

由扩张法构造带 Novikov 结构的李代数

胡建华, 王资敏, 曾博文

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 在特征为零的数域上给出构造李代数带 Novikov 结构的一种方法——扩张法. 利用 2-上循环和李代数表示, 由一个阿贝尔李代数的一个任意李代数给出了扩张李代数的定义; 带 Novikov 结构的李代数既具有仿射结构, 也具有 Novikov 结构, 恰当定义乘积后, 给出了扩张李代数具有仿射结构的充要条件, 给出了扩张李代数具有 Novikov 结构的充要条件. 此方法在实际中仅适用于一些特殊的李代数, 故给出了一个由扩张法构造带 Novikov 结构的低维李代数的实例.

关键词: 2-上循环; 仿射结构; Novikov 结构; 扩张

中图分类号: O 152 **文献标志码:** A

Construction of Lie Algebras with Novikov Structure via Extensions

HU Jianhua, WANG Zimin, ZENG Bowen

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: A method via extension was proposed to construct Lie algebra with Novikov structure over a field of characteristic zero. Using 2-cocycle and the representations of Lie algebras, the definition of extended Lie algebras was given by an Abelian Lie algebra and an arbitrary Lie algebra. A Lie algebra with Novikov structure is endowed with both affine structure and Novikov structure. With a proper product defined, the necessary and sufficient conditions for the extended Lie algebras endowed with affine structure was given. And the necessary and sufficient conditions for the extended Lie algebras endowed with Novikov structure was given. In practice the method is only suited to some special Lie algebras. An example was presented of the low-dimensional Lie algebra with the Novikov structure constructed by extension.

Keywords: 2-cocycle; affine structure; Novikov structure; extension

收稿日期: 2017-03-29

基金项目: 上海理工大学教师教学发展研究基金资助项目(CFTD17015Z, CFTD17016Z)

第一作者: 胡建华(1978-), 女, 讲师. 研究方向: 代数群及其表示理论. E-mail: smilydragon2011@163.com

1 仿射结构和 Novikov 结构

幂零李代数^[1-2]和可解李代数^[1-3]是李理论中两类重要的李代数,但因其结构的复杂性,还有很多问题有待解决,受到许多学者的关注. Novikov 代数是一类应用广泛的代数,文献[4]提出了具有 Novikov 结构的李代数的概念,并用来研究幂零李代数和可解李代数的结构,同时指出,并不是所有的李代数都能带有 Novikov 结构. 文献[5]证明了任意特征为 0 的域上具有 Novikov 结构的有限维李代数是可解的. 因此,Novikov 结构在讨论李代数的可解性上具有重要意义. 文献[6]探讨了 k -步可解李代数的 Novikov 结构. 文献[7]给出了如何利用 2-上循环和李代数表示构造扩张李代数的方法. 本文将在特征为零的域上给出一种赋予扩张李代数 Novikov 结构的方法,给出了扩张李代数具有 Novikov 结构的充要条件.

定义 1^[1-2,8] 设 g 是域 k 上的向量空间,在 g 中定义了一个李括号积(记为 $[\cdot, \cdot]$),对 $\forall x, y \in g$,有 $[x, y] \in g$,且以下 3 个条件成立:

- 李括号积是双线性的;
- $[x, x] = 0, \forall x \in g$;
- $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \forall x, y, z \in g$ (Jacobi 等式).

称 g 为域 k 上的一个李代数.

由条件 b 易得,当 $\text{Char } k \neq 2$ 时,有 $[x, y] = -[y, x], \forall x, y \in g$.

定义 2^[5,9] 设 k 是任意域,代数 A 的乘积 $(x, y) \mapsto x \cdot y$,若满足等式

$$x \cdot (y \cdot z) - (x \cdot y) \cdot z = y \cdot (x \cdot z) - (y \cdot x) \cdot z, \quad \forall x, y, z \in A \quad (1)$$

称 A 为左对称代数.

若此乘法还满足

$$(x \cdot y) \cdot z = (x \cdot z) \cdot y, \quad \forall x, y, z \in A \quad (2)$$

称 A 为 Novikov 代数.

定义 3^[5,9] 设 k 是任意域,若李代数 g 上定义了左对称乘积 $(x, y) \mapsto x \cdot y$,且满足

$$[x, y] = x \cdot y - y \cdot x, \quad \forall x, y \in g \quad (3)$$

则称 g 具有仿射结构.

若该乘积还满足式(2),则称 g 具有 Novikov 结构.

定义 4^[5,9] 一个李代数 g 的导出列: $g^{(1)} = g, g^{(i+1)} = [g^{(i)}, g^{(i)}], i \in \mathbb{N}$,若存在整数 n ,有 $g^{(n+1)} =$

0 ,则称 g 是 n 步可解的;一个李代数 g 的下中心列: $g^1 = g, g^{i+1} = [g, g^i], i \in \mathbb{N}$,若存在整数 n ,有 $g^{n+1} = 0$,则称 g 是 n 步幂零的.

性质 1 1 步可解李代数、1 步幂零李代数是阿贝尔李代数.

证明 由 $g^{(2)} = g^2 = [g, g] = 0$,结论显然成立.

性质 2 3 步幂零李代数是 2 步可解步李代数.

证明 设李代数 g 是 3 步幂零的,则 $g^{(4)} = [g, [g, [g, g]]] = 0$. 由 Jacobi 等式, $\forall x, y, z, w \in g$,
 $[[x, y], [z, w]] = [x, [y, [z, w]]] + [y, [[z, w], x]] = [x, [y, [z, w]]] - [y, [x, [z, w]]] = 0$

故 $g^{(3)} = [g^{(2)}, g^{(2)}] = 0, g$ 是 2 步可解李代数.

2 扩张法构造 Novikov 结构

设 k 是特征为零的域, a 是一个阿贝尔李代数, b 是任意李代数. 因为, a 是阿贝尔李代数,存在自然的 b -模^[10]结构,记为

$\varphi: b \rightarrow \text{End}(a), (x, a) \mapsto \varphi(x)a, \forall x \in b, a \in a$ 且对所有的 $x, y \in b$,有

$$\varphi([x, y]) = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x) \quad (4)$$

记 $\Omega \in Z^2(b, a)$ 表示 2-上循环,它是斜对称双线性映射 $\Omega: b \times b \rightarrow a$,且满足

$$\varphi(x)\Omega(y, z) - \varphi(y)\Omega(x, z) + \varphi(z)\Omega(x, y) = \Omega([x, y], z) - \Omega([x, z], y) + \Omega([y, z], x) \quad (5)$$

设 g 是 b 经由 a 的扩张,即存在一个短正合列

$0 \rightarrow a \xrightarrow{\iota} g \xrightarrow{\pi} b \rightarrow 0$. 此时 $\iota(a) \cong a, \pi(b) \cong b$,可记 $g = a \ltimes b$. 在 g 上定义李括号:

$$[(a, x), (b, y)] := (\varphi(x)b - \varphi(y)a + \Omega(x, y), [x, y]), \quad \forall a, b \in a, x, y \in b \quad (6)$$

则 $g = a \ltimes b$ 构成一个李代数,称 g 为李代数 b 经由阿贝尔李代数 a 扩张的李代数.

现在 g 上构造 Novikov 结构.

假设 $g = (a, b, \varphi, \Omega)$ 是如上所定义的扩张李代数,且李代数 a 有仿射结构 $(a, b) \mapsto a \cdot b, \forall a, b \in a, [a, b] = a \cdot b - b \cdot a; b$ 有仿射结构 $(x, y) \mapsto x \cdot y, \forall x, y \in b, [x, y] = x \cdot y - y \cdot x$. 再设 $\omega: b \times b \rightarrow a$ 是一个双线性映射, $\varphi_1, \varphi_2: b \rightarrow \text{End}(a)$ 是李代数表示^[11]. 定义一个双线性乘积 $g \times g \rightarrow g$, $\forall a, b \in a, x, y \in b$,

$$(a, x)^\circ(b, y) := (a \cdot b + \varphi_1(y)a + \varphi_2(x)b + \omega(x, y), x \cdot y) \quad (7)$$

引理 1 阿贝尔李代数 a 若有仿射结构, 则 a 具有交换性和结合性, 即

$$a \cdot b = b \cdot a; (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall a, b, c \in a$$

证明 因为 a 是阿贝尔的, 则 $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a = 0$, 得 $a \cdot b = b \cdot a$. 又因 a 是左对称的, 有

$$a \cdot (b \cdot c) - (a \cdot b) \cdot c = b \cdot (a \cdot c) - (b \cdot a) \cdot c$$

即 $a \cdot (b \cdot c) = b \cdot (a \cdot c)$, 可得

$$(a \cdot b) \cdot c = c \cdot (a \cdot b) = c \cdot (b \cdot a) = b \cdot (c \cdot a) = b \cdot (a \cdot c) = a \cdot (b \cdot c)$$

引理 2 若李代数 b 是阿贝尔的, 则 $g = (a, b, \varphi, \Omega)$ 是两步可解李代数.

证明 若李代数 b 是阿贝尔的, 由 $[(a, x), (b, y)] = (\varphi(x)b - \varphi(y)a + \Omega(x, y), [x, y])$, 可知

$$g^{(2)} = [g, g] \subset (a, o), g^{(3)} = [g^{(2)}, g^{(2)}] \subset (o, o) = o$$

定理 1 式(7)定义了李代数 g 上的一个仿射结构^[12] 当且仅当满足下面的条件:

- a. $\omega(x, y) - \omega(y, x) = \Omega(x, y)$;
- b. $\varphi_2(x) - \varphi_1(x) = \varphi(x)$;
- c. $\varphi_2(x)\omega(y, z) - \varphi_2(y)\omega(x, z) - \varphi_1(z) \cdot \Omega(x, y) = \omega(y, x \cdot z) - \omega(x, y \cdot z) + \omega([x, y], z)$;
- d. $a \cdot \omega(y, z) + \varphi_1(y \cdot z)a = \varphi_2(y)\varphi_1(z)a - \varphi_1(z)\varphi(y)a$;
- e. $a \cdot (\varphi_1(z)b) = b \cdot (\varphi_1(z)a)$;
- f. $\varphi_2(y)(a \cdot c) - a \cdot (\varphi_2(y)c) = (\varphi(y)a) \cdot c$;
- g. $\Omega(x, y) \cdot c = 0$.

$$\forall a, b, c \in a, x, y, z \in b.$$

证明 $\forall u = (a, x), v = (b, y), w = (c, z) \in g$, 需证乘积。满足式(3)和式(1). 由式(7)及 a, b 的仿射性得

$$\begin{aligned} u \circ v - v \circ u &= (a \cdot b + \varphi_1(y)a + \varphi_2(x)b + \omega(x, y), x \cdot y) - (b \cdot a + \varphi_1(x)b + \varphi_2(y)a + \omega(y, x), y \cdot x) \\ &= ((\varphi_2(x) - \varphi_1(x))b - (\varphi_2(y) - \varphi_1(y))a + \omega(x, y) - \omega(y, x), [x, y]) \end{aligned}$$

由式(6), $[u, v] = u \circ v - v \circ u$ 当且仅当 $(\varphi_2(x) - \varphi_1(x))b - (\varphi_2(y) - \varphi_1(y))a + \omega(x, y) - \omega(y, x) = \varphi(x)b - \varphi(y)a + \Omega(x, y)$

令 $a = b = 0$, 可得 $\omega(x, y) - \omega(y, x) = \Omega(x, y)$, 由此再考虑 $a = 0$ 的情况, 得 $\varphi_2(x) - \varphi_1(x) = \varphi(x)$. 又

$$u \circ (v \circ w) - (u \circ v) \circ w = v \circ (u \circ w) - (v \circ u) \circ w \Leftrightarrow$$

$$u \circ (v \circ w) - v \circ (u \circ w) = [u, v] \circ w$$

经计算,

$$\begin{aligned} u \circ (v \circ w) - v \circ (u \circ w) &= (a \cdot (b \cdot c) - b \cdot (a \cdot c) + a \cdot (\varphi_1(z)b) - b \cdot (\varphi_1(z)a) + a \cdot (\varphi_2(y)c) - b \cdot (\varphi_2(x)c) + a \cdot \omega(y, z) - b \cdot \omega(x, z) + \varphi_1(y \cdot z)a - \varphi_1(x \cdot z)b + \varphi_2(x)(b \cdot c) - \varphi_2(y)(a \cdot c) + \varphi_2(x)\varphi_1(z)b - \varphi_2(y)\varphi_1(z)a + [\varphi_2(x), \varphi_2(y)]c + \varphi_2(x)\omega(y, z) - \varphi_2(y)\omega(x, z) + \omega(x, y \cdot z) - \omega(y, x \cdot z), \\ &\quad x \cdot (y \cdot z) - y \cdot (x \cdot z)) \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} [u, v] \circ w &= ((\varphi(x)b) \cdot c - (\varphi(y)a) \cdot c + \Omega(x, y) \cdot c + \varphi_1(z)\varphi(x)b - \varphi_1(z)\varphi(y)a + \varphi_1(z)\Omega(x, y) + \varphi_2([x, y])c + \omega([x, y], z), [x, y] \cdot z) \end{aligned}$$

式(1)成立当且仅当以上 2 个等式相等. 令 $a = b = c = 0$, 可得条件 c. 令 $a = b = 0$, 由条件 c 可得条件 g; 令 $b = c = 0$, 由条件 c 可得条件 d; 令 $z = x = b = 0$, 可得条件 f; 令 $c = x = y = 0$, 可得条件 e. 反之, 若条件 a—g 成立, 则有式(1)和(3)成立, 得证.

定理 2 式(7)定义了李代数 g 上的一个 Novikov 结构当且仅当乘积。满足条件 a—g, 且满足条件:

- h. $\varphi_1(z)\omega(x, y) - \varphi_1(y)\omega(x, z) = \omega(x \cdot z, y) - \omega(x \cdot y, z)$;
- i. $\omega(x, y) \cdot c + \varphi_2(x \cdot y)c = \varphi_1(y)\varphi_2(x)c$;
- j. $[\varphi_1(x), \varphi_1(y)] = 0$;
- k. $(\varphi_2(x)b) \cdot c = (\varphi_2(x)c) \cdot b$;
- l. $\varphi_1(z)(a \cdot b) = (\varphi_1(z)a) \cdot b$;
- m. $(x \cdot y) \cdot z = (x \cdot z) \cdot y$.

证明 $\forall u = (a, x), v = (b, y), w = (c, z) \in g$, 需证乘积。满足式(2).

$$\begin{aligned} (u \circ v) \circ w &= ((a \cdot b) \cdot c + (\varphi_1(y)a) \cdot c + (\varphi_2(x)b) \cdot c + \omega(x, y) \cdot c + \varphi_1(z)(a \cdot b) + \varphi_1(z)\varphi_1(y)a + \varphi_1(z)\varphi_2(x)b + \varphi_1(z)\omega(x, y) + \varphi_2(x \cdot y)c + \omega(x \cdot y, z), (x \cdot y) \cdot z) \\ (u \circ w) \circ v &= ((a \cdot c) \cdot b + (\varphi_1(z)a) \cdot b + (\varphi_2(x)c) \cdot b + \omega(x, z) \cdot b + \varphi_1(y)(a \cdot c) + \varphi_1(y)\varphi_1(z)a + \varphi_1(y)\varphi_2(x)c + \varphi_1(y)\omega(x, z) + \varphi_2(x \cdot z)b + \omega(x \cdot z, y), (x \cdot z) \cdot y) \end{aligned}$$

若 $(u \circ v) \circ w = (u \circ w) \circ v$, 由 u, v, w 的任意性, 比较上两式的右边, 令 $a = b = c = 0$, 得条件 h 和 m. 令 $a = b = 0$ 时, 结合条件 h, 可得条件 i; 令 $b = c = 0$ 时, 结合条件 h, 可得 $\varphi_1(z)\varphi_1(y)a = \varphi_1(y)\varphi_1(z)a$, 由 a, y, z 的任意性, 可得条件 j. 令 $y = z = a = 0$, 可得条件 k, 最后, 令 $x = y = c = 0$, 可

得式(1).反之,若条件 a—m 成立,则 g 满足式(1)~(3),具有 Novikov 结构.得证.

推论 1 设 $g = (a, b, \varphi, \Omega)$, 若 b 是阿贝尔的, 且 a, b 上的左对称乘积是平凡的, 则式(7)在李代数 g 上定义一个仿射结构当且仅当满足下面的条件:

- a. $\omega(x, y) - \omega(y, x) = \Omega(x, y)$;
- b. $\varphi_2(x) - \varphi_1(x) = \varphi(x)$;
- c. $\varphi_2(x)\omega(y, z) - \varphi_2(y)\omega(x, z) = \varphi_1(z) \cdot \Omega(x, y)$;
- d. $[\varphi_1(x), \varphi_2(y)] = \varphi_1(x)\varphi_1(y)$.

进一步,若式(7)在 g 上定义了一个 Novikov 结构,还需满足条件:

- e. $\varphi_1(z)\omega(x, y) = \varphi_1(y)\omega(x, z)$;
- f. $\varphi_1(x)\varphi_2(y) = 0$;
- g. $[\varphi_1(x), \varphi_1(y)] = 0$.

证明 因为, a, b 上的左对称乘积是平凡的, 即 $a \cdot b = x \cdot y = 0, \forall a, b \in a, x, y \in b$. 由定理 1 和定理 2, 结论显然成立.

3 实 例

定理 1 和定理 2 给出了扩张李代数 $g = (a, b, \varphi, \Omega)$ 具有 Novikov 结构的充要条件, 即找寻一系列方程的解, 实际中这样的解并不容易求出, 因此, 此方法在实际中只适用于一些特殊的李代数. 现仅考虑一种低维的情况.

例 1 设 g 为五维李代数, 其基为 (a, b, c, x, y) , 非零李括号为

$$[x, y] = a, [x, a] = b, [y, a] = c$$

不难验算 g 是一个 3 步幂零李代数, 因此, g 是 2 步可解的. 现分 3 步在 g 上构造一个 Novikov 结构.

a. 将 g 看成一个扩张李代数, 取 $a = \text{span}\{a, b, c\}, b = \text{span}\{x, y\}$, a, b 为阿贝尔李代数, 令

$$\varphi: b \rightarrow \text{End}(a), \varphi(x)a = b, \varphi(x)b = \varphi(x)c = 0$$

$$\varphi(y)a = c, \varphi(y)b = \varphi(y)c = 0$$

$$\Omega \in Z^2(b, a), \Omega(x, y) = a$$

则 $g = a \times b = (a, b, \varphi, \Omega)$ 是 b 经由 a 扩张的李代数.

b. 寻找满足推论 1 中等式 a—g 的解 $\varphi_1, \varphi_2, \omega$. 可假设 a, b 有一个平凡的左对称乘积, 只需简单验算, 可取

$$\varphi_1: b \rightarrow \text{End}(a), \varphi_1(x)a = -b/2$$

$$\varphi_1(x)b = \varphi_1(x)c = 0, \varphi_1(y) \equiv 0$$

$$\varphi_2: b \rightarrow \text{End}(a, \varphi_2(x)a = b/2$$

$$\varphi_2(x)b = \varphi_2(x)c = 0$$

$$\varphi_2(y)a = c, \varphi_2(y)b = \varphi_2(y)c = 0$$

$$\omega: b \times b \rightarrow a, \omega(x, x) = \omega(x, y) =$$

$$\omega(y, y) = 0, \omega(y, x) = -a$$

c. 根据式(7)定义乘积 $\circ$. 因为, $g = a \times b, a \cong (a, 0), b \cong (0, b)$, 根据式(7), 可取非零乘积 $a \circ x = -b/2, x \circ a = b/2, y \circ a = c, y \circ x = -a$ 即可, 这样 $g = a \times b = (a, b, \varphi, \Omega)$ 就具有 Novikov 结构.

参考文献:

- [1] HUMPHREYS J E. Introduction to Lie algebras and representation theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1972.
- [2] 苏育才, 卢才辉, 崔一敏. 有限维半单李代数简明教程 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [3] DE GRAAF W A. Classification of solvable Lie algebras [J]. Experimental Mathematics, 2005, 14(1): 15 - 25.
- [4] ZELMANOV E. On a class of local translation invariant Lie algebras [J]. Soviet Mathematics-Doklady, 1987, 35: 216 - 218.
- [5] BURDE D. Classical r-matrices and Novikov algebras [J]. Geometriae Dedicata, 2006, 122(1): 145 - 157.
- [6] BURDE D, DEKIMPE K, VERCAMMEN K. Novikov algebras and Novikov structures on Lie algebras [J]. Linear Algebra and its Applications, 2008, 429(1): 31 - 41.
- [7] BENKART G M, MOODY R V. Derivations, central extensions, and affine Lie algebras [J]. Algebras, Groups and Geometries, 1986, 3(4): 456 - 492.
- [8] 胡建华, 赵卫萍. 一类特殊幂零李代数的结构 [J]. 上海理工大学学报, 2015, 37(3): 215 - 219.
- [9] BURDE D, DEKIMPE K. Novikov structures on solvable Lie algebras [J]. Journal of Geometry and Physics, 2006, 56(9): 1837 - 1855.
- [10] 刘绍学, 郭晋云, 朱彬, 等. 环与代数 [M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2009.
- [11] 胡建华, 刘国华. 有限域上型 A1 的 Chevalley 群之间的同态 [J]. 上海理工大学学报, 2009, 31(4): 307 - 310.
- [12] BURDE D. Affine structures on nilmanifolds [J]. International Journal of Mathematics, 1996, 7(5): 599 - 616.

(编辑: 石 瑛)