

# 伪单调均衡问题的一种加速投影算法

刘雯雯, 党亚峥

(上海理工大学 管理学院, 上海 200093)

**摘要:** 介绍了求解均衡问题的几类算法, 并针对收敛性证明需要 Lipschitz 连续性条件的问题, 提出了一种加速投影算法. 该算法首先由辅助问题原理和 Armijo 型线搜索得到一个预估点并以此构造一个超平面, 进一步通过选择适当步长和减小投影域使得算法产生的序列快速收敛, 从而实现加速投影的目的. 最后, 在双重函数  $f$  伪单调且不需要 Lipschitz 连续条件下, 证明了该算法产生的迭代序列全局收敛到伪单调均衡问题的解.

**关键词:** 均衡问题; 加速投影算法; Armijo 型线搜索; 伪单调

**中图分类号:** O 224      **文献标志码:** A

## Accelerating Projection Algorithm for Pseudomonotone Equilibrium Problems

LIU Wenwen, DANG Yazheng

(Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

**Abstract:** Several algorithms for solving equilibrium problems were introduced. Aiming at the problem that the convergence proof should be under the Lipschitz continuity condition, an accelerating projection algorithm was proposed. The algorithm adopts the auxiliary problem principle and the Armijo-type line-search technique to get an estimate point. According to the estimate point, a hyperplane was constructed. Through selecting an appropriate step length and reducing the projection domain, the sequence generated by the algorithm gained a fast speed constringency, which realizes the purpose of accelerating the projection. Finally, under some suitable conditions (without Lipschitz-type continuous condition), the global convergence of the sequence was proved.

**Keywords:** equilibrium problem; accelerating projection algorithm; Armijo-type line-search; pseudomonotone

收稿日期: 2016-12-22

基金项目: 上海市自然科学基金资助项目(14ZR1429200); 上海市教委创新项目(15ZZ073)

第一作者: 刘雯雯(1993-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 系统分析与集成、均衡问题. E-mail: wsluww@163.com

通信作者: 党亚峥(1973-), 女, 副教授. 研究方向: 优化、智能电网、均衡问题. E-mail: jgdzy@163.com

## 1 问题的提出

均衡问题  $EP(f, C)^{[1]}$  是:寻找点  $x^* \in C$ , 使对  $\forall y \in C$ , 下面不等式成立:

$$f(x^*, y) \geq 0 \quad (1)$$

式中:  $C \subseteq R^n$  是非空闭凸集,  $f: C \times C \rightarrow R$  为一个双重函数, 即对  $\forall x \in C, f(x, x) = 0$  恒成立.

当  $f(x, y) = \langle F(x), y - x \rangle$ , 其中,  $F: C \rightarrow R^n$  为一个连续函数, 那么,  $EP(f, C)$  就转化成变分不等式问题  $VI(F, C)$ , 即寻找点  $x^* \in C$ , 使对  $\forall y \in C$ , 下面不等式成立:

$$\langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad (2)$$

显然,  $f$  连续,  $F$  也连续. 如果  $f$  关于  $x^* \in C$  是伪单调的, 则  $F$  关于  $x^* \in C$  也是伪单调的.

$EP(f, C)$  在电力市场、交通运输、经济及网络等问题中都有广泛的应用<sup>[2-5]</sup>. 求解  $EP(f, C)$  的方法主要有三类: a. 近似点法, 该方法由 Martinet<sup>[6]</sup> 提出并首次应用在求解  $VI(F, C)$ , 后来 Moudafi<sup>[7]</sup> 在假设映射  $f$  单调的前提下将该算法推广到求解  $EP(f, C)$ ; b. gap 函数法<sup>[8]</sup>, 利用连续可微的 gap 函数将  $EP(f, C)$  转化为最优化问题, 但是, 算法的收敛性建立在  $f$  强单调的基础上; c. 辅助问题原理法, Cohen<sup>[9]</sup> 提出  $x^* \in C$  是  $EP(f, C)$  的一个解, 当且仅当  $x^* \in C$  是强凸问题

$$\min \left\{ c_k f(x^*, y) + \frac{1}{2} \|y - x^*\|^2 \mid y \in C \right\}$$

的唯一解, 其中,  $c_k > 0$ , 但这需要  $f$  强单调且 Lipschitz 连续. 随后, Antipin<sup>[10]</sup> 在文献<sup>[9]</sup>的基础上, 在每次迭代过程中增加一个外推步, 提出了一种改进算法, 具体过程如下:

$$\begin{cases} x^0 \in C \\ y^k = \operatorname{argmin} \{ c_k f(x^k, y) + D(x^k, y) \mid y \in C \} \\ x^{k+1} = \operatorname{argmin} \{ c_k f(y^k, y) + D(x^k, y) \mid y \in C \} \end{cases}$$

式中:  $D$  是 Bregman 距离函数;  $C$  是一个多面凸集.

该算法减弱了  $f$  的单调性, 其收敛性建立在  $f$  伪单调且 Lipschitz 连续的基础上.

本文借助于辅助问题原理法, 结合 Solodov 等<sup>[11]</sup> 提出的求解变分不等式的改进投影算法, 运用 Armijo 型线搜索, 通过改进投影区域, 使每次迭代结果更接近均衡问题的解. 在  $f$  伪单调并连续 (非 Lipschitz 连续) 的前提下, 证明了算法的收敛性.

## 2 预备知识

定义 1 设  $C \subseteq R^n, f: C \times C \rightarrow R \cup \{+\infty\}$  是双重函数,

a. 若对  $\forall x, y \in C, \exists \rho > 0$ , 使得  $f(x, y) + f(y, x) \leq -\rho \|x - y\|^2$ , 则称  $f$  在  $C$  上是强单调的.

b. 若对  $\forall x, y \in C, f(x, y) + f(y, x) \leq 0$ , 则称  $f$  在  $C$  上是单调的.

c. 若对  $\forall x, y \in C, f(x, y) \geq 0 \Leftrightarrow f(y, x) \leq 0$ , 则称  $f$  在  $C$  上是伪单调的.

显然,  $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ .

定义 2 若存在正常数  $c_1, c_2$ , 使得  $f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) - c_1 \|x - y\|^2 - c_2 \|y - z\|^2$ , 则称  $f$  在  $C$  上 Lipschitz 连续.

定义 3 设  $X \subseteq R^n$ , 实值函数  $f: X \rightarrow R$ ,

a. 若对  $\forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0, 1]$ , 有  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$ , 则称  $f(x)$  为  $X$  上的拟凸函数.

b. 若对  $\forall x, y \in X, \langle \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$  蕴涵  $f(x) \geq f(y)$ , 或者  $f(x) < f(y)$  蕴涵  $\langle \nabla f(y), x - y \rangle < 0$ , 则称  $f(x)$  为  $X$  上的伪凸函数.

定义 4 对  $\forall z \in C, \partial_2 f(z, z)$  表示凸函数  $f(z, \cdot)$  在  $z$  处的次梯度, 其中,  $\partial_2 f(z, z)$  满足:

$$\begin{aligned} \partial_2 f(z, z) = & \{ \omega \in R^n : f(z, y) \geq f(z, z) + \langle \omega, y - z \rangle \forall y \in C \\ & \{ \omega \in R^n : f(z, y) \geq \langle \omega, y - z \rangle \forall y \in C \}. \end{aligned}$$

引理 1<sup>[12]</sup> 设  $P_C(\cdot)$  是  $C$  上的投影映射, 则

a.  $\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in R^n$ ;

b.  $\|P_C(x) - P_C(y)\|^2 \leq \langle P_C(x) - P_C(y), x - y \rangle, \forall x, y \in R^n$ ;

c.  $\langle x - P_C(x), y - P_C(y) \rangle \leq 0, \forall y \in C, x \in R^n$ ;

d.  $\|P_C(x) - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|P_C(x) - x\|^2, \forall y \in C, x \in R^n$ ;

e.  $\|P_C(x) - P_C(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|P_C(x) - x + y - P_C(y)\|^2, \forall x, y \in R^n$ .

引理 2<sup>[13]</sup> 设  $f(x, y)$  关于  $y$  是 Gateaux 可微的, 如果  $x^*$  是  $EP(f, C)$  的解, 即  $f(x^*, y) \geq 0, \forall y \in C$ , 则  $x^*$  也是变分不等式  $\langle G(x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \forall y \in C$  的解, 其中,  $G(x) = \partial f_2(x, x)$ . 进一步, 如果对每个  $x \in C, f(x, y)$  关于  $y$  是伪凸的, 则逆命

题也成立.

### 3 加速投影算法

基于上述的理论基础,现提出求解伪单调均衡问题的一种加速投影算法.该算法的基本思想是运用 Armijo 型线搜索得到一个预估点并以此构造一个超平面,进一步通过适当选择步长和减小投影域使得算法产生的序列快速收敛.现介绍具体算法.

#### 算法 1

步骤 0 取初始点  $x^0 \in C$ , 令  $\beta > 0, \gamma \in (0, 1)$ ,  $\sigma \in (0, \frac{\beta}{2})$ .

#### 步骤 1 计算

$$\begin{cases} y^k = \arg \min \left\{ f(x^k, y) + \frac{\beta}{2} \|y - x^k\|^2 : y \in C \right\} \\ r^k = x^k - y^k \end{cases}$$

令  $z^k = x^k - \gamma^{m_k} r^k$ , 其中,  $m_k$  是使得

$$\langle \partial_2 f(z^k, z^k), r^k \rangle \geq \sigma \|r^k\|^2$$

的最小非负数.

步骤 2 计算  $x^{k+1} = P_{C \cap H_k} [x^k - \alpha_k^1 F(z^k)]$ , 其中,  $H_k = \{x \in R^n \mid \langle F(z^k), x - z^k \rangle = 0\}$ ,  $\alpha_k^1 = \frac{\langle F(z^k), x^k - z^k \rangle}{\|F(z^k)\|^2}$ ,  $F(z^k) = \partial_2 f(z^k, z^k)$ .

步骤 3 令  $k = k + 1$ , 返回步骤 1.

### 4 收敛性分析

用  $SOL(f, C)$  表示均衡问题  $EP(f, C)$  的解集, 由文献[14], 若  $f$  是连续的, 则  $SOL(f, C)$  是闭集合; 若  $f$  是伪单调的, 则  $SOL(f, C)$  是凸集. 为了证明算法 1 的收敛性, 首先作出如下假设:

A1  $f$  在  $C$  上伪单调;

A2  $f(x, y)$  是  $C \times C$  上的连续可微凸函数且关于  $y$  是伪凸的,  $\partial_2 f(x, x)$  在  $C$  上是上半连续的; 根据上述假设可知,  $SOL(f, C)$  是一个闭凸集.

定理 1 用  $\{x^k\}_{k=0}^\infty$  表示由算法 1 产生的迭代序列, 若  $r^k = 0$ , 则  $x^k \in SOL(f, C)$ .

证明 假设  $r^k = 0$ , 则  $x^k$  是  $\min \left\{ f(x^k, y) + \frac{\beta}{2} \|y - x^k\|^2 : y \in C \right\}$  的解, 那么,

$$0 \in \partial_2 f(x, x) + N_C(x^k)$$

其中,  $N_C(x^k)$  是  $x^k$  处的外法向锥. 因此, 有

$$\langle \omega^k, x - x^k \rangle \geq 0, \forall x \in C \quad (3)$$

其中,  $\omega^k \in \partial_2 f(x, x)$ . 由于  $f(x^k, y^k)$  是凸函数, 则

$$\begin{aligned} f(x^k, x) - f(x^k, x^k) &\geq \\ \langle \omega^k, x - x^k \rangle, \forall x \in C \end{aligned} \quad (4)$$

结合式(3)和式(4), 又因为,  $f(x^k, x^k) = 0$ , 所以,  $f(x^k, x) \geq 0$  对  $\forall x \in C$  都成立, 即  $x^k$  是  $EP(f, C)$  的解.

定理 2 若  $r^k \neq 0$ , 则对  $\forall k \geq 0$ , 存在非负数  $m_k$  使得  $\langle \partial_2 f(z^k, z^k), r^k \rangle \geq \sigma \|r^k\|^2$  成立.

证明 假设  $\langle \partial_2 f(z^k, z^k), r^k \rangle - \sigma \|r^k\|^2 < 0$ , 即有  $\langle F(x^k - \gamma^{m_k} r^k), x^k - y^k \rangle - \sigma \|r^k\|^2 < 0$ , 因为,  $\gamma \in (0, 1)$ , 当  $m \rightarrow \infty$ , 取极限, 根据  $f(x, y)$  的连续性, 可以得到  $\langle F(x^k), x^k - y^k \rangle - \sigma \|r^k\|^2 \leq 0$ .

由引理 2, 即

$$f(x^k, y^k) + \sigma \|r^k\|^2 \geq 0 \quad (5)$$

另一方面, 因为,  $y^k$  是  $\min \left\{ f(x^k, y) + \frac{\beta}{2} \|y - x^k\|^2 : y \in C \right\}$  的解, 则有

$$\begin{aligned} f(x^k, y) + \frac{\beta}{2} \|y - x^k\|^2 &\geq f(x^k, y^k) + \\ \frac{\beta}{2} \|y^k - x^k\|^2, \forall y \in C \end{aligned}$$

当  $y = x^k$  时,

$$f(x^k, y^k) + \frac{\beta}{2} \|r^k\|^2 \leq 0 \quad (6)$$

结合式(5)和式(6), 则  $\sigma \|r^k\|^2 \geq \frac{\beta}{2} \|r^k\|^2$ . 若要上述不等式(6)成立, 则  $\|r^k\| = 0$  或者  $\sigma \geq \frac{\beta}{2}$ . 两者均与题设矛盾, 所以, 上述假设是不成立的.

引理 3 [15] 设  $x^k(\alpha) = P_C(x^k - \alpha F(y^k))$ ,  $\varphi_k(\alpha) = 2\alpha \langle F(z^k), x^k - z^k \rangle + \|x^{k+1} - (x^k - \alpha F(z^k))\|^2 - (\alpha)^2 \|F(z^k)\|^2$ , 则

$P_C[x^k - \alpha_k^2 F(y^k)] = P_{C \cap H_k}[x^k - \alpha_k^1 F(y^k)]$  式中,  $\alpha_k^2$  是函数  $\varphi_k(\alpha)$  取极大值时的  $\alpha$  值.

定理 3 假设  $f$  在  $C$  上伪单调且  $x^* \in SOL(f, C)$ , 则由算法 1 产生的序列  $\{x^k\}_{k=0}^\infty$  满足

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \frac{f^2(z^k, x^k)}{\|F(z^k)\|^2} \quad (7)$$

证明 将  $x^{k+1}$  代入式(7)的左边, 可得

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &= \\ \|P_{C \cap H_k}[x^k - \alpha_k^1 F(z^k)] - x^*\|^2 \end{aligned}$$

由引理1和引理3可得

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &= \|P_C[x^k - \alpha_k^2 F(z^k)] - x^*\|^2 \leq \\ &\|x^k - x^* - \alpha_k^2 F(z^k)\|^2 - \|x^{k+1} - \\ &(x^k - \alpha_k^2 F(z^k))\|^2 \leq \\ &\|x^k - x^*\|^2 - 2\alpha_k^2 \langle F(z^k), x^k - z^k \rangle + \\ &(\alpha_k^2)^2 \|F(z^k)\|^2 - \\ &\|x^{k+1} - (x^k - \alpha_k^2 F(z^k))\|^2 \\ &\|x^k - x^*\|^2 - \varphi_k(\alpha_k^2) \end{aligned}$$

其中,第1个不等式由引理1得到,第2个不等式由伪单调条件得到.根据引理3,可得

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|x^k - x^*\|^2 - \\ &\varphi_k(\alpha_k^1) \leq \|x^k - x^*\|^2 - 2\alpha_k^1 \langle F(z^k), x^k - x^* \rangle + \\ &(\alpha_k^1)^2 \|F(z^k)\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \\ &2\alpha_k^1 \langle F(z^k), x^k - z^k \rangle + \frac{f^2(z^k, x^k)}{\|F(z^k)\|^2} = \\ &\|x^k - x^*\|^2 - \frac{f^2(z^k, x^k)}{\|F(z^k)\|^2} \end{aligned}$$

**定理4** 假设  $f$  在  $C$  上伪单调且  $x^* \in \text{SOL}(f, C)$ , 则由算法1产生的序列  $\{x^k\}_{k=0}^\infty$  和  $\{z^k\}_{k=0}^\infty$  满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - z^k\| = 0$$

**证明** 任取  $x^* \in \text{SOL}(f, C)$ , 由定理3可知, 序列  $\|x^k - x^*\|$  是一个非增序列, 即  $\{x^k\}_{k=0}^\infty$  是有界收敛的, 所以, 记  $\|x^{k+1} - x^*\|^2 \rightarrow m$ ,  $m$  为常数, 则  $\|x^{k+1} - x^*\|^2 - \|x^k - x^*\|^2 \rightarrow 0$ . 因此,  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z^k, x^k) \rightarrow 0$ , 即  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle F(z^k), x^k - z^k \rangle \rightarrow 0$ .

另一方面, 由  $z^k = x^k - \gamma^{m_k} r^k$ , 即  $x^k - z^k = \gamma^{m_k} (x^k - y^k)$ , 显然, 由辅助问题原理, 当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - y^k\| = 0$ . 所以,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - z^k\| = 0$ .

**定理5** 假设  $f$  连续可微, 在  $C$  上伪单调, 则由算法1产生的序列  $\{x^k\}_{k=0}^\infty$  全局收敛到式(1)中伪单调均衡问题的解.

**证明** 因为, 由算法1产生的序列  $\{x^k\}_{k=0}^\infty$  是一个有界收敛序列, 则  $\{x^k\}_{k=0}^\infty$  有收敛的子序列, 记它的一个收敛子列为  $\{x^{k_j}\}_{j=0}^\infty$ , 且当  $j \rightarrow \infty$  时,  $\{x^{k_j}\}_{j=0}^\infty \rightarrow \hat{x}$ . 又因为,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - y^k\| = 0$ , 所以, 当

$j \rightarrow \infty$  时,  $\{y^{k_j}\}_{j=0}^\infty \rightarrow \hat{x}$ .

$$f(x^{k_j}, y) + \frac{\beta}{2} \|y - x^{k_j}\| \geq$$

$$f(x^{k_j}, y^{k_j}) + \frac{\beta}{2} \|y^{k_j} - x^{k_j}\|, \forall y \in C$$

当  $j \rightarrow \infty$  时, 则有

$$f(\hat{x}, y) + \frac{\beta}{2} \|y - \hat{x}\| \geq$$

$$f(\hat{x}, \hat{x}) + \frac{\beta}{2} \|\hat{x} - \hat{x}\|, \forall y \in C$$

因为, 对  $\forall x \in C, f(x, x) = 0$  恒成立, 所以,

$$f(\hat{x}, y) + \frac{\beta}{2} \|y - \hat{x}\| \geq 0$$

因此, 得到  $\hat{x}$  是式(1)中伪单调均衡问题的一个解.

将式(7)中的  $x^*$  用  $\hat{x}$  代替, 则可以得到数列

$\{\|x^k - \hat{x}\|\}$  收敛. 又因为,  $\|x^{k_j} - \hat{x}\| \rightarrow 0$ , 所以, 结论得证.

## 5 结 论

通过改进投影区域, 给出了求解伪单调均衡问题的一种加速投影算法, 由以上证明可知, 此算法不要求双重函数  $f$  是 Lipschitz 连续的, 且在伪单调条件下是全局收敛的.

**参考文献:**

- [1] GIANNESI F, MAUGERI A, PARDALOS P M. Equilibrium problems: nonsmooth optimization and variational inequality models [M]. Boston, MA: Springer, 2001.
- [2] OLIVEIRA H A E JR. Coalition formation feasibility and Nash-Cournot equilibrium problems in electricity markets: a Fuzzy ASA approach [J]. Applied Soft Computing, 2015, 35: 1-12.
- [3] HO W, WONG S C, YING L B. Sequential optimization approach for the multi-class user equilibrium problem in continuous transportation system [J]. Journal of Advanced Transportation, 2010, 38(3): 323-345.
- [4] BOGDAN M. Applications of parametric abstract equilibrium problems in economics [J]. Procedia Economics and Finance, 2012, 3: 99-104.
- [5] DE CEA J, FERNÁNDEZ J E, V DEKOCK, et al. Solving network equilibrium problems on multimodal urban transportation networks with multiple user classes [J]. Transport Reviews, 2005, 25(3): 293-317.
- [6] MARTINET B. Regularization d'inéquations variationnelles par approximations successives [J]. Rev Fr Inform Rech Opér, 1970, 4(3): 154-159.
- [7] MOUDAFI A. Proximal point algorithm extended to equilibrium problems [J]. Journal of Natural Geometry, 1997, 15(1/2): 91-100.

(下转第585页)

- [5] SULTAN S, MARLER T. Multi-scale predictive human model for preventing injuries in the ankle and knee[J]. *Procedia Manufacturing*, 2015, 3: 3767 – 3774.
- [6] DOBLARÉ M, CUETO E, CALVO B, et al. On the employ of meshless methods in biomechanics [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194 (6/7/8): 801 – 821.
- [7] 何川, 李彦林, 张振光, 等. 不同屈曲状态下膝关节韧带生物力学的有限元分析[J]. *中国运动医学杂志*, 2015, 34(7): 662 – 669.
- [8] 陈莲, 周海亭. 计算橡胶隔振器静态特性的数值分析方法[J]. *振动与冲击*, 2005, 24(3): 120 – 123.
- [9] HASHEMI J, CHANDRASHEKAR N, SLAUTERBECK A. The mechanical properties of the human patellar tendon are correlated to its mass density and are independent of sex[J]. *Clinical Biomechanics*, 2005, 20(6): 645 – 652.
- [10] 黄建龙, 解广娟, 刘正伟. 基于 Mooney-Rivlin 和 Yeoh 模型的超弹性橡胶材料有限元分析[J]. *橡塑技术与装备*, 2008, 34(12): 22 – 26.
- [11] QUNLI S, DHAHER Y. Three-dimensional hyperelastic model of the human knee; a parametric sensitivity study [R]. Chicago, IL, USA: Northwestern University and Rehabilitation Institute of Chicago, 2005.
- [12] WILSON C. Nonlinear finite element analysis of an abdominal aortic aneurysm [D]. Massachusetts: Tufts University, 2008.
- [13] HAUT R C, POWLISON A C, RUTHERFORD G W, et al. Some effects of donor age and sex on the mechanical properties of patellar tendon graft tissues[J]. *ASME Adv Bioeng*, 1988, 8: 75 – 78.
- [14] HAUT R C, POWLISON A C. The effects of test environment and cyclic stretching on the failure properties of human patellar tendons [J]. *Journal of Orthopaedic Research*, 1990, 8(4): 532 – 540.
- [15] 周安国, 于涛, 陈鹏, 等. 膝关节后交叉韧带的拉伸力学性质[J]. *中国组织工程研究与临床康复*, 2008, 12(6): 1085 – 1088.
- [16] KENNEDY J C, HAWKINS R J, WILLIS R B, et al. Tension studies of human knee ligaments: yield point, ultimate failure, and disruption of the cruciate and tibial collateral ligaments [J]. *The Journal of Bone & Joint Surgery*, 1976, 58(3): 350 – 355.
- [17] JOHNSON G A, TRAMAGLINI D M, LEVINE R E, et al. Tensile and viscoelastic properties of human patellar tendon[J]. *Journal of Orthopaedic Research*, 1994, 12(6): 796 – 803.
- [18] 王溪原, 李鹏, 马洪顺. ACL 和 MCL 拉伸力学性质实验研究[J]. *北京生物医学工程*, 2007, 26(3): 316 – 317.
- [19] 沙川华, 张涛, 李龙. 人体膝关节交叉韧带生物材料力学特征实验研究[J]. *体育科学*, 2013, 33(1): 72 – 77.

(编辑: 丁红艺)

(上接第 579 页)

- [8] MASTROENI G. Gap functions for equilibrium problems[J]. *Journal of Global Optimization*, 2003, 27 (4): 411 – 426.
- [9] COHEN G. Auxiliary problem principle extended to variational inequalities [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1988, 59(2): 325 – 333.
- [10] ANTIPIN A S. The convergence of proximal methods to fixed points of extremal mappings and estimates of their rate of convergence [J]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1995, 35(5): 539 – 551.
- [11] SOLODOV M V, SVAITER B F. A new projection method for variational inequality problems[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1999, 37 (3): 765 – 776.
- [12] ANH P N, LE THI H A. An Armijo-type method for pseudomonotone equilibrium problems and its applications[J]. *Journal of Global Optimization*, 2013, 57(3): 803 – 820.
- [13] 徐庆, 朱道立, 鲁其辉. Nash 均衡、变分不等式和广义均衡问题的关系[J]. *管理科学学报*, 2005, 8(3): 1 – 7.
- [14] KONNOV I. Combined relaxation methods for variational inequalities [J]. Berlin Heidelberg: Springer, 2001: 77 – 92.
- [15] WANG Y J, XIU N H, WANG C Y. Unified framework of extragradient-type methods for pseudomonotone variational inequalities [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2001, 111(3): 641 – 656.

(编辑: 石 瑛)