{w \in V(G) \setminus \{V(G_1) \cup V(G_2) \cup \{u'_{s-1}, u''_{s-1}\}\}} (d_G(u'_s, w) +$$

$$d_G(u''_s, w) + d_G(v, w) -$$

$$d_G(u'_{s-1}, w) - d_G(u''_{s-1}, w))x_w +$$

$$\sum_{w \in V(G_1) \setminus \{v, u'_s\}} (d_G(u''_s, w) + d_G(v, w) - d_G(u'_s, w) -$$

$$6)x_w + \sum_{w \in V(G_2) \setminus \{u''_s\}} (d_G(u'_s, w) + d_G(v, w) -$$

$$d_G(u''_s, w) - 6)x_w - 4x_v + (d-4)x_{u'_s} +$$

$$(d-2)x_{u''_s} + (7+d)(x_{u'_{s-1}} + x_{u''_{s-1}})$$

注意到 $w \in V(G) \setminus (V(G_1) \cup V(G_2) \cup \{u'_{s-1}, u''_{s-1}\})$, 有

$$d_G(u'_s, w) + d_G(u''_s, w) + d_G(v, w) -$$

$$d_G(u'_{s-1}, w) - d_G(u''_{s-1}, w) \geq 0$$

且当 $w \in V(G_1) \setminus \{u'_s, v\}$ 时, $d_G(u''_s, w) + d_G(v,$

$w) - d_G(u'_s, w) > 0$, 当 $w \in V(G_2) \setminus \{u''_s\}$ 时,
 $d_G(u'_s, w) + d_G(v, w) - d_G(u''_s, w) > 0$, 因此,
 $\rho(G)(\sigma_G(G_1) + \sigma_G(G_2) - x_{u'_{s-1}} - x_{u''_{s-1}}) \geq$
 $\rho(G)(x_{u'_s} + x_{u''_s} + x_v - x_{u'_{s-1}} - x_{u''_{s-1}}) \geq$
 $-6(\sum_{w \in V(G_1) \setminus \{v, u'_s\}} x_w + \sum_{w \in V(G_2) \setminus \{u''_s\}} x_w) - 4x_v +$
 $(d-4)x_{u'_s} + (d-2)x_{u''_s} + (7+d)(x_{u'_{s-1}} + x_{u''_{s-1}}) =$
 $-6(\sigma_G(G_1) + \sigma_G(G_2)) + 2x_v + (d+2)x_{u'_s} +$
 $(d+4)x_{u''_s} + (7+d)(x_{u'_{s-1}} + x_{u''_{s-1}})$

于是,

$$(\rho(G) + 6)(\sigma_G(G_1) + \sigma_G(G_2) - x_{u'_{s-1}} - x_{u''_{s-1}}) \geq$$

$$2x_v + (d+2)x_{u'_s} + (d+4)x_{u''_s} +$$

$$(1+d)(x_{u'_{s-1}} + x_{u''_{s-1}}) > 0$$

因此,断言3成立.

断言4 $\sigma_G(G_4) \geq \sigma_G(G_3)$.

令 $y_k = x_{u_k} + x_{u'_k} + x_{u''_k}$ ($1 \leq k \leq s+t-1$),
 $y_0 = x_{u_0}$, $y_{s+t} = x_{u_{s+t}}$. 假设 $\sigma_G(G_3) > \sigma_G(G_4)$,
 即 $\sum_{i=0}^{s-1} y_i > \sum_{j=s+1}^{s+t} y_j$, 现证明, $x_{u_{s-i}} - x_{u_{s+i}} < 0$ ($1 \leq$
 $i \leq s$).

当 $i=1$ 时, $\rho(G)(x_{u_{s-1}} - x_{u_{s+1}}) = 2(\sum_{j=s+1}^{s+t} y_j -$
 $\sum_{j=0}^{s-1} y_j) < 0$, 所以, $x_{u_{s-1}} - x_{u_{s+1}} < 0$ 成立.

当 $2 \leq i \leq s$ 时, 设 $x_{u_{s-j}} - x_{u_{s+j}} < 0$ ($1 \leq j \leq$
 $i-1$) 已成立, 由引理2可知, $y_{s-j} - y_{s+j} < 0$ ($1 \leq$
 $j \leq i-1$), 从而

$$\rho(G)(x_{u_{s-i}} - x_{u_{s+i}}) - \rho(G)(x_{u_{s-(i-1)}} - x_{u_{s+(i-1)}}) =$$

$$2(\sum_{j=s+i}^{s+t} y_j - \sum_{j=0}^{s-i} y_j) = 2(\sum_{j=s+1}^{s+t} y_j - \sum_{j=0}^{s-1} y_j) +$$

$$2(\sum_{j=s-(i-1)}^{s-1} y_j - \sum_{j=s+1}^{s+(i-1)} y_j) = 2(\sum_{j=s+1}^{s+t} y_j - \sum_{j=0}^{s-1} y_j) +$$

$$2\sum_{j=1}^{i-1} (y_{s-j} - y_{s+j}) < 0$$

所以, $x_{u_{s-i}} - x_{u_{s+i}} < x_{u_{s-(i-1)}} - x_{u_{s+(i-1)}} < 0$.

由数学归纳法可知, 对于所有 $1 \leq i \leq s$, 均有
 $x_{u_{s-i}} - x_{u_{s+i}} < 0$ 成立.

于是, 对所有 $1 \leq i \leq s$, 也有 $y_{s-i} - y_{s+i} < 0$, 从
 而, $\sum_{i=0}^{s-1} y_i < \sum_{j=s+1}^{s+s} y_j < \sum_{j=s+1}^{s+t} y_j$, 与假设矛盾. 因此,
 断言4成立.

根据2个断言可得, $\frac{1}{2}(\rho(G') - \rho(G)) > 0$,
 即 $\rho(G') > \rho(G)$, 亦即 $\rho(G_2^1(s-1, t+1)) >$

$\rho(G_2^1(s, t))$.

引理7 设 T 是 n ($n \geq 5$) 阶毛毛虫图, $\Delta(T) =$
 4 , 且4度点的个数为 k , $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor$, 奇度点均为
 悬挂点, 则 $\rho(T) \leq \rho(C(n, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor, \lceil \frac{k}{2} \rceil))$, 等式成立
 当且仅当 $T \cong C(n, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor, \lceil \frac{k}{2} \rceil)$.

证明 设 T^* 为满足引理7所给条件的距离谱
 半径最大的毛毛虫图, 令 t 为 T^* 中2度点的个数,
 按下面2种情形讨论.

情形1 $t \leq 1$.

此时 T^* 形如 $C(n, a, b)$, 由定理1可知, $T^* \cong$
 $C(n, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor, \lceil \frac{k}{2} \rceil)$.

情形2 $t \geq 2$.

对于任意4度点 u , $T^* - u$ 至少有2个孤立点
 分支, 记为 v_1, v_2 , 另外, 2个分支记为 T_1, T_2 . 假设
 T_1, T_2 中均有2度点, 不妨设 $x \in V(T_1)$, $y \in$
 $V(T_2)$, $d_{T^*}(x) = d_{T^*}(y) = 2$, 不失一般性, 再设
 $\sigma_{T^*}(T_2) \leq \sigma_{T^*}(T_1)$, 则令 $T = T^* - \{uv_1, uv_2\} +$
 $\{yv_1, yv_2\}$, T 仍满足引理7所给条件, 但由引理3
 可知, $\rho(T) > \rho(T^*)$, 与 T^* 的定义矛盾. 于是, T^*
 中的2度点全在 T_1 中或全在 T_2 中, 故 T^* 形如
 $C(n, a, b)$, 由定理1可知, $T^* \cong C(n, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor, \lceil \frac{k}{2} \rceil)$.

综上, 引理7成立.

定义3 对于整数 n, k , 满足 $n \geq 5$, $1 \leq k \leq$
 $\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor$, 记 $T(n, k)$ 表示恰含 k 个4度点的 n 阶树
 的集合.

定理2 设 $T \in T(n, k)$, 则 $\rho(T) \leq$
 $\rho(C(n, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor, \lceil \frac{k}{2} \rceil))$, 等式成立当且仅当 $T \cong$
 $C(n, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor, \lceil \frac{k}{2} \rceil)$.

证明 当 $k=1$ 时, 由推论1可知结论成立. 现
 考虑 $k \geq 2$ 的情况, 设 T^* 为 $T(n, k)$ 中距离谱半径
 最大的树.

断言5 T^* 的最大偶度等于4.

否则, T^* 的最大偶度大于或等于6, 不妨设
 $d_{T^*}(u) = 2t$ 且 $t \geq 3$. 令 $N_{T^*}(u) = \{u_1, \dots, u_{2t}\}$,
 T_i 为 $T^* - u$ 的含有点 u_i ($1 \leq i \leq 2t$) 的分支. 不失
 一般性, 设 $\sigma_{T^*}(T_{2t}) \leq \sigma_{T^*}(T_1)$, 令 v 为 $V(T_{2t})$
 中的1个悬挂点, $T = T^* - uu_{2t} + vu_2$, T 中4度点
 的个数仍为 k , 即 $T \in T(n, k)$, 但由引理3可知,

$\rho(T) > \rho(T^*)$, 矛盾.

断言 6 T^* 的奇度点均为悬挂点.

现通过 2 种假设反正断言 6.

a. 假设 T^* 的最大奇度大于或等于 5, 不妨设 $d_{T^*}(u) = 2t + 1$ 且 $t \geq 2$. 令 $N_{T^*}(u) = \{u_1, \dots, u_{2t+1}\}$, T_i 为 $T^* - u$ 的含有点 u_i ($1 \leq i \leq 2t + 1$) 的分支. 不失一般性, 设 $\sigma_{T^*}(T_{2t+1}) \leq \sigma_{T^*}(T_1)$, 令 v 为 $V(T_{2t+1})$ 中的 1 个悬挂点, $T = T^* - \{uu_2, uu_3\} + \{vu_2, vu_3\}$, 注意到 $T \in T(n, k)$, 但由引理 3 可知, $\rho(T) > \rho(T^*)$, 矛盾.

b. 假设 T^* 的最大奇度等于 3, 不妨设 $d_{T^*}(u) = 3$. 令 $N_{T^*}(u) = \{u_1, u_2, u_3\}$, T_i 为 $T^* - u$ 的含有点 u_i ($i = 1, 2, 3$) 的分支. 不失一般性, 设 $\sigma_{T^*}(T_3) \leq \sigma_{T^*}(T_1)$, 令 v 为 $V(T_3)$ 中的 1 个悬挂点, $T = T^* - uu_2 + vu_2$, T 中 4 度点的个数仍为 k , 由引理 3 可知, $\rho(T) > \rho(T^*)$, 矛盾.

综合 a 和 b, 断言 6 成立, 从而 T^* 中点的度只有 3 种情况: 1, 2 或 4.

断言 7 T^* 是毛毛虫图.

否则, 设 T^* 是将 T^* 中所有悬挂点删去后所得的图, 则至少存在 1 个点, 在图 T^* 中的度为 3 或 4, 将这些点构成的集合记为 U . 对于任意 $u \in U$, 仍有 $d_{T^*}(u) = 4$, 令 $N_{T^*}(u) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $d_{T^*}(u_i) \geq 2$, $i = 1, 2, 3$. 再令 T_i 为 $T^* - u$ 的含有点 u_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 的分支, 则 T^* 的 2 度点必全属于某个 $V(T_i)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. 若不然, 存在度为 2 的 2 个点, 1 个在 $V(T_i)$ 中, 1 个在 $V(T_j)$ 中, $i \neq j$, 不妨设 $d_{T^*}(v_1) = d_{T^*}(v_3) = 2$, $v_1 \in V(T_1)$, $v_3 \in V(T_3)$, 不失一般性, 再设 $\sigma_{T^*}(T_3) \leq \sigma_{T^*}(T_1)$. 令 $T = T^* - \{uu_2, uu_4\} + \{v_3u_2, v_3u_4\}$, 则 $T \in T(n, k)$, 但由引理 3 可知, $\rho(T) > \rho(T^*)$, 矛盾. 故不妨设 T^* 的 2 度点全属于 $V(T_1)$.

现分 2 种情形讨论.

情形 1 $|U \setminus V(T_1)| = 1$.

此时 $U \setminus V(T_1) = \{u\}$, T^* 形如 $G_2^1(s, t)$, 且 $t, s \geq 2$, 不妨设 $t \geq s \geq 2$. 令 $T = G_2^1(s - 1, t + 1)$, 则 $T \in T(n, k)$, 由引理 6 可知, $\rho(T) > \rho(T^*)$, 矛盾.

情形 2 $|U \setminus V(T_1)| > 1$.

设 u' 为 $U \setminus V(T_1)$ 中距离 u 最远的点, 此时 u' 可看作情形 1 中的 u , 类似地, 可推出矛盾.

综合情形 1 和 2, 断言 7 成立.

因此, T^* 是 1 个最大度为 4 且奇度点均为

悬挂点的毛毛虫图, 结合引理 7, 可知 $T^* \cong C(n, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor, \lceil \frac{k}{2} \rceil)$, 结论得证.

定理 3 设 T 是 n ($n \geq 5$) 阶树, 其中, 度至少为 4 的点数为 k , $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor$, 则 $\rho(T) \leq \rho(C(n, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor, \lceil \frac{k}{2} \rceil))$, 等式成立当且仅当 $T \cong C(n, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor, \lceil \frac{k}{2} \rceil)$.

证明 当 $k = 1$ 时, 由推论 1 可知结论成立, 以下考虑 $k \geq 2$ 情况.

设 T^* 是满足定理 3 条件的距离谱半径最大的树. 假设 $\Delta(T^*) \geq 5$, 不妨设 $N_{T^*}(u) = \{u_1, \dots, u_\Delta\}$, 令 T_i 为 $T^* - u$ 的含有点 u_i ($i = 1, \dots, \Delta$) 的分支. 不失一般性, 设 $\sigma_{T^*}(T_\Delta) \leq \sigma_{T^*}(T_1)$, 令 $T = T^* - \{uu_i: 2 \leq i \leq \Delta - 1\} + \{wu_i: 2 \leq i \leq \Delta - 1\}$, 其中, w 为 T^* 的属于 $V(T_\Delta)$ 的悬挂点. 易知 T 仍满足题设条件, 由引理 3 可知, $\rho(T) > \rho(T^*)$, 矛盾. 所以, $T^* \in T(n, k)$, 结合定理 2, 定理 3 得证.

参考文献:

- [1] HORN R A, JOHNSON C R. Matrix analysis [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- [2] STEVANOVIĆ D, ILIĆ A. Distance spectral radius of trees with fixed maximum degree [J]. Electronic Journal of Linear Algebra, 2010, 20(1): 168 - 179.
- [3] CAYLEY A. A theorem in the geometry of position [J]. The Cambridge Mathematical Journal, 1841, 2: 267 - 271.
- [4] GRAHAM R L, POLLAK H O. On the addressing problem for loop switching [J]. Bell System Technical Journal, 1971, 50(8): 2495 - 2519.
- [5] AOUCHICHE M, HANSEN P. Distance spectra of graphs: a survey [J]. Linear Algebra and its Applications, 2014, 458(2): 301 - 386.
- [6] LIN H Y, ZHOU B. The distance spectral radius of graphs with given number of odd vertices [J]. Electronic Journal of Linear Algebra, 2016, 31(1): 286 - 305.
- [7] WANG Y N, ZHOU B. On distance spectral radius of graphs [J]. Linear Algebra and its Applications, 2013, 438(8): 3490 - 3503.
- [8] RUZIEH S N, POWERS D L. The distance spectrum of the path P_n and the first distance eigenvector of connected graphs [J]. Linear Multilinear Algebra, 1990, 28(1/2): 75 - 81.

(编辑: 石 瑛)