

一类三维非粘性可压流体力学方程解的有限传播速度及奇异性

韩 平¹, 徐国静²

(1. 河海大学 理学院, 南京 211100; 2. 河海大学 文天学院, 马鞍山 243031)

摘要: 研究了一类三维非粘性的可压流体力学方程局部光滑解的性质, 证明了当方程的初值满足一定条件时, 解在有限时间内会形成奇异. 讨论了此方程具有有限传播速度, 并利用有限传播速度讨论解的奇异性. 解的有限传播速度对研究解的奇异性起非常重要的作用.

关键词: 三维非粘性可压流体力学方程; 有限传播速度; 解的奇异性

中图分类号: O 175.2 **文献标志码:** A

Finite Propagation Speed and Singularity of the Solution for a System of Three-Dimensional Inviscid Compressible Fluid Equations

HAN Ping¹, XU Guojing²

(1. College of Science, Hohai University, Nanjing 211100, China;

2. Wentian College, Hohai University, Maanshan 243031, China)

Abstract: The properties of local smooth solutions of a system of three-dimensional inviscid compressible fluid equations were investigated. It is proved that a singular solution will be generated in the limited time when the initial value of the equations satisfies some conditions. The finite speed of propagation was discussed and used to study the singularity of the solution. The finite speed of propagation of the solution plays a very important role to study the singularity of the solution.

Keywords: three-dimensional inviscid compressible equation; finite propagation speed; singular solution

1 问题的提出

研究了 Vlasov-Fokker-Planck 与 Navier-Stokes

方程的一类极限模型^[1], 在三维框架下, 方程为

$$\begin{cases} \partial_t n + \operatorname{div}_x(nv) = 0 \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho v) = 0 \\ \partial_t((n + \rho)v) + \operatorname{div}_x((n + \rho)v \otimes v) + \nabla_x p - \mu \Delta v = 0 \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期: 2017-04-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11201116)

第一作者: 韩 平(1991-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 偏微分方程. E-mail: 632401352@qq.com

式中: $n(x, t) \in \mathbb{R}^+$, $\rho(x, t) \in \mathbb{R}^+$, 均表示密度; $v(x, t) \in \mathbb{R}^3$, 表示流速; $x \in \mathbb{R}^3$, 表示空间变量; $t > 0$, 表示时间变量; 压力 p 与密度相关, 满足 $p = p(n, \rho) = n + \rho^\gamma, \gamma > 1$.

在非粘性情况下, $\mu = 0$, 在粘性情况下, $\mu > 0$.

若 $\gamma = 1, \mu = 0$, 将 $n + \rho$ 看成一个变量, 则方程(1)变为经典的 Euler 方程. 本文主要研究 $\gamma > 1, \mu = 0$ 的情况.

对方程(1), 给定初值

$$(n, \rho, v)|_{t=0} = (n_0, \rho_0, v_0) \quad (2)$$

Sideris^[2]研究了二维可压流体方程的衰减奇异结构; Nishida^[3]研究了一维带阻尼项的 Euler 方程光滑解的整体存在性; Dafermos^[4]研究了耗散项能阻止波动对解的破坏; Li^[5]研究了带线性退化的一般双曲系统整体光滑解的存在性; Sideris 等^[6]研究了高维带线性阻尼的 Euler 方程解的整体存在性及爆破.

利用一般双曲方程的局部光滑解存在性理论, 方程(1)的局部光滑解是存在的^[7-8]. 双曲型方程的特点是在一定条件下, 解在有限时间内会爆破, 本文主要讨论方程(1)的有限传播速度, 并利用有限传播速度讨论解的爆破.

双曲型方程光滑解的局部存在性定理是众所周知的结论. 对于一维的双曲型方程的光滑解的有限时间爆破, 特别是单个方程, 如 Burgers 方程, 可以利用特征线方法给出很好的描述, 这一类方法对于研究高维方程组有一定的困难^[5]. 本文借鉴文献^[6], 通过定义一个积分平均量, 得出式(1)满足一定的微分不等式, 从而证明了高维双曲型方程组的解在一定条件下不能整体存在. 由于光滑解的有限时间爆破, 所以, 需要进一步讨论方程的弱解, 即满足积分方程的 L_∞ 解, 此时方程中的导数应理解为解的弱导数^[5]. 弱解的存在性以及光滑解的奇异形成机制, 即解的导数在某范数下的爆破将是本文研究的内容.

2 局部存在性和有限传播速度

设 $V(x, t) = (n(x, t), \rho(x, t), v(x, t))$, $V_0(x) = V(x, 0) = (n_0(x), \rho_0(x), v_0(x))$, $\bar{V} = (\bar{n}, \bar{\rho}, 0)$, 其中, $\bar{n} > 0, \bar{\rho} > 0$ 为常数, 对于初值问题式(1)和式(2), 首先给出光滑解的存在性定理.

定理 1 若 $(V_0 - \bar{V}) = (n_0 - \bar{n}, \rho_0 - \bar{\rho}, v_0) \in$

H^3 , 则初值问题式(1)和式(2)存在一个唯一的光滑解 $V - \bar{V}$ 且 $(V - \bar{V}) \in C([0, T], H^3) \cap C^1([0, T], H^2)$, 有限时间 $T > 0$ 且 T 依赖于初值 V_0 与 $\bar{V}$.

定理 1 可利用不动点定理证明, 可参考文献^[7-8]. 现利用定理 1 证明方程(3)的解具有有限传播速度.

定理 2 假设 $(V_0 - \bar{V}) \in H^3$, 对任意给定的 $T > 0, (V - \bar{V}) \in C([0, T], H^3) \cap C^1([0, T], H^2)$ 是初值问题式(1)和式(2)的一个解, 如果存在 $R > 0$, 使得 $\text{supp}(V_0 - \bar{V}) \subset \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq R\}$, 则存在 $\sigma > 0$ 且依赖于 $\bar{n}, \bar{\rho}$. 使得 $\text{supp}(V(\cdot, t) - \bar{V}) \subset \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq R + \sigma t\}$, 其中, $0 \leq t < T$.

证明 将方程(1)在常状态 $\bar{V} = (\bar{n}, \bar{\rho}, 0)$ 下作线性化处理, 得到如下方程:

$$\begin{cases} \partial_t n + \bar{n} \text{div}_x v = -\nabla n \cdot v - (n - \bar{n}) \text{div}_x v \\ \partial_t \rho + \bar{\rho} \text{div}_x v = -\nabla \rho \cdot v - (\rho - \bar{\rho}) \text{div}_x v \\ \partial_t v + \frac{1}{\bar{n} + \bar{\rho}} \nabla n + \frac{\gamma \bar{\rho}^{\gamma-1}}{\bar{n} + \bar{\rho}} \nabla \rho = \\ -v \cdot \nabla v - \left(\frac{1}{\bar{n} + \bar{\rho}} - \frac{1}{\bar{n} + \bar{\rho}} \right) \cdot \\ \nabla n - \left(\frac{\gamma \bar{\rho}^{\gamma-1}}{\bar{n} + \bar{\rho}} - \frac{\gamma \bar{\rho}^{\gamma-1}}{\bar{n} + \bar{\rho}} \right) \nabla \rho \end{cases} \quad (3)$$

将式(3)的第 1 个方程乘以 $(n - \bar{n}) B_1$, 第 2 个方程乘以 $(\rho - \bar{\rho}) B_2$, 第 3 个方程乘以 v , 其中, $B_1 =$

$$\frac{1}{\bar{n}(\bar{n} + \bar{\rho})}, B_2 = \frac{\gamma \bar{\rho}^{\gamma-2}}{\bar{n} + \bar{\rho}}. \text{ 将 3 式相加, 整理得}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{B_1}{2} (n - \bar{n})^2 + \frac{B_2}{2} (\rho - \bar{\rho})^2 + \frac{1}{2} |v|^2 \right) +$$

$$B_1 \bar{n} \nabla \cdot ((n - \bar{n}) v) + B_2 \bar{\rho} \nabla \cdot ((\rho - \bar{\rho}) v) =$$

$$B_1 E_1 (n - \bar{n}) + B_2 E_2 (\rho - \bar{\rho}) + E_3 v \quad (4)$$

其中

$$\begin{cases} E_1 = -\nabla n \cdot v - (n - \bar{n}) \text{div}_x v \\ E_2 = -\nabla \rho \cdot v - (\rho - \bar{\rho}) \text{div}_x v \\ E_3 = -v \cdot \nabla v - \left(\frac{1}{\bar{n} + \bar{\rho}} - \frac{1}{\bar{n} + \bar{\rho}} \right) \cdot \\ \nabla n - \left(\frac{\gamma \bar{\rho}^{\gamma-1}}{\bar{n} + \bar{\rho}} - \frac{\gamma \bar{\rho}^{\gamma-1}}{\bar{n} + \bar{\rho}} \right) \nabla \rho \end{cases} \quad (5)$$

任取 $\tau \in [0, t]$, 定义斜截锥: $G_\tau = \{(y, s) : |y - x| \leq \sigma(t - s), 0 \leq s \leq \tau\}$, 将式(4)在 G_τ 上积分, 利用散度定理, 式(4)左边项积分, 可得

$$\begin{aligned}
& \int_{|y-x| \leq \sigma(t-\tau)} \left(\frac{B_1}{2} (n - \bar{n})^2 + \right. \\
& \quad \left. \frac{B_2}{2} (\rho - \bar{\rho})^2 + \frac{1}{2} |v|^2 \right) (y, \tau) dy - \\
& \int_{|y-x| \leq \sigma t} \left(\frac{B_1}{2} (n - \bar{n})^2 + \frac{B_2}{2} (\rho - \bar{\rho})^2 + \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{2} |v|^2 \right) (y, 0) dy + \\
& \quad \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}} \int_0^\tau \int_{|y-x|=\sigma(t-s)} \left[\sigma \left(\frac{B_1}{2} (n - \bar{n})^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{B_2}{2} (\rho - \bar{\rho})^2 + \frac{1}{2} |v|^2 \right) + \frac{y-x}{|y-x|} \cdot \right. \\
& \quad \left. (B_1 \bar{n} (n - \bar{n}) v + B_2 \bar{\rho} (\rho - \bar{\rho}) v) \right] dS_y ds \quad (6)
\end{aligned}$$

利用 Cauchy 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{y-x}{|y-x|} B_1 \bar{n} ((n - \bar{n}) v) \right| \leq \\
& B_1 \bar{n} |(n - \bar{n}) v| \leq \frac{B_1 \bar{n}}{2} ((n - \bar{n})^2 + |v|^2)
\end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{y-x}{|y-x|} B_2 \bar{\rho} ((\rho - \bar{\rho}) v) \right| \leq \\
& \frac{B_2 \bar{\rho}}{2} ((\rho - \bar{\rho})^2 + |v|^2)
\end{aligned}$$

取 $\sigma = 2 \max \{ \bar{n}, \bar{\rho}, B_1 \bar{n}, B_2 \bar{\rho} \}$, 则式(6)的第3项中的被积函数可以估计为

$$\begin{aligned}
& \sigma \left(\frac{B_1}{2} (n - \bar{n})^2 + \frac{B_2}{2} (\rho - \bar{\rho})^2 + \frac{1}{2} |v|^2 \right) + \\
& \quad \frac{y-x}{|y-x|} (B_1 \bar{n} (n - \bar{n}) v + B_2 \bar{\rho} (\rho - \bar{\rho}) v) \geq \\
& \quad \left(\frac{B_1 \sigma}{2} - \frac{B_1 \bar{n}}{2} \right) (n - \bar{n})^2 + \left(\frac{B_2 \sigma}{2} - \frac{B_2 \bar{\rho}}{2} \right) (\rho - \bar{\rho})^2 + \\
& \quad \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{B_1 \bar{n}}{2} - \frac{B_2 \bar{\rho}}{2} \right) |v|^2 \geq 0. \quad (7)
\end{aligned}$$

由此可知, 式(6)的第3项积分是非负的, 现估计式(4)的右边项在 G_τ 上的积分.

利用 Cauchy 不等式, 式(5)中 E_1, E_2, E_3 分别估计为

$$\begin{aligned}
& \iint_{G_\tau} (B_1 E_1 (n - \bar{n})) dy ds \leq \\
& C \iint_{G_\tau} |\nabla V| (|v(n - \bar{n})| + (n - \bar{n})^2) dy ds \leq \\
& C \iint_{G_\tau} |\nabla V| (|v|^2 + (n - \bar{n})^2) dy ds
\end{aligned}$$

同理,

$$\iint_{G_\tau} (E_2 (\rho - \bar{\rho})) dy ds \leq$$

$$\begin{aligned}
& C \iint_{G_\tau} |\nabla V| (|v|^2 + (\rho - \bar{\rho})^2) dy ds \\
& \iint_{G_\tau} E_3 v dy ds \leq - \iint_{G_\tau} \left(|v|^2 \nabla v + \left(\frac{1}{n + \rho} - \frac{1}{\bar{n} + \bar{\rho}} \right) \right. \\
& \quad \left. \nabla n \cdot v + \left(\frac{\gamma \rho^{\gamma-1}}{n + \rho} - \frac{\gamma \bar{\rho}^{\gamma-1}}{\bar{n} + \bar{\rho}} \right) \nabla \rho \cdot v \right) dy ds \leq \\
& C \iint_{G_\tau} |\nabla V| ((n - \bar{n})^2 + (\rho - \bar{\rho})^2 + |v|^2) dy ds \\
& \text{式(4)的右边项在 } G_\tau \text{ 上积分, 可得} \\
& \iint_{G_\tau} (B_1 E_1 (n - \bar{n}) + B_2 E_2 (\rho - \bar{\rho}) + E_3 v) dy ds \leq \\
& C \iint_{G_\tau} |\nabla V| ((n - \bar{n})^2 + (\rho - \bar{\rho})^2 + |v|^2) dy ds \quad (8)
\end{aligned}$$

存在常数 $C > 0$, 合并式(6)~(8), 则式(4)化简为

$$\begin{aligned}
& \int_{|y-x| \leq \sigma(t-\tau)} ((n - \bar{n})^2 + (\rho - \bar{\rho})^2 + |v|^2) (y, \tau) dy - \\
& \int_{|y-x| \leq \sigma t} ((n - \bar{n})^2 + (\rho - \bar{\rho})^2 + |v|^2) (y, 0) dy \leq \\
& C \int_0^\tau \int_{|y-x| \leq \sigma(t-s)} |\nabla V| ((n - \bar{n})^2 + \\
& (\rho - \bar{\rho})^2 + |v|^2) (y, s) dy ds
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
f(\tau) &= \int_{|y-x| \leq \sigma(t-\tau)} ((n - \bar{n})^2 + \\
& (\rho - \bar{\rho})^2 + |v|^2) (y, \tau) dy
\end{aligned}$$

则有

$$f(\tau) \leq f(0) + C \max_{G_\tau} |\nabla V| \int_0^\tau g(s) ds$$

由 Gronwall 不等式可得

$$f(\tau) \leq f(0) \exp(C \max_{G_\tau} |\nabla V| t)$$

因此, 取 $x \in \mathbb{R}^3$, 满足 $|x| \geq R + \sigma t$. 若 $|y - x| \leq \sigma t$, 则有 $|y| \geq R$. 因为, $\text{supp}(V_0 - \bar{V}) \subset \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq R\}$, 所以, $V(y, 0) = 0$. 由上式可知, $f(0) = 0, f(\tau) = 0$, 即 $V(x, t) = 0$. 定理 2 证毕.

3 解的奇异性

利用方程(1)得到一些等式和微分不等式, 利用这些微分不等式可以获得相应的估计, 利用有限传播速度定理 2 来证明当初值满足一定条件时, 方程(1)的局部光滑解在有限时间内的奇异性. 有限传播速度起关键作用.

固定 $R > 0$, 定义:

$$I(t) = \int_{\mathbb{R}^3} x(n + \rho) v dx, F(t) = F_1(t) + F_2(t)$$

$$F_1(t) = \int_{\mathbb{R}^3} (n - \bar{n}) dx, F_2(t) = \int_{\mathbb{R}^3} (\rho - \bar{\rho}) dx$$

$$D(t) = \{ |x| < R + \sigma t \}$$

$$A(t) = (R + \sigma t)^2 (F(0) + (\bar{n} + \bar{\rho})) |D(t)|$$

$$W(\tau) = 3A(\tau)(F_1(0) + \gamma \bar{\rho}^{\gamma-1} F_2(0))$$

$$J(t) = \begin{cases} -\frac{1}{3} \frac{W(t)t}{A(t)^2}, & \text{若 } W(t) > 0 \\ -\frac{1}{3} \frac{W(t)t}{A(t)^2} (1 + \frac{2(-D(t))^{1/2}t}{A(t)}), & \text{若 } W(t) \leq 0 \end{cases}$$

$|D(t)|$ 是 $D(t)$ 的体积.

定理 3 假设 $V_0 - \bar{V} = (n_0 - \bar{n}, \rho_0 - \bar{\rho}, v_0) \in H^3$, 存在 $R > 0$, $\text{supp}(V_0 - \bar{V}) \subset \{|x| \leq R\}$, 设 $F_1(0) = \int_{\mathbb{R}^3} (n_0 - \bar{n}) dx > 0, F_2(0) = \int_{\mathbb{R}^3} (\rho_0 - \bar{\rho}) dx > 0$, $V = (n, \rho, v)$ 是初值问题式(1)和式(2)的光滑解, 则有

$$\|V(t) - \bar{V}\| \geq C_0(1+t)^{-3/2} \quad (9)$$

其中, $C_0 > 0$. $\|\cdot\|$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 上的 L^2 的范数.

证明 由式(1)的前 2 个方程可知

$$F_1(t) = F_1(0), F_2(t) = F_2(0)$$

则

$$F(t) = F(0) \quad (10)$$

利用式(1)的第 3 个方程及分部积分, 可得

$$I'(t) = \int_{\mathbb{R}^3} ((n + \rho) |v|^2 + 3(P(n, \rho) - P(\bar{n}, \bar{\rho}))) dx \quad (11)$$

利用 $P(n, \rho) = n + \rho^\gamma, \gamma > 1$ 的凸性, 可得

$$\int_{\mathbb{R}^3} (P(n, \rho) - P(\bar{n}, \bar{\rho})) dx \geq F_1(0) + \int_{\mathbb{R}^3} \gamma \bar{\rho}^{\gamma-1} (\rho - \bar{\rho}) dx = F_1(0) + \gamma \bar{\rho}^{\gamma-1} F_2(0) \quad (12)$$

由式(11)和式(12)可得

$$I'(t) \geq \int_{\mathbb{R}^3} (n + \rho) |v|^2 dx + 3(F_1(0) + \gamma \bar{\rho}^{\gamma-1} F_2(0)) \quad (13)$$

假设解被整体定义, 利用式(10)和 Cauchy-Schwarz 不等式证明式(9).

$$0 < F(0) = \left| \int_{D(t)} (n - \bar{n}) dx + \int_{D(t)} (\rho - \bar{\rho}) dx \right| \leq$$

$$(\|n - \bar{n}\| + \|\rho - \bar{\rho}\|) \left(\frac{4\pi}{3} (R + \sigma t)^3 \right)^{1/2}$$

所以,

$$(\|n - \bar{n}\| + \|\rho - \bar{\rho}\|) \geq C_0 (R + \sigma t)^{-3/2} \quad (14)$$

现证明 $v(t)$ 的 L^2 模下界估计. 因为 $n \in \mathbb{R}^+$, $\rho \in \mathbb{R}^+$, 故式(1)中 $\int_{\mathbb{R}^3} (n + \rho) |v|^2 dx \geq 0$, 所以, 有

$$I'(t) \geq 3(F_1(0) + \gamma \bar{\rho}^{\gamma-1} F_2(0)) \quad (15)$$

将式(15)两边再积分, 整理得

$$I(t) \geq I(0) + 3(F_1(0) + \gamma \bar{\rho}^{\gamma-1} F_2(0)), t \geq C_1(1+t) \quad (16)$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 由定理 2, 及 $|n + \rho|$ 的一致有界性, 有

$$\begin{aligned} I(t) &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{D(t)} x^2 (n + \rho)^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &\left(\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{D(t)} x^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &C_2 (R + \sigma t)^{5/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &C_3 (1+t)^{5/2} \|v\| \end{aligned} \quad (17)$$

其中, $C_i > 0, i = 0, 1, 2, 3$.

由式(16)和式(17)可得

$$\|v(t)\| \geq C_0(1+t)^{-3/2} \quad (18)$$

由式(14)和式(18)可得

$$\|V(t) - \bar{V}\| \geq C_0(1+t)^{-3/2}$$

定理 3 证毕.

定理 4 假设 $V = (n, \rho, v)$ 是初值问题式(1)和式(2)的一个解, $V - \bar{V} = (n - \bar{n}, \rho - \bar{\rho}, v) \in C([0, \tau], H^3) \cap C^1([0, \tau], H^2)$, $\tau > 0$, 对于任意固定的 $T > 0$, 若

$$I(0) > A(T)/T \quad (19)$$

或

$$I(0) > A(T)(T^{-1} + J(T)) \quad (20)$$

则 $\tau < T$.

证明 假设式(1)的解在 $[0, \tau]$ 上存在, 利用有限传播速度定理 2 和 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得

$$I(t)^2 = \left(\int_{D(t)} x(n + \rho) v dx \right)^2 \leq \left(\int_{D(t)} |x|^2 (n + \rho) dx \right) \left(\int_{D(t)} (n + \rho) |v|^2 dx \right) \quad (21)$$

利用式(10), 可得

$$\begin{aligned} &\int_{D(t)} |x|^2 (n + \rho) dx \leq \\ &(R + \sigma t)^2 \int_{D(t)} (n + \rho) dx = \\ &(R + \sigma t)^2 \int_{D(t)} (F(t) + \bar{n} + \bar{\rho}) dx = \\ &(R + \sigma t)^2 (F(0) + (\bar{n} + \bar{\rho})) |D(t)| = A(t) \end{aligned} \quad (22)$$

联立式(13), (21), (22), 可得微分不等式

$$I'(t) \geq \frac{I(t)^2}{A(t)} + 3(F_1(0) + \gamma \bar{\rho}^{\gamma-1} F_2(0)),$$

$$t \in [0, \tau)$$

因为, $A(t)$ 是增的, 所以,

$$I'(t) \geq \frac{I(t)^2}{A(\tau)} + 3(F_1(0) + \gamma \bar{\rho}^{\gamma-1} F_2(0)),$$

$$t \in [0, \tau) \quad (23)$$

则 $\forall t \in [0, \tau), I'(t) \geq \frac{I(t)^2}{A(\tau)}$. 积分整理得

$$I(t) \geq \frac{I(0)A(\tau)}{A(\tau) - I(0)t}$$

因此, $\tau < T$.

假设式(20)成立, 令 $W(\tau) = 3A(\tau)(F_1(0) + \gamma \bar{\rho}^{\gamma-1} F_2(0))$, 则式(23)变为

$$I'(t) \geq \frac{1}{A(\tau)}(I(t)^2 + W(\tau)), t \in [0, \tau)$$

令 $I(0)^2 + W(\tau) > 0$, 此时, $I(t)$ 是单调递增的. 令 $h^2 = |W(\tau)|$, 则

$$I'(t) \geq \begin{cases} \frac{1}{A(\tau)}(I(t)^2 + h^2), & \text{若 } W(\tau) > 0 \\ \frac{1}{A(\tau)}(I(t)^2 - h^2), & \text{若 } W(\tau) \leq 0 \end{cases}$$

将上式在 $0 \sim \tau$ 上积分, 得

$$I(t) \geq \begin{cases} h \cot(h\tau/A(\tau)), & \text{若 } W(\tau) > 0 \\ h \coth(h\tau/A(\tau)), & \text{若 } W(\tau) \leq 0 \end{cases}$$

若 $x \in (0, \pi)$, 有 $\cot x < \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x$, $\coth x < \frac{1}{x} +$

$\frac{1}{3}x(1+2x)$. 若 $W(\tau) > 0$, 则 $hT/A(\tau) < \pi$, 因此,

$$I(0) \leq \begin{cases} \frac{A(\tau)}{\tau} - \frac{1}{3} \frac{h^2 \tau}{A(\tau)}, & W(\tau) > 0 \\ \frac{A(\tau)}{\tau} + \frac{1}{3} \frac{h^2 \tau}{A(\tau)} \left(1 + \frac{2h\tau}{A(\tau)}\right), & W(\tau) \leq 0 \end{cases}$$

则 $\tau < T$, 否则, 与式(20)矛盾.

定理 5 证毕.

参考文献:

- [1] MELLET A, VASSEUR A. Asymptotic analysis for a Vlasov-Fokker-Planck/compressible Navier-Stokes system of equations[J]. Communications in Mathematical Physics, 2008, 281(3): 573 - 596.
- [2] SIDERIS T C. Delayed singularity formation in 2D compressible flow[J]. American Journal of Mathematics, 1997, 119(2): 371 - 422.
- [3] NISHIDA T. Nonlinear hyperbolic equations and related topics in fluid dynamics[M]. Paris: Université de Paris-Sud, 1978.
- [4] DAFERMOS C M. Can dissipation prevent the breaking of waves[C]// Transactions of the Twenty-Sixth Conference of Army Mathematicians. Research Triangle Park. Research Triangle Park, 1981: 187 - 198.
- [5] LI T S. Global classical solutions for quasilinear hyperbolic systems[M]. Chichester: John Wiley & Sons, 1994.
- [6] SIDERIS T C, THOMASES B, WANG D H. Long time behavior of solutions to the 3D compressible Euler equations with damping[J]. Communications in Partial Differential Equations, 2003, 28(3): 795 - 816.
- [7] MAJDA A. Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables[M]. New York: Springer, 2012.
- [8] KATO T. The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1975, 58(3): 181 - 205.

(编辑: 石 瑛)