

几类特殊图的符号差

谢朝阳, 何常香

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 针对符号差的一个猜想: $-c_3(G) \leq s(G) \leq c_5(G)$, 基于特征值交错定理以及秩和符号差的关系, 运用归纳法证明了 n 阶图 G 中若存在点 v , 满足 $d(v) < n-1$ 且 $r(G) \neq r(G-v) + 1$, 则猜想成立, 并以实例说明了满足条件的图类的存在性. 同时证明了若图 H 是 k 圈图, χ_H 为 H 的核, 如果存在点 $v \in \chi_H$ 使得点 v 是 $H \setminus \{v\}$ 的可匹配点, 则 H 也满足猜想.

关键词: 图; 符号差; k 圈图

中图分类号: O 157.5 **文献标志码:** A

Signature of Several Special Graphs

XIE Zhaoyang, HE Changxiang

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: There is a conjecture on the signature: $-c_3(G) \leq s(G) \leq c_5(G)$. Based on the eigenvalue interleaving theorem and the relationship between the rank and the signature, the induction method was used to prove that if there exists a vertex v in G satisfying $d(v) < n-1$ and $r(G) \neq r(G-v) + 1$, then the conjecture holds. Furthermore, some examples were given to demonstrate the existence of the mentioned graphs. Meanwhile, it was proved that if H is a k -cyclic graph with base χ_H , if there exists a vertex v on χ_H such that v is matched in $H \setminus \{v\}$, then the graph H also coincides with the conjecture.

Keywords: graph; signature; k -cyclic graphs

1 基本概念及背景介绍

本文研究的图都是无环、无重边的简单图. 令 $G = (V, E)$ 是 n 阶的图, 顶点集为 $V(G) = \{v_1,$

$v_2, \dots, v_n\}$, 边集为 $E = E(G)$. G 的邻接矩阵 $A(G) = (a_{ij})$, 当且仅当 v_i 和 v_j 之间有边连, $a_{ij} = 1$; 否则, $a_{ij} = 0$. 邻接矩阵的正特征值个数、负特征值个数、零特征值个数分别称为图的正惯性指数、负惯性指数、零度, 分别记为 $p(G)$, $n(G)$ 和 $\eta(G)$. 正、负惯性指数之差称为图的符号差, 记为

收稿日期: 2017-08-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11301340)

第一作者: 谢朝阳(1994-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 代数图论. E-mail: 2275885700@qq.com

通信作者: 何常香(1964-), 女, 副教授. 研究方向: 代数图论. E-mail: changxiang-he@163.com

$s(G)$. 正、负惯性指数之和称为图的秩, 记为 $r(G)$. n 阶的完全图、路、圈、星图分别记为 $K_n, P_n, C_n, K_{1, n-1}$. $N(v)$ 表示 v 点的邻点集合, $d(v)$ 表示 v 点的度. 若图 G 满足 $|E(G)| = |V(G)| + k - 1$, 其中, $|E(G)|$ 是图 G 的边数, $|V(G)|$ 是图 G 的点数, 则图 G 称为 k 圈图. 由 k 个仅相交于一个点的圈构成的图(图1)称为 α -图, 连接起点和终点的 k 条内点不交的路构成的图(图2)称为 θ -图. $\varphi_1 = \{\text{所有恰含一个 } \alpha\text{-图作为导出子图的 } k\text{ 圈图}\}$ 和 $\varphi_2 = \{\text{所有恰含一个 } \theta\text{-图作为导出子图的 } k\text{ 圈图}\}$ 是两类 k 圈图. 对于给定的 $H \in \varphi_1 \cup \varphi_2$, H 所含的导出子图 α -图或 θ -图称为图 H 的核, 记为 χ_H . 对于每一个点 $v \in \chi_H$, 将包含顶点 v 且不包含 χ_H 上其他点的 H 的最大连通导出子图记为 $H\{v\}$, 易知 $H\{v\}$ 是一棵树.

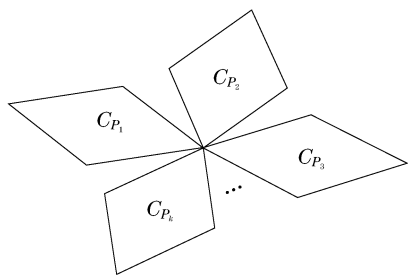


图1 k 个仅相交于一个点的圈构成的图
Fig.1 Graph made up of k cycles only intersected by one point

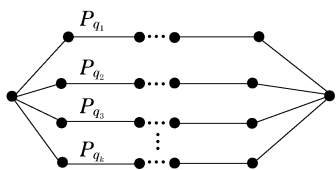


图2 连接起点和终点的 k 条内点不交的路构成的图
Fig.2 Graph made up of k roads that connect the starting point and the end point and are non-intersected by the internal points

因为, 分子的稳定性和分子图的零度有关, 所以, 吸引了一大批学者对图的零度进行研究. 而图的正、负惯性指数和图的零度密切相关, 关于图的正、负惯性指数的研究也引起了学者们的重视. 文献[1]提出了一个关于符号差的猜想:

$$-c_3(G) \leq s(G) \leq c_5(G) \quad (1)$$

式中, $c_3(G)$ 和 $c_5(G)$ 分别表示 G 中长为 $4k+3$ 和 $4k+5$ (k 为非负整数) 的圈的数目.

2012年, 文献[1]证明了任意简单图的符号差

满足 $s(G) \leq c_1(G)$, 其中, $c_1(G)$ 表示 G 中的奇圈数, 并证明了树、单圈图和双圈图对于式(1)成立. 2014年, 文献[2]证明了简单图的线图对于式(1)成立. 2014年, 文献[3]证明了边不交圈的图的符号差满足猜想. 2015年, 文献[4]构造了一些满足式(1)的 k 圈图. 2016年, 文献[5]研究了符号差等于奇圈数的图所满足的条件. 本文证明了 n 阶图 G 中若存在点 v , 满足 $d(v) < n-1$ 且 $r(G) \neq r(G-v) + 1$, 则式(1)对于图 G 成立, 并以实例说明了满足条件的图类的存在性. 并证明了若 H 是 k 圈图, 如果存在点 $v \in \chi_H$ 是 $H\{v\}$ 的可匹配点, 则 H 满足式(1).

2 主要引理

令 A, B 是 n 阶的实对称矩阵, 若存在 n 阶的可逆矩阵 P , 使得 $P^T A P = B$, 则称 A 和 B 合同, 记为 $A \simeq B$.

引理1^[1] 若 G 是树、单圈图或双圈图, 则 $-c_3(G) \leq s(G) \leq c_5(G)$.

引理2^[6] 令 A, B 是同阶的实对称矩阵, 且 $A \simeq B$, 则 $p(A) = p(B)$, $n(A) = n(B)$, $\eta(A) = \eta(B)$, $s(A) = s(B)$.

引理3^[1] 设 $G_1, G_2, \dots, G_t$ 为 G 的所有连通分支, 则 $p(G) = \sum_{i=1}^t p(G_i)$, $n(G) = \sum_{i=1}^t n(G_i)$, $\eta(G) = \sum_{i=1}^t \eta(G_i)$.

引理4(特征值交错定理)^[7] 若 A 是实对称矩阵, B 是 A 的主子矩阵, 则 B 的特征值交错于 A 的特征值. 特别地, 若 n 阶的图 G 有特征值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, 且 H 是 G 的一个删点子图, 有特征值 $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$, 则 $\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$.

引理5 设 v 是图 G 中的一点, 则

$$|s(G) - s(G-v)| \leq 1$$

$$r(G) - 2 \leq r(G-v) \leq r(G)$$

证明 设 n 阶的图 G 有特征值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq \dots \geq \lambda_{s-1} \geq \lambda_s \geq \lambda_{s+1} \geq \dots \geq \lambda_{s+r} \geq \lambda_{s+r+1} \geq \dots \geq \lambda_n$. 设 $H = G - v$, H 有特征值 $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r \geq \dots \geq \mu_{s-1} \geq \mu_s \geq \mu_{s+1} \geq \dots \geq \mu_{s+r} \geq \mu_{s+r+1} \geq \dots \geq \mu_{n-1}$. 由特征值交错定理可知, $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq \mu_r \geq \dots \geq \lambda_{s-1} \geq \mu_{s-1} \geq \lambda_s \geq \mu_s \geq \lambda_{s+1} \geq \mu_{s+1} \geq \dots \geq \lambda_{s+r} \geq \mu_{s+r} \geq \lambda_{s+r+1} \geq \mu_{s+r+1} \geq \dots \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n$, 设 λ_s 为 λ_i ($1 \leq i \leq n$) 里面最后一个正数.

a. 若 $\mu_s > 0$, 则 $p(G) = p(H)$; 若 $\mu_{s+r} = 0$, 则 $n(G) - 1 = n(H)$; 若 $\mu_{s+r} < 0$, 则 $n(G) = n(H)$.

b. 若 $\mu_s < 0$, 则 $p(G) - 1 = p(H)$, $n(G) = n(H)$.

c. 若 $\mu_s = 0$, 则 $p(G) - 1 = p(H)$; 若 $\mu_{s+r} = 0$, 则 $n(G) - 1 = n(H)$; 若 $\mu_{s+r} < 0$, 则 $n(G) = n(H)$.

则对应的 $r(G)$ 和 $s(G)$ 可以表示为:

a. $r(G) - 1 = r(H)$ 或 $r(G) = r(H)$; $s(G) + 1 = s(H)$ 或 $s(G) = s(H)$.

b. $r(G) - 1 = r(H)$; $s(G) - 1 = s(H)$.

c. $r(G) - 2 = r(H)$ 或 $r(G) - 1 = r(H)$; $s(G) = s(H)$ 或 $s(G) - 1 = s(H)$.

综上所述, $r(G) - 2 \leq r(G - v) \leq r(G)$, $|s(G) - s(G - v)| \leq 1$.

引理 6^[2] 设 v 是图 G 的一个点, 若 $r(G - v) = r(G)$ 或 $r(G - v) = r(G) - 2$, 则 $s(G) = s(G - v)$.

图 G 的一个匹配是指 G 的一个独立边集, 图 G 含边最多的一个匹配称为 G 的一个最大匹配. 设 G 是一个图, $v \in V(G)$. 若存在 G 的一个最大匹配覆盖点 v , 则称点 v 是 G 的一个可匹配点; 否则, 称点 v 是 G 的一个不可匹配点. 若图 G 仅由一个点组成, 约定这个点是 G 的不可匹配点.

设图 G_1 和图 G_2 顶点不相交, $u \in V(G_1)$, 在 $G_1 \cup G_2$ 中将点 u 和 G_2 的任意 k 个点连接得到的图称为 G_1 和 G_2 的关于点 u 的一个 k -连图, 记为 $G_1(u) \odot^k G_2$. 注意, 当 k 小于 G_2 的阶数时, 图 $G_1(u) \odot^k G_2$ 并不唯一.

引理 7^[1] 设 G 是 n 阶图, u 是树 T 的一个可匹配点, 则对每一正整数 $k (1 \leq k \leq n)$, 有

a. $p(T(u) \odot^k G) = p(T) + p(G)$;

b. $n(T(u) \odot^k G) = n(T) + n(G)$;

c. $\eta(T(u) \odot^k G) = \eta(T) + \eta(G)$.

3 主要结论

引理 8 $-c_3(K_n) \leq s(K_n) \leq c_5(K_n)$ 成立.

证明 当 $n \leq 2$ 时, 结论显然成立. 以下假设 $n \geq 3$, 由 $p(K_n) = 1$, $n(K_n) = n - 1$, 故 $s(K_n) = p(K_n) - n(K_n) = 2 - n \leq 0 \leq c_5(K_n)$. 当 $m > n$ 时, 约定 $\binom{n}{m} = 0$, 则由定义可知,

$$c_3(K_n) = \binom{n}{3} + \binom{n}{7} + \cdots + \binom{n}{4k+3}$$

其中, $4k+3$ 是小于 n 的最大整数, 且 k 为整数. 显然,

$$-c_3(K_n) = -\binom{n}{3} - \binom{n}{7} - \cdots -$$

$$\binom{n}{4k+3} \leq -\binom{n}{3} \leq 2 - n = s(K_n)$$

综上所述, $-c_3(K_n) \leq s(K_n) \leq c_5(K_n)$ 成立.

引理 9 设 e 是 K_n 中的任意一条边, 则 $-c_3(K_n - e) \leq s(K_n - e) \leq c_5(K_n - e)$ 成立.

证明 当 $n \leq 3$ 时, 结论显然成立. 以下假设 $n \geq 4$, 设 $K_n - e$ 的邻接矩阵为 A , 排列一下 $K_n - e$ 中点的位置, 则邻接矩阵 A 可写为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

经计算, $|\lambda E - A| = \lambda[\lambda^2 - (n-3)\lambda - 2(n-2)](\lambda+1)^{n-3}$. 故 $p(K_n - e) = 1$, $n(K_n - e) = n - 2$, $\eta(K_n - e) = 1$, 从而, $s(K_n - e) = p(K_n - e) - n(K_n - e) = 3 - n < 0 \leq c_5(K_n - e)$. 以 $n_3(K_n - e)$ 表示 $K_n - e$ 中 3-圈的个数, 则

$$c_3(K_n - e) \geq n_3(K_n - e) = n_3(K_n) -$$

$$(n-2) = \binom{n}{3} - (n-2) \geq n-2$$

故 $-c_3(K_n - e) \leq 2 - n$, 从而 $s(K_n - e) \geq -c_3(K_n - e)$.

综上所述, $-c_3(K_n - e) \leq s(K_n - e) \leq c_5(K_n - e)$ 成立.

定理 1 若 n 阶图 G 中存在点 v , 满足 $d(v) < n-1$ 且 $r(G) \neq r(G-v) + 1$, 则 $-c_3(G) \leq s(G) \leq c_5(G)$.

证明 设 G 是由 K_n 删 k 条边得到的 n 阶图. 若 $k=0$ 或 $k=1$, 由引理 8 和引理 9 可知结论成立. 下面假设 $k \geq 2$.

由于图 G 中存在点 v 满足 $d(v) < n-1$, 所以, $G-v$ 可以看作由 K_{n-1} 删 b 条边后得到的图, 且 $b < k$, 由归纳法可知, $-c_3(G-v) \leq s(G-v) \leq c_5(G-v)$. 因为, $r(G) \neq r(G-v) + 1$, 由引理 5 可知, $r(G) = r(G-v)$ 或者 $r(G) = r(G-v) + 2$, 从而

由引理 6 可知, $s(G) = s(G - v)$. 由于 $c_3(G) \geq c_3(G - v)$, $c_5(G) \geq c_5(G - v)$, 故 $-c_3(G) \leq s(G) \leq c_5(G)$.

推论 1 若 G 中存在孤立点, 则 $-c_3(G) \leq s(G) \leq c_5(G)$.

证明 设 $H = G - v$, 则

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A(H) \end{bmatrix}$$

故 $r(G) = r(G - v)$, 由定理 1 可知, $-c_3(G) \leq s(G) \leq c_5(G)$.

定理 2 设 H 是 k 圈图, 若存在点 $v \in \chi_H$ 是 $H\{v\}$ 的可匹配点, 则 H 满足 $-c_3(H) \leq s(H) \leq c_5(H)$.

证明 对于 $k=0$ (树), $k=1$ (单圈图), 结论成立. 下面假设 $k \geq 2$.

因为, 存在点 $v \in \chi_H$ 是 $H\{v\}$ 的可匹配点, 且 H 是 $H\{v\} \odot^2 (H - H\{v\})$ 中的一个图, 则由引理 7 可知, $p(H) = p(H\{v\}) + p(H - H\{v\})$, $n(H) = n(H\{v\}) + n(H - H\{v\})$, 故 $p(H) - n(H) = [p(H\{v\}) - n(H\{v\})] + [p(H - H\{v\}) - n(H - H\{v\})]$, 即 $s(H) = s(H\{v\}) + s(H - H\{v\})$. 由于 $v \in \chi_H$, 则 v 属于某个圈, 删去 $H\{v\}$ 至少会破坏一个圈, 故 $H - H\{v\}$ 的每一个连通分支都满足圈数小于 k . 假设 $H - H\{v\}$ 的所有连通分支为 $H_1, H_2, \dots, H_m$, 由归纳法可知, $-c_3(H_i) \leq s(H_i) \leq c_5(H_i) (i=1, \dots, m)$, 从而有

$$-\sum_{i=1}^m c_3(H_i) \leq \sum_{i=1}^m s(H_i) \leq \sum_{i=1}^m c_5(H_i)$$

由引理 3 可知,

$$-\sum_{i=1}^m c_3(H_i) \leq s(H - H\{v\}) \leq \sum_{i=1}^m c_5(H_i)$$

由 $c_3(H)$, $c_5(H)$ 的定义可知, $-c_3(H - H\{v\}) \leq s(H - H\{v\}) \leq c_5(H - H\{v\})$. 由于 $H\{v\}$ 是树, 则 $s(H\{v\}) = 0$, 从而 $s(H) = s(H - H\{v\})$. 而删点子图中的圈数不会超过原图中的圈数, 则 $-c_3(H) \leq s(H) \leq c_5(H)$.

4 满足 $r(G) \neq r(G - v) + 1$ 的特殊图

推论 2 设 G 是 $n (n \geq 2)$ 阶的图, 若 G 中存在不相邻的两点 u, v , 满足 $N(u) = N(v)$, 则 $-c_3(G) \leq s(G) \leq c_5(G)$.

证明 由于 $uv \notin E(G)$ 且 $N(u) = N(v)$, 所以, $A(G)$ 中 u, v 对应的两行完全相同, 故 $r(G) = r(G - v)$ 成立, 由定理 1 可知, $-c_3(G) \leq s(G) \leq$

$c_5(G)$.

推论 3 设 n 阶的图 G 中存在点 u , 若 G 中存在不同于 u 的 $k (k \geq 2)$ 个点 $v_1, v_2, \dots, v_k$, 满足 $N(v_i) \subseteq N(u) (i=1, \dots, k)$, 且 $N(u) = N(v_1) \dot{\cup} N(v_2) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} N(v_k)$, 则 $-c_3(G) \leq s(G) \leq c_5(G)$.

证明 因为, $N(u)$ 是 $N(v_1), N(v_2), \dots, N(v_k)$ 的不交并, 所以, 在 G 的邻接矩阵中可以通过 $v_1, v_2, \dots, v_k$ 对应的行将 u 对应的行变为全零行. 故 $r(G) = r(G - u)$ 成立, 且 u 和 $v_1, v_2, \dots, v_k$ 不相连, 因此, $d(u) < n - 1$, 则由定理 1 可知结论成立.

推论 4 设 G 是 $n (n \geq 3)$ 阶的图, 若 G 中存在悬挂点, 则 $-c_3(G) \leq s(G) \leq c_5(G)$.

证明 G 的邻接矩阵可写为

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha^T & H \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H \end{bmatrix}$$

其中, 1 对应的是悬挂点 v , 则 $r(G) = r(G - v) + 2$, 且 $d(v) < n - 1$, 由定理 1 可知, $-c_3(G) \leq s(G) \leq c_5(G)$.

参考文献:

- [1] MA H C, YANG W H, LI S G. Positive and negative inertia index of a graph[J]. Linear Algebra and its Applications, 2013, 438: 331 - 341.
- [2] WANG L, FAN Y Z. The signature of line graphs and power trees[J]. Linear Algebra and its Applications, 2014, 448: 264 - 273.
- [3] JIANG Y M. The signature of edge-disjoint cyclic graphs[J]. Advances in Mathematics (China), 2014, 43 (6): 863 - 868.
- [4] WANG D Y, TIAN F L. The signature of k -cyclic graphs of ∞ -type[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2016, 64(3): 375 - 382.
- [5] MA X B, WONG D, TIAN F L. Characterization of graphs whose signature equals the number of odd cycles[J]. Linear Algebra and its Applications, 2016, 511: 259 - 273.
- [6] LANCASTER P, TISMENETSKY M. The theory of matrices[M]. 2nd ed. Orlando, FL: Academic Press, 1985.
- [7] CVETKOVIĆ D M, DOOB M, SACHS H. Spectra of graphs[M]. New York: Academic Press, 1980.

(编辑: 石 瑛)