

带有接种的随机 SIS 传染病模型研究

周艳丽¹, 濮桂萍², 沈新娣¹

(1. 上海健康医学院 文理教学部, 上海 201318; 2. 上海健康医学院 护理与健康管理学院, 上海 201318)

摘要: 研究了一类带有接种的随机 SIS 传染病模型. 利用非负半鞅收敛定理这种简单而有效的方法找到了随机模型的阈值 $\tilde{R}_0$. $\tilde{R}_0$ 决定了疾病的灭绝和流行. 当 $\tilde{R}_0 < 1$ 时, 疾病灭绝; 当 $\tilde{R}_0 > 1$ 时, 模型的解在时间均值意义下趋于一点, 即此时疾病将流行.

关键词: 随机 SIS 传染病模型; 阈值; 接种; 灭绝性; 持续

中图分类号: O 175.8

文献标志码: A

Stochastic SIS Epidemic Model with Vaccination

ZHOU Yanli¹, PU Guiping², SHEN Xindi¹

(1. College of Arts and Science, Shanghai University of Medicine and Health Sciences, Shanghai 201318, China;

2. School of Nursing and Health Management, Shanghai University of
Medicine and Health Sciences, Shanghai 201318, China)

Abstract: A stochastic version of the delayed SIS epidemic model with vaccination was concerned. A simple but effective method was provided for estimating the threshold of a class of stochastic epidemic models by use of the nonnegative semimartingale convergence theorem. The threshold of the stochastic delayed model, denoted by $\tilde{R}_0$, completely determines the extinction and prevalence of the disease. If $\tilde{R}_0 < 1$, the disease ultimately vanishes from the population with probability one. If $\tilde{R}_0 > 1$, the system is proved to be convergent to a point in the meaning of time mean.

Keywords: stochastic SIS epidemic model; threshold; vaccination; extinction; persistence

1 问题的提出

人们一直都很重视传染病的预防与控制. 数学模型在研究传染病动力学方面具有相当重要的意义. 通过建立数学模型来描述和分析传染病传播的数

据规律并结合计算机进行数值模拟, 可以揭示传染病的传播机理、生物因素、社会影响以及疾病流行规律, 寻找疾病流行的关键因素, 预测疾病发生发展的趋势, 进而建立遏制疾病蔓延的手段和最优控制策略.

在现实世界里, 由于疾病的发生、发展和传播是一个非常复杂的过程, 其中会存在许多现实不确定因素(如疾病的传播机理和传播途径), 同时, 还不可

避免地会受到各种不可预知的环境噪声干扰(如洪水、大旱、海啸等),这些噪声和不确定因素的存在都会对疾病的传播造成很大的影响.然而,对那些具有不确定因素和易受噪声干扰的疾病传播过程进行有效的控制和预测又是一件非常困难的事情.因此,如何刻画这些随机不确定因素对疾病传播的影响就显得非常重要且具有实际意义.近年来,已有很多作者研究随机传染病模型^[1-10].

由于相关扰动的复杂性带来一定的研究难度,因此,研究确定性传染病模型在环境噪声扰动下的动力学性质更具有实际意义.随机传染病模型的研究无论是理论还是研究方法都与确定性模型有比较大的差别,这方面还有大量的研究工作有待进一步开展.

Li 等^[11]研究了带有时滞的接种 SIS 模型,其形式为

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = A(1-q) - \beta S(t)I(t) - (\mu + p)S(t) + \gamma I(t) + [qA + pS(t-\tau)]e^{-\mu\tau} \\ \dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - (\mu + \gamma + \alpha)I(t) \\ \dot{V}(t) = qA + pS(t) - [qA + pS(t-\tau)]e^{-\mu\tau} - \mu V(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中: $S(t)$ 为易感者的数量; $I(t)$ 为染病者的数量; $V(t)$ 为接种者的数量; A 为新生者常数输入率, $A > 0$; μ 为自然死亡率; q 为输入者被接种的比例, $0 \leq q \leq 1$; α 为因病死亡率, $\alpha \geq 0$; p 为易感者被接种率, $p \geq 0$; β 为传染率系数, $\beta \geq 0$; γ 为染病者的回复率, $\gamma \geq 0$; τ 为免疫期.

对于模型(1),基本再生数

$$R_0 = \frac{\beta A [1 - q(1 - e^{-\mu\tau})]}{(\mu + \gamma + \alpha)[\mu + p(1 - e^{-\mu\tau})]}$$

当 $R_0 < 1$ 时,模型(1)总存在无病平衡点

$$E^0 = (S^0, 0, V^0) =$$

$$\left(\frac{A[1 - q(1 - e^{-\mu\tau})]}{\mu + p(1 - e^{-\mu\tau})}, 0, \frac{1}{\mu}(1 - e^{-\mu\tau})(qA + pS^0) \right)$$

是全局渐近稳定的.

当 $R_0 > 1$ 时,无病平衡点 E^0 是不稳定的,此时存在唯一的地方病平衡点 $E^* = (S^*, I^*, V^*)$ 是局部渐近稳定的.

$$S^* = \frac{\mu + \gamma + \alpha}{\beta}$$

$$I^* = \frac{(\mu + \gamma + \alpha)(\mu + p(1 - e^{-\mu\tau}))}{\beta(\mu + \alpha)}$$

$$V^* = \frac{1}{\mu}(1 - e^{-\mu\tau})(qA + pS^*)$$

在实际生活中,环境白噪声不可避免地会对模型(1)造成影响,故在模型(1)的基础上建立相应的随机模型,研究在干扰情况下疾病何时消失、何时流行.相

对于模型(1),考虑具有如下形式的随机模型:

$$\begin{cases} dS(t) = [A(1-q) - \beta S(t)I(t) - (\mu + p)S(t) + \gamma I(t) + [qA + pS(t-\tau)]e^{-\mu\tau}]dt + \sigma_1 S(t)dB_1(t) \\ dI(t) = [\beta S(t)I(t) - (\mu + \gamma + \alpha)I(t)]dt + \sigma_2 I(t)dB_2(t) \\ dV(t) = [qA + pS(t) - [qA + pS(t-\tau)]e^{-\mu\tau} - \mu V(t)]dt + \sigma_3 V(t)dB_3(t) \end{cases} \quad (2)$$

式中: $B_i(t)$ 是定义在完备概率空间上的相互独立标准布朗运动, $i = 1, 2, 3$; σ_i 表示环境白噪声的强度, $i = 1, 2, 3$.

由于 $V(t)$ 在疾病的传输中没有影响,现只考虑模型

$$\begin{cases} dS(t) = [A(1-q) - \beta S(t)I(t) - (\mu + p)S(t) + \gamma I(t) + [qA + pS(t-\tau)]e^{-\mu\tau}]dt + \sigma_1 S(t)dB_1(t) \\ dI(t) = [\beta S(t)I(t) - (\mu + \gamma + \alpha)I(t)]dt + \sigma_2 I(t)dB_2(t) \end{cases} \quad (3)$$

在本文中,总假设 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 为完备的概率空间,其中, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 是 Ω 上的一个 σ -代数且满足通常条件(即右连续, $\mathcal{F}_0$ 包含所有零测集).

2 主要结果

定理 1 对于任意初值 $(S(0), I(0)) \in R_+^2$ 和 $I(\zeta) \geq 0$. 对所有 $\zeta \in [-\tau, 0)$, 模型(3)存在唯一的正解 $(S(t), I(t)) (t \geq 0)$ 依概率 1 存在于 R_+^2 中, 即 $(S(t), I(t)) \in R_+^2 (t \geq 0)$, a. s.

对于定理 1 的证明可以构造函数

$$W(S(t), I(t)) = \left(S(t) - a - a \log \frac{S(t)}{a} \right) +$$

$$(I(t) - 1 - \log I(t)) + p e^{-\mu\tau} \int_{t-\tau}^t S(s) ds$$

式中, a 为正常数.

利用文献[6-7]的方法可证明定理 1 的结论成立.

为方便起见,记

$$\widetilde{R}_0 = R_0 - \frac{\sigma_2^2}{2(\mu + \gamma + \alpha)} \quad (4)$$

定义

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds$$

定理 2 设 $\mu > \frac{\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2}{2}$. 令 $(S(t), I(t))$ 是模型(3)满足任意初值 $(S(0) > 0, I(\zeta) \geq 0) (\zeta \in [-\tau, 0), I(0) > 0)$ 的解.

a. 当 $\tilde{R}_0 < 1$ 时, 有 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log I(t)}{t} \leq (\mu + \gamma + \alpha)(\tilde{R}_0 - 1)$, a. s. 即 $I(t)$ 依几乎必然指数趋于零, 也就是疾病依概率 1 灭绝, 同时满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle S(t) \rangle = \frac{A[1 - q(1 - e^{-\mu\tau})]}{\mu + p(1 - e^{-\mu\tau})} = S^0, \text{ a. s. } (5)$$

b. 当 $\tilde{R}_0 > 1$ 时, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle I(t) \rangle = \frac{(\mu + \gamma + \beta)[\mu + p(1 - e^{-\mu\tau})]}{\beta(\mu + \alpha)}(\tilde{R}_0 - 1) > 0$, 即疾病将持续存在, 且有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle S(t) \rangle = \tilde{S}^*, \lim_{t \rightarrow \infty} \langle I(t) \rangle = \tilde{I}^*, \text{ a. s.}$$

其中

$$\tilde{S}^* = \frac{2(\mu + \gamma + \beta) + \sigma_2^2}{2\beta}$$

$$\tilde{I}^* = \frac{(\mu + \gamma + \beta)[\mu + p(1 - e^{-\mu\tau})]}{\beta(\mu + \alpha)}(\tilde{R}_0 - 1)$$

为了证明定理 2, 先引入几个有用的引理.

引理 1^[7] 令 $(S(t), I(t))$ 是模型 (3) 满足任意初值 $(S(0) > 0, I(\zeta) \geq 0)$ ($\zeta \in [-\tau, 0), I(0) > 0$) 的解, 则有如下结论:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t) + I(t) + pe^{-\mu t} \int_{t-\tau}^t e^{\mu s} S(s) ds}{t} = 0, \text{ a. s.} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I(t)}{t} = 0, \text{ a. s.} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-\mu t} \int_{t-\tau}^t e^{\mu s} S(s) ds}{t} = 0, \text{ a. s.} \end{cases} \quad (6)$$

引理 2^[7] 设 $\mu > \frac{\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2}{2}$. 令 $(S(t), I(t))$ 是

$$\frac{S(t) - S(0) + I(t) - I(0) + pe^{-\mu\tau} \int_{t-\tau}^t e^{\mu s} S(s) ds - pe^{-\mu\tau} \int_{-\tau}^0 e^{\mu s} S(s) ds}{t} = A[1 - q(1 - e^{-\mu\tau})] -$$

$$[\mu + p(1 - e^{-\mu\tau})]\langle S(t) \rangle - (\mu + \alpha)\langle I(t) \rangle + \frac{\sigma_1}{t} \int_0^t S(s) dB_1(s) + \frac{\sigma_2}{t} \int_0^t I(s) dB_2(s)$$

整理可得

$$\langle S(t) \rangle = S^0 - \frac{\mu + \alpha}{\mu + p(1 - e^{-\mu\tau})} \langle I(t) \rangle + \varphi(t) \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \frac{1}{\mu + p(1 - e^{-\mu\tau})} \left[\frac{S(t) - S(0) + I(t) - I(0) + pe^{-\mu\tau} \int_{t-\tau}^t e^{\mu s} S(s) ds - pe^{-\mu\tau} \int_{-\tau}^0 e^{\mu s} S(s) ds}{t} - \right. \\ & \left. \left(\frac{\sigma_1}{t} \int_0^t S(s) dB_1(s) + \frac{\sigma_2}{t} \int_0^t I(s) dB_2(s) \right) \right] \end{aligned}$$

显然, 由引理 1 和引理 2 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0, \text{ a. s. } (9)$$

定义 $W(I(t)) = \log I(t)$, 并利用 Ito 公式,

模型 (3) 满足任意初值 $(S(0) > 0, I(\zeta) \geq 0)$ ($\zeta \in [-\tau, 0), I(0) > 0$) 的解, 则有如下结论:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t S(s) dB_1(s)}{t} = 0, \text{ a. s.} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t I(s) dB_2(s)}{t} = 0, \text{ a. s.} \end{cases} \quad (7)$$

在引理 2 的证明中, 可以令 $u(t) = S(t) + I(t) + pe^{-\mu t} \int_{t-\tau}^t e^{\mu s} S(s) ds$. 引理 1 和引理 2 的证明与文献 [7] 的引理证明方法相同, 证明过程详见文献 [7].

引理 3^[7] 设 $f(t) \in C[[0, \infty) \times \Omega, (0, \infty)]$ 和 $F(t) \in C[[0, \infty) \times \Omega, R]$. 若存在正常数 λ_0, λ , 使得

$$\log f(t) = \lambda t - \lambda_0 \int_0^t f(s) ds + F(t), \text{ a. s.}$$

对所有 $t \geq 0$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{t} = 0$, a. s. 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \text{ a. s.}$$

现证明定理 2.

证明

$$\begin{aligned} d(S(t) + I(t) + pe^{-\mu t} \int_{t-\tau}^t S(s) ds) = & \{A[1 - q(1 - e^{-\mu\tau})] - [\mu + p(1 - e^{-\mu\tau})] \cdot \\ & S(t) - (\mu + \alpha)I(t)\} dt + \\ & \sigma_1 S(t) dB_1(t) + \sigma_2 I(t) dB_2(t) \end{aligned}$$

对上式两端从 0 ~ t 积分, 积分后两端同时除以 t, 可得

$$-\frac{1}{2}\sigma_2^2\Big]dt + \sigma_2dB_2(t) \quad (10)$$

对式(9)两端从 $0 \sim t$ 积分并除以 t , 可得

$$\frac{\log I(t)}{t} = \beta\langle S(t) \rangle - (\mu + \gamma + \alpha) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 + \frac{\sigma_2 B_2(t)}{t} + \frac{\log I(0)}{t} \quad (11)$$

将式(8)的 $\langle S(t) \rangle$ 带入式(11)中, 并整理得

$$\frac{\log I(t)}{t} = (\mu + \gamma + \alpha)(\tilde{R}_0 - 1) - \frac{\beta(\mu + \alpha)}{\mu + p(1 - e^{-\mu\tau})}\langle I(t) \rangle + \frac{F(t)}{t} \quad (12)$$

其中, $F(t) = \beta\varphi(t) + \sigma_2 B_2(t) + \log I(0)$, 由强大数定理^[12]和引理2可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{t} = 0$.

显然, 若 $\tilde{R}_0 < 1$, 则得到定理2的a的结论. 同时, 根据 $\langle S(t) \rangle$ 的表达式, 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle S(t) \rangle = \frac{A[1 - q(1 - e^{-\mu\tau})]}{\mu + p(1 - e^{-\mu\tau})} = S^0, \text{ a. s.}$$

当 $\tilde{R}_0 > 1$ 时, 由引理3和式(11), 可证得定理2的b的结论成立, 并有以下结论成立:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle S(t) \rangle = \tilde{S}^* = \frac{2(\mu + \gamma + \beta) + \sigma_2^2}{2\beta}, \text{ a. s.}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle I(t) \rangle = \tilde{I}^* =$$

$$\frac{(\mu + \gamma + \beta)[\mu + p(1 - e^{-\mu\tau})]}{\beta(\mu + \alpha)}(\tilde{R}_0 - 1), \text{ a. s.}$$

定理2的a指出, 当 $\tilde{R}_0 < 1$ 和环境噪声较小时, 疾病将趋于灭绝. 同时注意到, $\tilde{R}_0$ 的表达式(4)与相应的确定性模型的阈值 R_0 相比, 两者是不相同的, 它比确定性模型的阈值条件要弱些.

由定理2可得, $\tilde{R}_0$ 是区分疾病灭绝和流行的关键值. 当 $\tilde{R}_0 < 1$ 时, 疾病灭绝; 当 $\tilde{R}_0 > 1$ 时, 疾病持续存在. 这与确定模型相似, 故将 $\tilde{R}_0$ 看作是模型(3)的阈值. 同时, 定理2也指出了模型(3)的解在时间均值意义下趋于点 $(\tilde{S}^*, \tilde{I}^*)$.

3 结束语

同相应的确定性传染病模型相比较, 随机系统的阈值与环境白噪声的强度相关. 从本文中的结论可以看出: 当白噪声的强度较小时, 随机系统与对应的确定系统具有相似的性质, 即随机系统的阈值小于1, 疾病灭绝; 当白噪声的强度较大时, 随机系统会出现完全不同于确定系统的性质, 即使确定系统的阈值大于1, 在强噪声的干扰下仍可以导致疾病

灭绝. 在实际中, 这种大的噪声可以理解为由突发的恶劣天气、严重的自然灾害等. 与确定系统相比, 随机系统的研究刚刚起步, 今后进一步研究与白噪声相关的理论问题和应用问题具有广阔的应用前景.

参考文献:

- [1] JI C Y, JIANG D Q, SHI N Z. The behavior of an SIR epidemic model with stochastic perturbation [J]. Stochastic Analysis and Applications, 2012, 30 (5): 755 - 773.
- [2] GRAY A, GREENHALGH D, HU L, et al. A stochastic differential equation SIS epidemic model [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2011, 71 (3): 876 - 902.
- [3] JIANG D Q, YU J J, JI C Y, et al. Asymptotic behavior of global positive solution to a stochastic SIR model [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2011, 54 (1/2): 221 - 232.
- [4] ARTALEJO J R, ECONOMOU A, LOPEZ-HERRERO M J. On the number of recovered individuals in the SIS and SIR stochastic epidemic models [J]. Mathematical Biosciences, 2010, 228(1): 45 - 55.
- [5] LU Q Y. Stability of SIRS system with random perturbations [J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2009, 388(18): 3677 - 3686.
- [6] ZHAO Y N, JIANG D Q, O'REGAN D. The extinction and persistence of the stochastic SIS epidemic model with vaccination [J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2013, 392(20): 4916 - 4927.
- [7] ZHAO Y N, JIANG D P. The threshold of a stochastic SIS epidemic model with vaccination [J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 243: 718 - 727.
- [8] JI C Y, JIANG D Q. Threshold behaviour of a stochastic SIR model [J]. Applied Mathematical Modeling, 2014, 38(21/22): 5067 - 5079.
- [9] LIN Y G, JIANG D Q, WANG S. Stationary distribution of a stochastic SIS epidemic model with vaccination [J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2014, 394: 187 - 197.
- [10] LAHROUZ A, SETTATI A. Necessary and sufficient condition for extinction and persistence of SIRS system with random perturbation [J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 233: 10 - 19.
- [11] LI J Q, MA Z E. Global analysis of SIS epidemic models with variable total population size [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2004, 39 (11/12): 1231 - 1242.
- [12] MAO X R. Stochastic differential equations and applications [M]. 2nd ed. Chichester, UK: Horwood Publishing Limited, 2008.

(编辑: 石 瑛)