

线性变换张量积的 Jordan-Chevalley 分解

胡建华¹, 曾博文, 王资敏

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 研究了线性变换张量积的 Jordan-Chevalley 分解相关理论. 首先利用矩阵表示来讨论 2 个线性变换张量积的一些基本性质, 接着证明了 2 个线性变换张量积的 Jordan-Chevalley 分解的唯一存在性, 最后利用这些结论给出了 Jordan-Chevalley 分解的具体表达式.

关键词: 张量积; 矩阵表示; Jordan-Chevalley 分解

中图分类号: O 152 **文献标志码:** A

Jordan-Chevalley Decomposition of the Tensor Product of Linear Transformations

HU Jianhua¹, ZENG Bowen, WANG Zimin

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: In order to study the Jordan-Chevalley decomposition theory of the tensor product of linear transformations, it was suggested to discuss firstly some properties of the tensor product of two linear transformations via its matrix representation, then prove the unique existence of such decomposition, and give a specific expression.

Keywords: tensor product; matrix representation; Jordan-Chevalley decomposition

1 张量积的基本性质

在李理论中, Jordan-Chevalley 分解指出任意一个线性变换可唯一地表示成它的可交换的半单部分和幂零部分的和^[1]. 文献[2] 指出该分解存在当且仅当所讨论的基域完备. 线性变换张量积在数学、物理等领域中有着广泛的应用, 而 2 个线性变换张量积的 Jordan-Chevalley 分解理论目前国内外研究还

比较少, 本文将在代数闭域上探讨 2 个线性变换张量积的 Jordan-Chevalley 分解, 首先通过矩阵表示讨论 2 个线性变换张量积的一些基本性质, 接着证明该张量积的 Jordan-Chevalley 分解的唯一存在性, 并利用这些结论给出具体表达式.

定义 1^[3] 设 $\mathbb{F}$ 是代数闭域, V, W 是域 $\mathbb{F}$ 上的有限维向量空间, 且 $\dim V = m, \dim W = n$. $\forall x_0 \in V, y_0 \in W$ 都有唯一的积 $z = x_0 \otimes y_0$ 与之对应, 并且对于固定 y_0, x_0 与 z 的对应是线性的; 对于固定

收稿日期: 2017-05-05

基金项目: 上海理工大学教师教学发展研究基金资助项目(CFTD17015Z, CFTD17016Z)

第一作者: 胡建华(1978-), 女, 讲师. 研究方向: 代数群及其表示理论. E-mail: smilydragon2011@163.com

x_0, y_0 与 z 的对应是线性的. 这种对应关系称为 V 与 W 的张量积, 记为 $V \otimes W$, 它构成一个向量空间.

性质 1^[3] $\forall x_0, x_1, x_2 \in V, y_0, y_1, y_2 \in W, a \in \mathbb{F}$,

a. $0 \otimes y_0 = x_0 \otimes 0 = 0$;

b. $(ax_0) \otimes y_0 = x_0 \otimes (ay_0) = a(x_0 \otimes y_0)$;

c. $(x_1 + x_2) \otimes y_0 = (x_1 \otimes y_0) + (x_2 \otimes y_0)$;

d. $x_0 \otimes (y_1 + y_2) = (x_0 \otimes y_1) + (x_0 \otimes y_2)$.

性质 2^[3] 设 $B_I: \{v_1, \dots, v_m\}$ 为 V 的一组基, $B_{II}: \{w_1, \dots, w_n\}$ 为 W 的一组基, 则 $B_{III}: \{v_i \otimes w_j; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}$ 为 $V \otimes W$ 的一组基, 且 $\dim(V \otimes W) = mn$.

性质 3^[4] (张量积的普遍性质) 设 $\varphi: V \times W \rightarrow V \otimes W$ 是一个双线性映射, 对任意给定的向量空间 Z , 若存在一个双线性映射 $h: V \times W \rightarrow Z$, 那么, 存在唯一的线性映射 $h': V \otimes W \rightarrow Z$ 使图 1 可交换, 即 $h = h' \circ \varphi$.

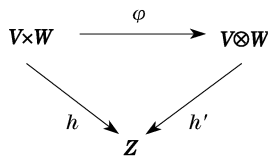


图 1 交换图

Fig. 1 Commutative diagram

2 End $(V \otimes W)$ 及其矩阵表示

定义 2 如果线性变换 x 的极小多项式无重根, 称 x 是半单的. 如果讨论的基域是代数闭域, 等价于该线性变换的矩阵可对角化.

定义 3 如果存在正整数 k , 使得 $x^k = 0$, 那么, 称线性变换 x 幂零.

设 $\mathbb{F}, V, W$ 如定义 1 所示, 记 $\text{End } V$ 表示 V 的所有自同态构成的向量空间, 则 $\dim(\text{End } V) = m^2$, $\text{End } V$ 同构于阶为 m 的方阵 $M(m, \mathbb{F})$ 构成的线性空间, 且有一组自然基 $e_{is}: 1 \leq i, s \leq m$ 满足

$$e_{is}(v_k) = \delta_{sk} v_i, \quad i, s, k = 1, \dots, m$$

式中, δ_{sk} 为 Kronecker 函数.

定理 1 $\text{End } V \otimes \text{End } W \cong \text{End } (V \otimes W)$

证明 对 $\forall x \in \text{End } V, y \in \text{End } W$, 定义映射 $T_{x,y}: V \otimes W \rightarrow V \otimes W$, 满足

$$T_{x,y}(v \otimes w) = x(v) \otimes y(w), \quad \forall v \in V, w \in W$$

由张量积的性质易验证 $T_{x,y}$ 是线性的, 即 $T_{x,y} \in \text{End } (V \otimes W)$. 再令

$$\varphi: \text{End } V \times \text{End } W \rightarrow \text{End } (V \otimes W),$$

$$\varphi(x, y) = x \otimes y$$

$$h: \text{End } V \times \text{End } W \rightarrow \text{End } (V \otimes W),$$

$$h(x, y) = T_{x,y}$$

显然, φ, h 是双线性的. 由性质 3 可知, 存在唯一的线性映射 $h': \text{End } V \otimes \text{End } W \rightarrow \text{End } (V \otimes W)$, 使得 $h = h' \circ \varphi$. 再取 $\text{End } V$ 的一组自然基 $e_{is}: 1 \leq i, s \leq m$, $\text{End } W$ 的一组自然基 $f_{jt}: 1 \leq j, t \leq n$, 根据性质 2, $\text{End } V \otimes \text{End } W$ 有基 $e_{is} \otimes f_{jt}$, 且

$$T_{e_{is}, f_{jt}}(v_k \otimes w_l) = e_{is}(v_k) \otimes f_{jt}(w_l) =$$

$$\delta_{sk} v_i \otimes \delta_{tl} w_j = \begin{cases} v_i \otimes w_j, & \text{当 } s=k \text{ 且 } t=l \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

这说明 $\{T_{e_{is}, f_{jt}} | 1 \leq i, s \leq m, 1 \leq j, t \leq n\}$ 构成 $\text{End } (V \otimes W)$ 的一组自然基, h' 将 $\text{End } V \otimes \text{End } W$ 的基向量 $e_{is} \otimes f_{jt}$ 映到 $\text{End } (V \otimes W)$ 的基向量 $T_{e_{is}, f_{jt}}$, 故 h' 是同构映射, 定理 1 得证.

由定理 1 可知, 可以将 $\text{End } V \otimes \text{End } W$ 中的元与 $\text{End } (V \otimes W)$ 中的元等同起来, 即 $\forall z \in \text{End } (V \otimes W)$, 存在 $x \in \text{End } V, y \in \text{End } W$, 使得 $z = x \otimes y$ 且 $(x \otimes y)(v \otimes w) = x(v) \otimes y(w)$.

引理 1^[5] 若 $x \in \text{End } V$ 在基 B_I 下的矩阵为 $A, y \in \text{End } W$ 在基 B_{II} 下的矩阵为 B , 则 $x \otimes y$ 在基 B_{III} 下的矩阵为 $A \otimes B$, 即 A 与 B 的 Kronecker 积. 具体地, 若 $A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{p \times q}$ 矩阵, 则

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}_{mp \times nq}$$

现探讨 $A \otimes B$ 的一些相关性质, 根据线性变换与矩阵的一一对应关系, $x \otimes y$ 有对应的性质 4~8.

性质 4^[5] a. $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$;
b. $A \otimes B$ 可逆当且仅当 A, B 可逆, 且 $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.

性质 5^[6] 设 A 是 m 阶方阵, 特征值为 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$; B 是 n 阶方阵, 特征值为 $\beta_1, \dots, \beta_n$, 则 $A \otimes B$ 的特征多项式为 $\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (T - \alpha_i \beta_j)$, 全部的特征值为 $\{\alpha_i \beta_j: 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$.

性质 6 若 A 和 B 都是可对角化的矩阵, 则 $A \otimes B$ 也可对角化.

证明 因为 A, B 可对角化, 则存在可逆的矩阵 P 和 Q , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda_1, Q^{-1}BQ = \Lambda_2$, 其中, Λ_1, Λ_2 是对角矩阵, 由性质 4 可得

$$\Lambda_1 \otimes \Lambda_2 = (P^{-1}AP) \otimes (Q^{-1}BQ) = (P^{-1} \otimes Q^{-1})(A \otimes B)(P \otimes Q)$$

所以,

$$(P \otimes Q)^{-1}(A \otimes B)(P \otimes Q) = A_1 \otimes A_2$$

显然, $A_1 \otimes A_2$ 仍是对角矩阵.

性质 7 ^[7-8] $A \otimes B$ 幂零当且仅当 A 和 B 中至少一个幂零.

证明 一个矩阵幂零当且仅当它的所有特征值为 0. 现设 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 是矩阵 A 的所有特征值, $\beta_1, \dots, \beta_n$ 是矩阵 B 的所有特征值, 由性质 5 可知, $A \otimes B$ 的特征值为 $\{\alpha_i \beta_j; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$.

充分性: 若 A, B 中至少一个幂零, 那么, 所有的 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 为 0, 或者, 所有的 $\beta_1, \dots, \beta_n$ 为 0, 这使得的所有 $A \otimes B$ 特征值都为 0, 从而 $A \otimes B$ 幂零.

必要性: 若 $A \otimes B$ 幂零, 但 A 和 B 都不幂零, 则一定存在某个 α_i 和 β_j 都不为 0, 从而 $\alpha_i \beta_j$ 不为 0, 这与 $A \otimes B$ 是幂零的条件矛盾.

性质 8 若矩阵 A 与 C 可交换, 矩阵 B 与 D 可交换, 则 $A \otimes B$ 与 $C \otimes D$ 可交换.

证明 若 $AC = CA, BD = DB$, 则 $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC)(BD) = (CA)(DB) = (C \otimes D)(A \otimes B)$.

3 $x \otimes y$ 的 Jordan-Chevalley 分解

定理 2 设 V, W 是代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的 2 个有限维向量空间, 则 $\forall x \otimes y \in \text{End}(V \otimes W)$ 有唯一的 Jordan-Chevalley 分解: $x \otimes y = (x \otimes y)_s + (x \otimes y)_n$, 其中, $(x \otimes y)_s$ 是半单部分, $(x \otimes y)_n$ 是幂零部分, 且 $(x \otimes y)_s$ 和 $(x \otimes y)_n$ 可交换.

证明 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 是 x 的互不相同的特征值, 重数为 $m_1, \dots, m_k$; $\beta_1, \dots, \beta_s$ 是 y 的互不相同的特征值, 重数为 $n_1, \dots, n_s$. 由性质 5 可知, $x \otimes y$ 有特征多项式

$$f(T) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^s (T - \alpha_i \beta_j)^{m_i n_j} = \prod_{u=1}^t (T - \lambda_u)^{l_u}$$

这里, $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in \{\alpha_i \beta_j; 1 \leq i \leq k; 1 \leq j \leq s\}$ 是 $x \otimes y$ 的两两互不相同的特征值, 重数为 $l_1, \dots, l_t$,

满足 $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^s (m_i n_j) = \sum_{u=1}^t l_u$. 记

$$(V \otimes W)_u = \{v \otimes u \in V \otimes W \mid (x \otimes y - \lambda_u \text{id}_{V \otimes W})^{l_u}(v \otimes u) = 0\}$$

显然, $(V \otimes W)_u$ 是 $V \otimes W$ 的 $x \otimes y$ - 不变子空间, 且 $V \otimes W = \bigoplus_{u=1}^t (V \otimes W)_u$. 因为, $(T - \lambda_u)^{l_u}, u = 1, \dots, t$ 两两互素, 根据中国剩余定理, 存在唯一的 多项式 $p(T)$, 满足

$$p(T) \equiv \lambda_u \pmod{(T - \lambda_u)^{l_u}}$$

$$p(T) \equiv 0 \pmod{T}$$

设 $q(T) = T - p(T)$, 显然, $p(T), q(T)$ 是关于 T 的常数项为 0 的多项式. 令

$$(x \otimes y)_s = p(x \otimes y), (x \otimes y)_n = q(x \otimes y)$$

则 $x \otimes y, (x \otimes y)_s$ 和 $(x \otimes y)_n$ 可两两交换. 对 $\forall u$, $p(T) \equiv \lambda_u \pmod{(T - \lambda_u)^{l_u}}$ 意味着 $(x \otimes y - \lambda_u \text{id}_{V \otimes W})$ 限制作用到 $(V \otimes W)_u$ 为零变换, 因此, $(x \otimes y)_s$ 对角地作用在 $(V \otimes W)_u$ 上, 其特征值只有 λ_u . 又 $(x \otimes y)_n = (x \otimes y) - (x \otimes y)_s$, 显然, $(x \otimes y)_n$ 是幂零的. 现证唯一性^[7], 若 $x \otimes y$ 还存在另一个 Jordan-Chevalley 分解 $x \otimes y = s + n$, s 半单, n 幂零, 且 $sn = ns$, 则有 $(x \otimes y)_s - s = n - (x \otimes y)_n$, 又因为可交换的半单或者幂零的线性变换和还是半单或者幂零的, 因此, $(x \otimes y)_s - s = n - (x \otimes y)_n$ 既半单又幂零, 只可能为 0, 因此, $s = (x \otimes y)_s, n = (x \otimes y)_n$.

定理 3 若 x 的 Jordan-Chevalley 分解为 $x = x_s + x_n$, y 的 Jordan-Chevalley 分解为 $y = y_s + y_n$, 那么, $x \otimes y$ 的 Jordan-Chevalley 分解的半单部分是 $x_s \otimes y_s$, 幂零部分是 $x_s \otimes y_n + x_n \otimes y_s + x_n \otimes y_n$.

证明 因为, $x \otimes y = (x_s + x_n) \otimes (y_s + y_n) = x_s \otimes y_s + x_s \otimes y_n + x_n \otimes y_s + x_n \otimes y_n$, 由性质 6 可知, $x_s \otimes y_s$ 是半单的, 由性质 7 可知, $x_s \otimes y_n, x_n \otimes y_s, x_n \otimes y_n$ 是幂零的, 由性质 6 可知, $x_s \otimes y_s, x_s \otimes y_n, x_n \otimes y_s$ 和 $x_n \otimes y_n$ 是两两可交换的, 所以, 它们的和 $x_s \otimes y_n + x_n \otimes y_s + x_n \otimes y_n$ 还是幂零的, 且与 $x_s \otimes y_s$ 可交换. 由 Jordan-Chevalley 分解的唯一性可得

$$(x \otimes y)_s = x_s \otimes y_s$$

$$(x \otimes y)_n = x_s \otimes y_n + x_n \otimes y_s + x_n \otimes y_n$$

由定理 3 可知, 对任意给定的正整数 k , 可得

$$(x \otimes y)^k = x^k \otimes y^k = (x_s + x_n)^k \otimes (y_s + y_n)^k$$

$$= x_s^k \otimes y_s^k + \dots + x_n^k \otimes y_n^k$$

利用张量积的性质及 x_s 与 x_n, y_s 与 y_n 的交换性, 可将 $(x \otimes y)^k$ 展开, 可知 $(x \otimes y)^k$ 的半单部分是 $x_s^k \otimes y_s^k$, 余下的构成幂零部分.

参考文献:

- [1] HUMPHREYS J E. Introduction to Lie algebras and representation theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1972.
- [2] BOURBAKI N. Lie groups and Lie algebras [M]. Berlin: Springer, 2008.

(下转第 548 页)

- Statistical Society, 2005, 67(2): 301 – 320.
- [5] CANDÈS E, TAO T. Rejoinder; the Dantzig selector; statistical estimation when p is much larger than n [J]. The Annals of Statistics, 2007, 35 (6): 2392 – 2404.
- [6] HUBER P J. Robust estimation of a location parameter [J]. The Annals of Mathematical Statistics, 1964, 35 (1): 73 – 101.
- [7] HUBER P J. Robust regression: asymptotics, conjectures and Monte Carlo [J]. The Annals of Statistics, 1973, 1(5): 799 – 821.
- [8] PORTNOY S, KOENKER R. The Gaussian hare and the Laplacian tortoise: computability of squared-error versus absolute-error estimators [J]. Statistical Science, 1997, 12(4): 279 – 300.
- [9] GILONI A, PADBERG M. Alternative methods of linear regression[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2002, 35(3/4): 361 – 374.
- [10] GILONI A, PADBERG M. The finite sample breakdown point of L_1 -regression[J]. Journal on Optimization, 2004, 14(4): 1028 – 1042.
- [11] HE X M, SIMPSON D G, WANG G Y. Breakdown points of t-type regression estimators[J]. Biometrika, 2000, 87(3): 675 – 687.
- [12] HE X M, FUNG W K, ZHU Z Y. Robust estimation in generalized partial linear models for clustered data [J]. Journal of the American Statistical Association, 2005, 100(472): 1176 – 1184.
- [13] SINHA S K. Robust inference in generalized linear models for longitudinal data[J]. The Canadian Journal of Statistics, 2006, 34(2): 261 – 278.
- [14] MARONNA R A, MARTIN R D, YOHAI V J. Robust statistics: theory and methods [M]. Chichester, England: John Wiley and Sons, 2006.
- [15] 樊亚莉, 徐群芳. 稳健的变量选择方法及其应用[J]. 上海理工大学学报, 2013, 35(3): 256 – 260.
- [16] SCHUMANN D H. Robust variable selection [D]. Carolina: North Carolina State University, 2009.

(编辑: 丁红艺)

(上接第 541 页)

- [3] 林杰, 林新棋. 线性变换的张量积[J]. 福建广播电视大学学报, 1998(2): 37 – 40.
- [4] ROTMAN J J. An introduction to homological algebra [M]. New York: Academic Press, 1960.
- [5] DUMMIT D S, FOOTE R M. Abstract algebra [M]. Hoboken: John Wiley and Sons, 2004.
- [6] GLASBY S P. On the tensor product of polynomials over a ring[J]. Journal of the Australian Mathematical Society, 2001, 71(3): 307 – 324.
- [7] 闫爱民, 胡建华. 型 E7 根系的结构[J]. 上海理工大学学报, 2014. 36(1): 5 – 11.
- [8] 胡建华, 赵卫萍. 一类特殊幂零李代数的结构[J]. 上海理工大学学报, 2015. 37(3): 215 – 219.

(编辑: 石 瑛)