

三类图的拉普拉斯谱半径的极限点

李静花, 何常香

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 将图的结构与对应的拉普拉斯矩阵相结合, 研究其拉普拉斯特征多项式。根据拉普拉斯特征多项式的特征求出了图的拉普拉斯谱半径的极限点。利用图经粘连运算后的拉普拉斯特征多项式以及图的拉普拉斯谱半径的上界和下界, 证明了三类图的拉普拉斯谱半径的极限点的存在性, 证明了 $n \rightarrow \infty$ 时图类的拉普拉斯谱半径是某方程的最大根。

关键词: 拉普拉斯谱半径; 极限点; 粘连

中图分类号: O 157.5 **文献标志码:** A

Limit Points of Laplacian Spectral Radii of Three Types of Graphs

LI Jinghua, HE Changxiang

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The Laplacian characteristic polynomials of the structures of graphs combined with corresponding Laplace matrices were studied. The limit points of the Laplacian spectral radii were provided according to the properties of Laplacian characteristic polynomials. For three types of graphs, the existence of limit points of the Laplacian spectral radii was proved and it was determined when $n \rightarrow \infty$, the Laplacian spectral radius of a graph is the largest root of certain equation by using some Laplacian characteristic polynomials of the graphs after coalescent operations and considering the upper and lower bounds of Laplacian spectral radii of the graphs.

Keywords: Laplacian spectral radii; limit point; coalescence

1 问题的提出

设 $G = (V, E)$ 为 n 阶简单连通图, 其中, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是图 G 的点集合, E 是图 G 的边集合。定义 $D(G)$ 为图 G 的度对角矩阵, $D(G) = \text{diag}(d_G(v_1),$

$d_G(v_2), \dots, d_G(v_n))$, 其中, $d_G(v_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ 表示点 v_i 的度; $A(G)$ 为图 G 的邻接矩阵, $A(G) = (a_{ij})$, 若 $v_i v_j \in E$, $a_{ij} = 1$; 否则, $a_{ij} = 0$; $L(G)$ 为图 G 的拉普拉斯矩阵, $L(G) = D(G) - A(G)$ 。 $L(G)$ 为半正定奇异矩阵, 设其特征值为 $\mu_1(G) \geq \mu_2(G) \geq \dots \geq$

收稿日期: 2017-07-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11301340, 11201303); 上海市自然科学基金资助项目 (12ZR1420300); 沪江基金资助项目 (B14005)

第一作者: 李静花 (1991-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 代数图论. E-mail: 2397093827@qq.com

通信作者: 何常香 (1979-), 女, 副教授. 研究方向: 代数图论. E-mail: changxiang-he@163.com

$\mu_n(G) = 0$ 。将图 G 的最大拉普拉斯特征值 $\mu_1(G)$ 称为图 G 的拉普拉斯谱半径, 记为 $\mu(G)$ 。对于图 G 的拉普拉斯矩阵的特征多项式 $\det(xI - L(G))$ 简记为 $\Phi(G)$ 。

1972年, Hoffman^[1]研究了图的特征根的极限点, 并给出了图的特征根的极限点的定义。类似地, 本文给出图的拉普拉斯谱半径的极限点的定义。

定义 1 对于实数 r , 若存在一个图序列 $\{G_n\}$, 使得

$$\mu(G_i) \neq \mu(G_j), i \neq j \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G_n) = r$$

则称实数 r 是图的拉普拉斯谱半径的极限点。

文献[2]研究了以下3类图的拉普拉斯谱半径的极限点: 连通图 G 中某1点与 P_n 的1端通过1条边相连(如图1所示); 连通图 G 中某1点与2条内点不交的 P_n 的1端分别通过1条边相连(如图2所示); P_n 的2个端点分别与2个顶点不相交的二部连通图 G, H 中某1点通过1条边相连(如图3所示)。文献[3]研究了图的拉普拉斯特征值极限点集合的性质, 并确定了树的代数连通度极限点前2大的值; 文献[4]研究了代数连通度极限点的性质, 并确定了树的代数连通度前4大的值; 文献[5]确定了树的代数连通度极限点的第5~14大的值。

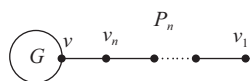


图 1 $G : P_n$

Fig.1 $G : P_n$

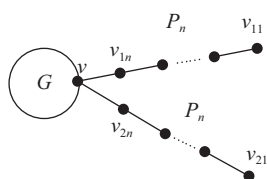


图 2 $G : (P_n, P_n)$

Fig.2 $G : (P_n, P_n)$

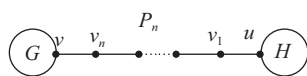


图 3 $(G, H) : P_n$

Fig.3 $(G, H) : P_n$

本文主要研究如下3类图的拉普拉斯谱半径的极限点: 连通图 G 中1点与多条内点不相交的 P_{n+1} 的1端点粘连(如图4所示); 连通二部图 G 中1点与1个 C_n 中1点粘连(如图5所示); 至

少含1条边的连通二部图 G 中1点与多个顶点不相交的 C_n 中1点粘连(如图6所示)。

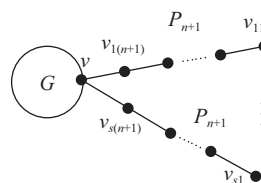


图 4 $G_v(s, n)$

Fig.4 $G_v(s, n)$

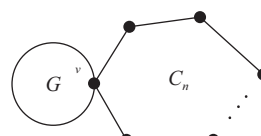


图 5 $G \cdot C_n$

Fig.5 $G \cdot C_n$

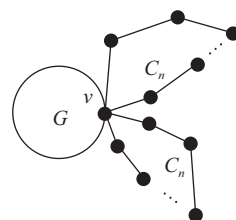


图 6 $G'_v(s, n)$

Fig.6 $G'_v(s, n)$

本文直接引用的其他术语和记号参见文献[6]。

2 主要引理

现介绍一些本文证明中需要用到引理。

设 G 是简单连通图, G' 是图 G 添加1条新边 e 后所得的图, 即 $G' = G + e$ 。

引理 1^[7] 图 G 和图 G' 的拉普拉斯特征值满足交错定理, 即

$$\mu_1(G') \geq \mu_1(G) \geq \mu_2(G') \geq \mu_2(G) \geq \dots \geq \mu_n(G') = \mu_n(G) = 0$$

推论 1 若 G_1 是图 G 的子图, 则有

$$\mu(G_1) \leq \mu(G)$$

进一步地, 若 G_1 是图 G 的真子图, G_1 和 G 的拉普拉斯谱半径有引理2的关系。

引理 2^[8] 若 G_1 是连通二部图 G 的真子图, 则有

$$\mu(G_1) < \mu(G)$$

引理 3^[9] 对于图 G , 有

$$\mu(G) \leq \max \{d(v_i) + d(v_j) : v_i v_j \in E\}$$

若 G 是连通图, 则等式成立当且仅当 G 是二部正则图或二部准正则图。

引理 4^[10] 设 G 为至少有1条边的 n 阶连通图, 则有

$$\mu(G) \geq \Delta(G) + 1$$

其中, $\Delta(G)$ 是图 G 的最大度。等号成立当且仅当 $\Delta(G) = n - 1$ 。

设 $v \in V(G)$, 以 $L_v(G)$ 表示删去矩阵 $L(G)$ 中点 v 所对应的行和列而得到的主子阵。设 P_n 和 C_n 分别表示恰有 n 个顶点的路和圈, B_n 表示删去矩阵 $L(P_{n+1})$ 中 P_{n+1} 的某1端点所对应的行和列而得到的主子阵, H_n 表示删去矩阵 $L(P_{n+2})$ 中 P_{n+2} 的2端点所对应的行和列而得到的主子阵。

引理 5^[2] 设 $a = \frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{2}$, $b = \frac{x-2-\sqrt{x^2-4x}}{2}$, 则有

$$\Phi(P_n) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4x}}(a^n - b^n), n \geq 0$$

且当 $x > 4$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(B_{n-1})}{\Phi(P_n)} = \frac{x - \sqrt{x^2-4x}}{2x}$$

设 k 是一个正整数, uv 是图 G 的任一边, 将边 uv 剖分 k 次是指在 G 中去掉边 uv , 并增加 k 个新点 $w_1, w_2, \dots, w_k$ 及 $(k+1)$ 条新边 $uw_1, w_1w_2, \dots, w_{k-1}w_k, w_kv$ 。

文献[2]中给出了内部路的定义。设 $v_1, v_2, \dots, v_k$ 是图 G 中的 $k(k \geq 2)$ 个点, 若满足如下条件:

a. $v_1, v_2, \dots, v_k$ 是互不相同的点(特别地, $v_1 = v_k$ 时除外);

b. v_i 与 v_{i+1} 相邻, $i = 1, 2, \dots, k-1$;

c. $d(v_1) \geq 3$, $d(v_k) \geq 3$, $d(v_i) = 2$, $2 \leq i \leq k-1$ 。

则称 $v_1v_2 \dots v_k$ 是图 G 的1条内部路。

引理 6^[11] 设 G 是连通二部图, uv 是图 G 的内部路中的1条边, G' 为将边 uv 剖分2次得到图, 则有

$$\mu(G') < \mu(G)$$

引理 7^[12] 设 $\Phi(P_0) = 0$, $\Phi(B_0) = 1$, $\Phi(H_0) = 1$, 则有

a. $\Phi(P_n) = x\Phi(H_{n-1})$;

b. $\Phi(C_n) = \frac{1}{x}\Phi(P_{n+1}) - \frac{1}{x}\Phi(P_{n-1}) + 2(-1)^{n+1}$, $x \neq 0$ 。

设 G, H 是2个顶点不交的图, v, u 分别是 G 和 H 的点, 以 $G:H$ 表示在 v, u 之间通过1条相连得到的图; 以 $(G, H):P_n$ 表示将 P_n 的2端点分别与点 v 与点 u 通过1条相连得到的图; 以 $G \cdot H$ 表示将 G 中的点 v 与 H 中的点 u 粘连得到的图。一般地, 设 $G_1, G_2, \dots, G_s, G$ 是 $s+1(s \geq 1)$ 个顶点不交的图, v_i 是图 G_i 中的点($i = 1, 2, \dots, s$), v 是图 G 中的点, 以

$G \cdot (G_1, \dots, G_s)$ 表示将图 $G_1, G_2, \dots, G_s$ 的点 $v_i(i = 1, 2, \dots, s)$ 分别与图 G 的点 v 粘连为1点得到的图, 简记为 Γ_s 。若 $G_1 = G_2 = \dots = G_s = P_{n+1}$, $v_{1(n+1)}, v_{2(n+1)}, \dots, v_{s(n+1)}$ 分别是这 s 条 P_{n+1} 的端点, 则记 $G \cdot (G_1, \dots, G_s)$ 为 $G_v(s, n)$; 若 $G_1 = G_2 = \dots = G_s = C_n$, $v_1, v_2, \dots, v_s$ 分别是这 s 个 C_n 的点, 则记 $G \cdot (G_1, \dots, G_s)$ 为 $G'_v(s, n)$ 。

引理 8^[11] 设 v 是连通图 G 中的一点, $G_v(s, n)$ 中的 $s(s \geq 2)$ 条路分别为: $v_{i(n+1)}v_{in} \dots v_{i1}(i = 1, 2, \dots, s)$, $G_v^{t_1, t_2, \dots, t_n}(s, n)$, 表示在点 $v_{1j}, v_{2j}, \dots, v_{sj}(1 \leq j \leq n)$ 之间分别添加 $t_j(0 \leq t_j \leq \frac{s(s-1)}{2}, 1 \leq j \leq n)$ 条边形成的图, 若 $\Delta(G_v(s, n)) \geq s+3$, 则有

$$\mu(G_v(s, n)) = \mu(G_v^{t_1, t_2, \dots, t_n}(s, n))$$

引理 9^[11] 设 v 是连通图 G 中的一点, $G_v(s, n)$ 中的 $s(s \geq 2)$ 条路分别为: $v_{i(n+1)}v_{in} \dots v_{i1}(i = 1, 2, \dots, s)$, $G_v^{t_1}(s, n)$, 表示在点 $v_{11}, v_{21}, \dots, v_{s1}$ 之间分别添加 $t_1(1 \leq t_1 \leq \frac{s(s-1)}{2})$ 条边形成的图, 若 $\Delta(G_v(s, n)) \geq s+1$, 则有

$$\mu(G_v(s, n)) = \mu(G_v^{t_1}(s, n))$$

3 主要结果

利用粘连图的拉普拉斯特征多项式确定了图 $G_v(s, n)$, $G \cdot C_n$, $G'_v(s, n)$ 的拉普拉斯谱半径的极限点, 首先给出定理证明过程中用到的粘连图的拉普拉斯特征多项式。

引理 10^[13] 设 v, u 分别是 G 和 H 的点, 图 $G \cdot H$ 如前定义, 则

$$\Phi(G \cdot H) = \Phi(G)\Phi(L_u(H)) + \Phi(H)\Phi(L_v(G)) - x\Phi(L_v(G))\Phi(L_u(H))$$

反复利用引理 10, 可得推论 2。

推论 2 图 Γ_s , $G_v(s, n)$, $G'_v(s, n)$ 如前定义, 则 $\Phi(\Gamma_s) = \Phi(L_v(G))$ 。

$$\prod_{i=1}^s \Phi(L_{v_i}(G_i)) \left(\frac{\Phi(G)}{\Phi(L_v(G))} + \sum_{i=1}^s \frac{\Phi(G_i)}{\Phi(L_{v_i}(G_i))} - sx \right)$$

$$\Phi(G_v(s, n)) = \Phi(L_v(G)) \cdot$$

$$\prod_{i=1}^s \Phi(B_n) \left(\frac{\Phi(G)}{\Phi(L_v(G))} + s \frac{\Phi(P_{n+1})}{\Phi(B_n)} - sx \right)$$

$$\Phi(G'_v(s, n)) = \Phi(L_v(G)) \cdot$$

$$\prod_{i=1}^s \Phi(H_{n-1}) \left(\frac{\Phi(G)}{\Phi(L_v(G))} + s \frac{\Phi(C_n)}{\Phi(H_{n-1})} - sx \right)$$

定理 1 设 G 是连通图, v 是 G 中的点, $G_v(m, n)$

如前定义, 则当 $m \geq 3$ 时, 有如下结果成立:

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G_v(m, n))$ 存在, 设为 $r_v(G)$, 则 $r_v(G) > 4$, 且 $r_v(G)$ 为方程

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 4x}}{2mx} \Phi(G) - \Phi(L_v(G)) = 0$$

的最大根。

b. 若 G 是二部图, 则 $r_v(G)$ 是图 $G_v(m, n)$ 的拉普拉斯谱半径的极限点。

证明 对于

$$\Delta(G_v(m, n)) = \begin{cases} \Delta(G), & \text{若 } \Delta(G) \geq d_G(v) + m \\ d_G(v) + m, & \text{若 } \Delta(G) < d_G(v) + m \end{cases}$$

由于 G 是连通图, m , $\Delta(G)$ 和 $d_G(v)$ 均为常数, 所以, $\Delta(G_v(m, n))$ 为常数。又由推论 1 可知, $\mu(G_v(m, n)) \leq \mu(G_v(m, n+1))$, 由引理 3 可知, $\mu(G_v(m, n)) \leq 2\Delta(G_v(m, n))$, 所以, $\mu(G_v(m, n))$ 关于 n 单调递增, 有上界, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G_v(m, n))$ 存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G_v(m, n)) \geq \mu(P_v(3, 2)) \approx 4.414\ 21 > 4$, 其中, $P_v(3, 2)$ 如图 7 所示。

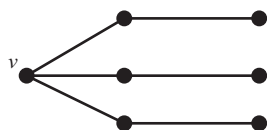


图 7 $P_v(3, 2)$

Fig.7 $P_v(3, 2)$

由推论 2 可知,

$$\Phi(G_v(m, n)) = \Phi(P_{n+1})^m \Phi(L_v(G)).$$

$$\prod_{i=1}^m \frac{\Phi(B_n)}{\Phi(P_{n+1})} \left(\frac{\Phi(G)}{\Phi(L_v(G))} + m \left(\frac{\Phi(P_{n+1})}{\Phi(B_n)} - x \right) \right)$$

当 $x > 4$ 时, 根据引理 5, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(B_n)}{\Phi(P_{n+1})} = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4x}}{2x}$ 成立。

由此可得,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\Phi(L_v(G)) \prod_{i=1}^m \frac{\Phi(B_n)}{\Phi(P_{n+1})} \left(\frac{\Phi(G)}{\Phi(L_v(G))} + m \left(\frac{\Phi(P_{n+1})}{\Phi(B_n)} - x \right) \right) \right) = \frac{m}{x^m} \left(\frac{x - \sqrt{x^2 - 4x}}{2} \right)^{m+1} \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 4x}}{2mx} \Phi(G) - \Phi(L_v(G)) \right)$$

由于 $r_v(G) > 4$, 所以, $r_v(G)$ 是方程

$$\frac{x - \sqrt{x^2 - 4x}}{2x} \Phi(G) - \Phi(L_v(G)) = 0$$

的最大根。a 得证。

进一步地, 若 G 是二部图, 由引理 2 可知, $\mu(G_v(m, n)) < \mu(G_v(m, n+1))$, 所以, 图序列 $\{G_v(m, n)\}$ 中的图的拉普拉斯谱半径互不相同, 由定义 1 可

知, $r_v(G)$ 是图的拉普拉斯谱半径的极限点。b 得证。

结合引理 8, 可以进一步对定理 1 进行推广。

推论 3 设 G 是连通图, v 是 G 中的点, 若 $\Delta(G_v(m, n)) \geq m + 3$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G_v^{t_1, t_2, \dots, t_n}(m, n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G_v(m, n))$$

利用引理 9 可知, $\mu(G_v(2m, k+1)) = \mu(G'_v(m, 2k+1))$, m 为正整数, 因此, 由定理 1 可确定图 $G'_v(m, 2k+1)$ 的拉普拉斯谱半径的极限点。若再对图 $G'_v(m, 2k)$ 的拉普拉斯谱半径的极限点进行具体研究, 然后结合图 $G'_v(m, 2k)$ 和图 $G'_v(m, 2k+1)$ 的拉普拉斯谱半径的极限点的特征, 则可确定图 $G'_v(m, n)$ 的拉普拉斯谱半径的极限点。

定理 2 设 G 是连通二部图, v 是 G 的点, $G \cdot C_n$ 如前定义, 则有如下结果成立:

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G \cdot C_n)$ 存在, 设为 $l_v(G)$, 则 $l_v(G) \geq 4$ 。若 $l_v(G) > 4$, 则 $l_v(G)$ 是方程

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 4x}}{4x} \Phi(G) - \Phi(L_v(G)) = 0$$

的最大根。

b. $l_v(G)$ 是图 $G \cdot C_n$ 的拉普拉斯谱半径的极限点。

证明 当 $n = 2k$ ($k \geq 2$, k 为整数) 时, $G \cdot C_{2k}$ 为连通二部图。

若 $G = K_1$, 则 $G \cdot C_{2k}$ 为 C_{2k} , $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(G \cdot C_{2k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(C_{2k}) = 4$ 。

若 $G \neq K_1$, 类似定理 1, 可证明: $\Delta(G \cdot C_{2k})$ 为常数。由引理 4 可知, $\mu(G \cdot C_{2k}) \geq \Delta(G \cdot C_{2k}) + 1$, 由引理 6 可知, $\mu(G \cdot C_{2k}) > \mu(G \cdot C_{2k+2})$, 因此, $\mu(G \cdot C_{2k})$ 关于 k 单调递减, 有下界, 从而 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(G \cdot C_{2k})$ 存在, 设为 $l'_v(G)$ 。又由引理 2 可知, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(G \cdot C_{2k}) > \mu(P_2 \cdot C_4) \approx 4.481\ 19 > 4$ 。

由于 $\mu(G \cdot C_{2k}) > \mu(G \cdot C_{2k+2})$, 所以, 在图序列 $\{G \cdot C_{2k}\}$ 中, 任意图的拉普拉斯谱半径互不相同, 由定义 1 可知, $l'_v(G)$ 为图 $G \cdot C_{2k}$ 的拉普拉斯谱半径的极限点。

由引理 10 可知,

$$\begin{aligned} \Phi(G \cdot C_{2k}) &= \Phi(G) \Phi(L_u(C_{2k})) + \Phi(L_v(G)) (\Phi(C_{2k}) - x \Phi(L_u(C_{2k}))) \\ &= \Phi(G) \Phi(H_{2k-1}) + \Phi(L_v(G)) (\Phi(C_{2k}) - x \Phi(H_{2k-1})) \\ &= \Phi(C_{2k}) \left(\Phi(G) \frac{\Phi(H_{2k-1})}{\Phi(C_{2k})} + \left(1 - x \frac{\Phi(H_{2k-1})}{\Phi(C_{2k})} \right) \Phi(L_v(G)) \right) \end{aligned}$$

当 $x > 4$ 时, 结合引理 5 和引理 7, 可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Phi(H_{2k-1})}{\Phi(C_{2k})} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Phi(H_{2k-1})}{\frac{1}{x}\Phi(P_{2k+1}) - \frac{1}{x}\Phi(P_{2k-1}) + 2(-1)^{2k+1}} =$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Phi(P_{2k})}{\Phi(P_{2k+1}) - \Phi(P_{2k-1}) - 2x} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}}, \quad x \neq 0$$

对于 $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\Phi(G) \frac{\Phi(H_{2k-1})}{\Phi(C_{2k})} + \left(1 - x \frac{\Phi(H_{2k-1})}{\Phi(C_{2k})} \right) \Phi(L_v(G)) \right)$, 整理可得

$$\frac{x - \sqrt{x^2 - 4x}}{\sqrt{x^2 - 4x}} \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 4x}}{4x} \Phi(G) - \Phi(L_v(G)) \right)$$

由于 $l_v'(G) > 4$, 所以, $l_v'(G)$ 是方程 $\frac{x + \sqrt{x^2 - 4x}}{4x} \Phi(G) - \Phi(L_v(G)) = 0$ 的最大根。

当 $n = 2k + 1$ (k 为正整数) 时, 由引理 9 可知, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(G \cdot C_{2k+1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(G_v(2, k))$ 。

文献[2]中证明了 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(G_v(2, k))$ 存在, 所以, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(G \cdot C_{2k+1})$ 存在, 设为 $l_v''(G)$ 。当 $G \cdot C_{2k+1}$ 为 C_{2k+1} 时, $l_v''(G) = 4$; 否则, 结合引理 2 和引理 9, 可知 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(G \cdot C_{2k+1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(G_v(2, k)) > \mu(K_{1,3}) = \mu(P_2 \cdot C_3) = 4$ 。

又由引理 2 和引理 9 可知, $\mu(G \cdot C_{2k+1}) = \mu(G_v(2, k)) < \mu(G_v(2, k+1)) = \mu(G \cdot C_{2k+3})$, 所以, 图序列 $\{G \cdot C_{2k+1}\}$ 中每个图的拉普拉斯谱半径互不相同, 由定义 1 可知, $l_v''(G)$ 是图 $G \cdot C_{2k+1}$ 的拉普拉斯谱半径的极限点。

当 $x > 4$ 时, 文献[2]确定了 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(G_v(2, k))$ 的值为方程 $\frac{x + \sqrt{x^2 - 4x}}{4x} \Phi(G) - \Phi(L_v(G)) = 0$ 的最大根。所以, 当 $l_v''(G) > 4$ 时, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(G \cdot C_{2k+1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(G_v(2, k)) = l_v''(G)$ 为方程

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 4x}}{4x} \Phi(G) - \Phi(L_v(G)) = 0$$

的最大根。

综上, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(G \cdot C_{2k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(G \cdot C_{2k+1})$, 所以, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G \cdot C_n) = l_v(G)$ 存在, 且当 $x > 4$ 时, $l_v(G)$ 为方程

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 4x}}{4x} \Phi(G) - \Phi(L_v(G)) = 0$$

的最大根。a 得证。

现证明 $l_v(G)$ 是图 $G \cdot C_n$ 的拉普拉斯谱半径的极限点。

对于任意 $i \in \{g \mid g = 2k, k \geq 2, k \text{ 为整数}\}$, $j \in \{l \mid l =$

$2k+1, k \text{ 为正整数}\}$, 有

$$\mu(G \cdot C_i) > \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(G \cdot C_{2k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(G \cdot C_{2k+1}) > \mu(G \cdot C_j)$$

所以, 对任意 $i \neq j$, 有 $\mu(G \cdot C_i) \neq \mu(G \cdot C_j)$ 成立, 即图序列 $\{G \cdot C_n\}$ 中每个图的拉普拉斯谱半径互不相同, 因此, $l_v(G)$ 是图 $G \cdot C_n$ 的拉普拉斯谱半径的极限点。b 得证。

例 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_4 \cdot C_n) = \tau \approx 5.375 15$, 其中, τ 是方程

$$x^5 - 12x^4 + 48x^3 - 72x^2 + 32x - 16 = 0$$

的最大根。

证明 由定理 2 可知, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_4 \cdot C_n)$ 存在。利用引理 4, 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_4 \cdot C_n) > 5 > 4$, 所以, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_4 \cdot C_n)$ 的值为方程 $\frac{x + \sqrt{x^2 - 4x}}{4x} \Phi(C_4) - \Phi(L_v(C_4)) = 0$ 的最大根。

$$\Phi(C_4) = x(x-2)^2(x-4), \Phi(L_v(C_4)) = (x-2)(x^2 - 4x + 2)$$

因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_4 \cdot C_n)$ 的值为方程

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 4x}}{4x} x(x-2)^2(x-4) - (x-2)(x^2 - 4x + 2) = 0$$

的最大根。

将上述方程整理, 可得

$$x^5 - 12x^4 + 48x^3 - 72x^2 + 32x - 16 = 0$$

进一步地, 可以探究: 若 G 与多个 (大于等于 2 个) 顶点不相交的 C_n 粘连时, 定理 2 是否仍成立。

定理 3 设 G 是至少含 1 条边的连通二部图, v 是 G 中的点, $G'_v(m, n)$ 如前定义, 则当 $m \geq 2$ 时, 有如下结论成立:

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G'_v(m, n))$ 存在, 设为 $t_v(G)$, 则 $t_v(G) > 4$, 且此时 $t_v(G)$ 是方程

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 4x}}{4mx} \Phi(G) - \Phi(L_v(G)) = 0$$

的最大根。

b. $t_v(G)$ 是图 $G'_v(m, n)$ 的拉普拉斯谱半径的极限点。

证明 当 $n = 2k$ ($k \geq 2, k$ 为整数) 时, 因为, G 为连通二部图, 所以, $G'_v(m, 2k)$ 为连通二部图。

类似定理 2, 可证明: $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(G'_v(m, 2k))$ 存在, 设为 $t_v'(G)$, $t_v'(G) > 4$, 且 $t_v'(G)$ 为 $G'_v(m, 2k)$ 的拉普拉斯谱半径的极限点。

由推论 2 可知,

$$\Phi(G'_v(m, 2k)) = \Phi(C_{2k})^m \Phi(L_v(G)) \cdot$$

$$\prod_{i=1}^m \frac{\Phi(H_{2k-1})}{\Phi(C_{2k})} \left(\frac{\Phi(G)}{\Phi(L_v(G))} + m \left(\frac{\Phi(C_{2k})}{\Phi(H_{2k-1})} - x \right) \right)$$

所以, 当 $x > 4$ 时, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\Phi(L_v(G)) \prod_{i=1}^m \frac{\Phi(H_{2k-1})}{\Phi(C_{2k})} \left(\frac{\Phi(G)}{\Phi(L_v(G))} + m \left(\frac{\Phi(C_{2k})}{\Phi(H_{2k-1})} - x \right) \right) \right) = m \frac{x - \sqrt{x^2 - 4x}}{(\sqrt{x^2 - 4x})^m} \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 4x}}{4mx} \Phi(G) - \Phi(L_v(G)) \right)$$

由于 $t_v'(G) > 4$, 所以, $t_v'(G)$ 是方程 $\frac{x + \sqrt{x^2 - 4x}}{4mx} \Phi(G) - \Phi(L_v(G)) = 0$ 的最大根。

当 $n = 2k + 1$ (k 为正整数)时, 类似定理2, 可证明: $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(G'_v(m, 2k + 1))$ 存在, 设为 $t_v''(G)$, $t_v''(G) > 4$, 且 $t_v''(G)$ 为图 $G'_v(m, 2k + 1)$ 的拉普拉斯谱半径的极限点。

当 $x > 4$ 时, 由定理1可知, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(G_v(2m, k))$ 的值为方程 $\frac{x + \sqrt{x^2 - 4x}}{4mx} \Phi(G) - \Phi(L_v(G)) = 0$ 的最大根。所以, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(G'_v(m, 2k + 1)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(G_v(2m, k)) = t_v''(G)$ 为方程

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 4x}}{4mx} \Phi(G) - \Phi(L_v(G)) = 0$$

的最大根。

综上, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G'_v(m, n)) = t_v(G)$ 存在, 且当 $x > 4$ 时, $t_v(G)$ 为方程

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 4x}}{4mx} \Phi(G) - \Phi(L_v(G)) = 0$$

的最大根。a 得证。

对于任意 $i \in \{g | g = 2k, k \geq 2, k \text{ 为整数}\}$, $j \in \{l | l = 2k + 1, k \text{ 为正整数}\}$, 有

$$\mu(G'_v(m, i)) > \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(G'_v(m, 2k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(G'_v(m, 2k + 1)) > \mu(G'_v(m, j))$$

所以, 对任意 $i \neq j$, 有 $\mu(G'_v(m, i)) \neq \mu(G'_v(m, j))$ 成立, 即图序列 $\{G'_v(m, n)\}$ 中图的拉普拉斯谱半径互不相同, 因此, $t_v(G)$ 是图 $G'_v(m, n)$ 的拉普拉斯谱半径的极限点。b 得证。

例2 设图 G 为 $K_{1,2}$, v 为 $K_{1,2}$ 的中心点, 以 $T'_v(m, n)$ 表示将点 v 与 m ($m \geq 2$)个 C_n 中1点粘连得到的图, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T'_v(m, n)) = \tau$, 其中, τ 为方程 $(2m - 1)x^3 - (4m^2 + 8m - 6)x^2 + (8m^2 + 6m - 9)x - 4m^2 = 0$ 的最大根。

证明 由定理3可知, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T'_v(m, n))$ 存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T'_v(m, n)) > 4$ 。又由于 $\Phi(K_{1,2}) = x(x - 1)(x - 3)$, $\Phi(L_v(K_{1,2})) = (x - 1)^2$ 。将其代入方程 $\frac{x + \sqrt{x^2 - 4x}}{4mx} \Phi(G) - \Phi(L_v(G)) = 0$, 可得

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 4x}}{4mx} x(x - 1)(x - 3) - (x - 1)^2 = 0$$

整理可得, $(2m - 1)x^3 - (4m^2 + 8m - 6)x^2 + (8m^2 + 6m - 9)x - 4m^2 = 0$ 。

参考文献:

- [1] HOFFMAN A J. On limit points of spectral radii of non-negative symmetric integral matrices[M]//ALAVI Y, LICK D R, WHITE A T. Graph Theory and Applications. Berlin, Heidelberg: Springer, 1972, 303: 165-172.
- [2] GUO J M. On limit points of Laplacian spectral radii of graphs[J]. Linear Algebra and its Applications, 2008, 429(7): 1705-1718.
- [3] GUO J M. The limit points of Laplacian spectra of graphs[J]. Linear Algebra and its Applications, 2003, 362: 121-128.
- [4] KIRKAND S. A note on limit points for algebraic connectivity[J]. Linear Algebra and its Applications, 2003, 373: 5-11.
- [5] LIU Ying. The ordering of limit point of algebraic connectivity of trees[J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 2008, 25(1): 103-106.
- [6] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. London: The Macmillan Press Ltd, 1976: 6-258.
- [7] GRONE R, MERRIS R, RSUNDE V S. The Laplacian spectrum of a graph[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 1990, 11(2): 218-238.
- [8] GUO J M. On the Laplacian spectral radius of a tree[J]. Linear Algebra and its Applications, 2003, 368: 379-385.
- [9] ANDERSON W N JR, MORLEY T D. Eigenvalues of the Laplacian of a graph[J]. Linear and Multilinear Algebra, 1985, 18(2): 141-145.
- [10] MERRIS R. Laplacian matrices of graphs: a survey[J]. Linear Algebra and its Applications, 1994, 197/198: 143-176.
- [11] GUO J M. The Laplacian spectral radius of a graph under perturbation[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2007, 54(5): 709-720.
- [12] GUO J M. A conjecture on the algebraic connectivity of connected graphs with fixed girth[J]. Discrete Mathematics, 2008, 308(23): 5702-5711.
- [13] GUO J M, LI J X, SHIU W C. On the Laplacian, singless Laplacian and normalized Laplacian characteristic polynomials of a graph[J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 2013, 63(3): 701-720.

(编辑: 石 瑛)