

带有滑动边界的可压缩磁流体方程解的局部存在性

陆 剑, 雍 燕

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 研究了在有界区域 $\Omega \subset R^3$ 中带有滑动边界条件的可压缩磁流体方程解的局部存在性. 首先构造可压缩磁流体方程组的线性化方程组, 然后利用 Galerkin 逼近方法证明线性化可压缩磁流体方程组解的局部存在性, 最后通过对线性化可压缩磁流体方程的解进行迭代, 构造原方程组的逼近解序列, 利用能量估计和二阶椭圆估计证明逼近解收敛, 从而证明可压缩磁流体方程组解的局部存在性。

关键词: 可压缩磁流体方程; 滑动边界; 解的存在性

中图分类号: O 175 **文献标志码:** A

Local Existence Solutions for Compressible Magnetohydrodynamic Equations with Slip Boundary Conditions

LU Jian, YONG Yan

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The local existence of solutions for the compressible magnetohydrodynamic equations with slip boundary conditions in a bounded domain $\Omega \subset R^3$ was studied. First, the linearized compressible magnetohydrodynamic equations were constructed. Next, the Galerkin method was used to prove the local existence of solutions for the linearized compressible magnetohydrodynamic equations. And then, through the solution iteration of the linearized compressible magnetohydrodynamic equations, an approximation solution sequence of the original equations was constructed and the solution was proved to be convergent by using the energy estimate and the second order elliptic estimate, which turns to prove the local existence of solutions for the compressible magnetohydrodynamic equations.

Keywords: compressible magnetohydrodynamic equation; slip boundary condition; existence to solution

1 问题的提出

考虑可压缩磁流体方程

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ (\rho \mathbf{u})_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla P + \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{H}|^2 - \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} \right) = \\ \mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} \\ \mathbf{H}_t + \nabla \times (\mathbf{H} \times \mathbf{u}) = \sigma \Delta \mathbf{H} \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期: 2017-07-15

第一作者: 陆 剑 (1992-), 男, 硕士研究生. 研究方向: 偏微分方程. E-mail: 838544401@qq.com

通信作者: 雍 燕 (1982-), 女, 讲师. 研究方向: 偏微分方程. E-mail: yongyan_math@126.com

式中: Ω 是 R^3 中的有界区域; ρ 为密度; $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 为速度; $P = P(\rho)$ 为压力, 满足 $P(\rho) = \rho^\gamma, \gamma > 1$; $(\cdot)_t$ 表示对 t 求导; μ 和 λ 为黏性常数, 且满足 $\mu > 0, 2\mu + 3\lambda > 0$ 。

给定初始条件:

$$(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{H})|_{t=0} = (\rho_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{H}_0) \quad (2)$$

边界条件:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, (S\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_\tau|_{\partial\Omega} = (B\mathbf{u})_\tau|_{\partial\Omega} \quad (3)$$

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{H})|_{\partial\Omega} = 0 \quad (4)$$

注意到

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{H} \times \mathbf{u}) &= \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{H} &= \nabla \operatorname{div} \mathbf{H} - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) \end{aligned}$$

且

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

所以, 磁流体方程(1)中的第3式可写为

$$\mathbf{H}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\sigma \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (5)$$

磁流体方程是流体力学中的经典模型^[1-2]。磁流体方程问题解的存在性是人们关心的一个重要问题。众多学者研究了磁流体方程柯西问题解的适定性。Bian 等^[3]研究了全空间非等熵可压缩磁流体方程在临界 Besov 空间上的局部适定性; Kozono 等^[4]研究了3维可压缩非等熵磁流体方程的柯西问题弱解的全局存在性; Liu 等^[5]研究了具有某些限制初值的3维可压缩磁流体方程的全局弱解问题。

但是, 对于初边值问题, 情况变得更加复杂。事实上, 在流体力学中, 主要考虑两种边界条件: 一种是 Dirichlet 边界条件, $\mathbf{u} = 0, x \in \partial\Omega$; 另一种是由 Navier 提出的著名滑动边界条件,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, (S\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_\tau|_{\partial\Omega} = -\alpha \mathbf{u}_\tau|_{\partial\Omega} \quad (6)$$

式中: $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量; $\mathbf{u}_\tau$ 是 $\mathbf{u}$ 的切向量, 是应变张量; $S\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}')$ 。

现对问题(1)~(3), 研究其解的局部存在性问题。一般讨论的解有3种。第1种解是光滑小解^[6-8], 在这种情况下, 初值和解接近于 $H^3(\Omega)$ 中的某个常数, 后来将这个解推广到齐次 Besov 空间。首先将方程组线性化, 然后对线性方程组进行迭代, 得到一组逼近解, 证明逼近解的渐近衰减速率, 最后将逼近解取极限, 得到原方程组解的存在性。这类光滑小解是连续可微的, 并且大大降低了对初值的限制。缺点是不能体现出 Navier-Stokes 方程组自身的奇性。第2种解是由 Lions 提

出的一般“大能量”弱解^[9], 这类解的好处是对任意的初始能量和非负密度都容易证明解的存在性。但是, 这一类解的集合比较大, 通常还包含了非物理解。由于这类解的光滑性不够, 因此, 对解的性质分析起来比较困难^[10-11]。第3种解是 Hoff 解。对于 Hoff 解而言, 优点是它保持了解的非线性和物理上关心的一些有意义的特性。另外, 这类解当初值具有足够的正则性时, 解一般也具有较好的正则性, 可以根据相关定理来证明解的唯一性和连续性^[12-14]。比如, 当初值是分段光滑函数时, 文献^[15]中的解在逐点意义下满足 Rankine-Hugoniot 条件。另外, 这些解有足够的正则性, 使得解的唯一性和连续依赖性理论可以得到证明^[16]。这种解在整个空间中适定性理论几乎是完全成立的, 但是, 对 Dirichlet 边界条件: 在 $\partial\Omega$ 上, $\mathbf{u} = 0$, 方程的解会出现问题。相反地, 如果考虑上面提到的 Navier-Slip 边界条件, 那么, 对于具有小能量的初值和有界的初始密度来说, 可以证明其解的局部存在性。

David^[17]研究了等熵 Navier-Stokes 方程

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ (\rho \mathbf{u}^j)_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}^j \mathbf{u}) + P(\rho)_{x_j} = \mu \Delta u^j + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}_{x_j} + \rho f^j \end{cases}$$

如果满足边值条件:

$$\begin{cases} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0, \\ \mu \Pi \nabla \mathbf{u} \mathbf{v} = \Pi B \mathbf{u}, \end{cases} \quad x \in \Omega, t > 0$$

式中: $\mathbf{v}(x)$ 是在 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量; Π 是切平面到 $\partial\Omega$ 上的投影。

David 证明了解局部存在性。

本文考虑的是磁流体方程, 因为, 磁场和流体耦合在一起, 研究起来要比 Navier-Stokes 方程困难, 如何处理磁场是解决问题的困难之一。

为方便叙述, 首先构造函数空间 W 。

$$W = \{w \in (H^1(\Omega))^3 : w(x) \cdot \mathbf{n}(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$$

那么, 容易验证, 如果 $\partial\Omega$ 具有 Lipschitz 条件, 则 W 是具有 $H^1(\Omega)$ 内积的 Hilbert 空间。另外, 可见 $H_0^1(\Omega) \rightarrow W$, 所以, W 的共轭空间满足 $W^* \rightarrow H^{-1}$ 。

定义1 对于固定的时间 $T > 0$, 如果 $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{H})$ 满足下列条件:

$$\begin{aligned} \text{a. } & \rho \in L^q(0, T; W^{1,q}(\Omega)) \\ & (\mathbf{u}, \mathbf{H}) \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \bigcap L^2(0, T; H^1(\Omega)) \\ & (\mathbf{u}_t, \mathbf{H}_t) \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \bigcap L^2(0, T; H^1(\Omega)) \end{aligned}$$

b. 对任意时间 $t_1, t_2 \in [0, T]$, 有

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \rho(x, \cdot) \phi(x, \cdot) dx \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho(\phi_t + \nabla \phi \cdot \mathbf{u}) dx dt \\
& \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u})(x, \cdot) \cdot \psi(x, \cdot) dx \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \cdot \nabla \psi - P \operatorname{div} \psi - \left(\frac{1}{2} |\mathbf{H}|^2 - \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} \right) \cdot \nabla \psi dx dt = \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \Omega} (\mathbf{B} \mathbf{u}) \cdot \psi dS dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} [2\mu S(\mathbf{u}) : S(\psi) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \psi] dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \psi_t dx dt \\
& \int_{\Omega} \mathbf{H}(x, \cdot) \cdot \varphi(x, \cdot) dx \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \nabla \times (\mathbf{H} \times \mathbf{u}) \cdot \varphi dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \varphi_t dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{H} \cdot \nabla \varphi dx dt \\
& \|\mathbf{H}\|_{\mathbf{H}^1} \leq C(\|\mathbf{H}\|_{L^2} + \|S(\mathbf{u})\|_{L^2})
\end{aligned}$$

其中, φ, ϕ 在 $\Omega \times [0, T]$ 满足 Lipschitz 条件, 且 $\psi \in W, \varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, 则称 $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{H})$ 是式(1)在 $[0, T]$ 的解。

在本文中, $\Omega, \mathbf{B}$ 满足如下条件:

- a. Ω 在具有 C^3 边界的 R^3 上是有界开集;
- b. $\mathbf{B}$ 在 $\partial \Omega$ 的某个领域上是 C^1 的。

定理 1 对于 $3 < q \leq 6$, 存在 $T_0 > 0$, 使得具有初值条件(2)的滑动边界问题(3)~(4)在 $[0, T]$ 有解 $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{H})$ 且解满足

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{u}, \mathbf{H}) \in C(0, T_0; \mathbf{H}^1(\Omega)) \cap L^2(0, T_0; \mathbf{H}^1(\Omega)) \\
& (\mathbf{u}_t, \mathbf{H}_t) \in L^\infty(0, T_0; \mathbf{H}^1(\Omega)) \cap L^2(0, T_0; \mathbf{H}^1(\Omega)) \\
& \rho \in C(0, T_0; W^{1,q}(\Omega))
\end{aligned}$$

且满足

$$\begin{aligned}
& \|(\mathbf{u}_t, \mathbf{H}_t)\|_{L^2}^2 + \|(\mathbf{u}, \mathbf{H})\|_{\mathbf{H}^2}^2 + \|\rho\|_{W^{1,q}}^q + \\
& \int_0^t \|(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{H}_\tau)\|_{L^2}^2 + \|(\mathbf{u}, \mathbf{H})\|_{L^2}^2 d\tau \leq \bar{C} \leq +\infty
\end{aligned}$$

其中, $\bar{C}$ 与初值和黏性系数有关。

2 准备知识

根据文献[18-19], 通过 $\nabla \times \mathbf{u}$ 和 $\operatorname{div} \mathbf{u}$ 的 $\mathbf{H}^{m-1}(\Omega)$ 范数, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ 的 $\mathbf{H}^{m-\frac{1}{2}}(\partial \Omega)$ 范数来控制一个关于 $\mathbf{u}$ 的向量值函数的 $\mathbf{H}^m(\Omega)$ 范数。

引理 1 假设 Ω 是 R^3 上的有界区域, 且 $\partial \Omega$ 是 C^1 的, 那么, 存在有界迹算子从 $W^{1,1}(\Omega)$ 映射到 $L^1(\partial \Omega)$, 且存在一个常数 C , 使得对 $\mathbf{u} \in W^{1,1}(\Omega)$, 有

$$\int_{\partial \Omega} |\mathbf{u}(x)| ds \leq C \int_{\Omega} (|\mathbf{u}(x)| + |\nabla \mathbf{u}(x)|) dx$$

从而得到, 对 $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, 有

$$\int_{\partial \Omega} |\mathbf{u}(x)|^2 ds \leq C \int_{\Omega} (|\mathbf{u}(x)|^2 + |\nabla \mathbf{u}(x)|^2) dx$$

引理 2 令 $m \in N_+$ 是一个整数, $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^m(\Omega)$ 是一个向量值函数, 则有

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^m} & \leq C \left(\|\nabla \times \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{m-1}} + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{m-1}} + \right. \\
& \left. \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{m-1}} + \|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\|_{\mathbf{H}^{m-1/2}(\partial \Omega)} \right)
\end{aligned}$$

引理 3 对于 $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, 存在常数 $C = C(\Omega)$, 使得

本文不加说明的话, C 表示正常数, $\Lambda(a_1, a_2, \dots, a_l)$ 表示关于 $a_1, a_2, \dots, a_l$ 的多项式, ρ_0 存在下界 $\underline{\rho}$, 上界 $\bar{\rho}$ 。

3 Lamé算子和 $-\Delta$ 算子的正则性

首先假设条件式(2)成立, $\Omega, \mathbf{B}$ 满足上述的假设。考虑如下问题: 找到 $\mathbf{u}: \bar{\Omega} \rightarrow R^3$, 使得

$$\begin{cases} Lu + \beta \mathbf{u} = g \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ (S(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n})_\tau|_{\partial \Omega} = (\mathbf{B} \mathbf{u})_\tau|_{\partial \Omega} \end{cases} \quad (7)$$

式中: $L\mathbf{u} = -\mu \Delta \mathbf{u} - (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}$; $\beta \in R$ 是固定常数; $g: \Omega \rightarrow R$ 是给定函数。

从而可以得到相关的弱解形式。

用 $\omega \in W$ 乘以微分方程(7), 可得

$$A_\beta(\mathbf{u}, \omega) = \int_{\Omega} g \cdot \omega dx \quad (8)$$

式中, $A_\beta: W \times W \rightarrow R$ 是双线性形式。

$$\begin{aligned}
A_\beta(\mathbf{u}, \omega) = & - \int_{\partial \Omega} (\mathbf{B} \mathbf{u}) \cdot \omega ds + \int_{\Omega} (2\mu S(\mathbf{u}) : S(\omega) + \\
& \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \omega + \beta \mathbf{u} \cdot \omega) dx
\end{aligned}$$

显然, 如果 $\mathbf{B}$ 有界, 则 A_β 在 $W \times W$ 是连续的。利用迹定理可以证明, 如果与 $\mu, \lambda, \Omega, \mathbf{B}$ 有关的 β 足够大, 那么, A_β 具有强制性, 从而存在一个有界算子 $S_\beta: L^2 \rightarrow W$, 对所有 $\omega \in W$ 都满足

$$A_\beta(S_\beta g, \omega) = \int_{\Omega} g \cdot \omega dx$$

另外, 因为, 嵌入 $W \rightarrow L^2$ 是紧的, 所以, S_β 是从 L^2 到 L^2 的紧算子, 其中, 对称性可以保证 S_β 是自伴随算子。

从文献[17]中可得引理 4~7。

引理 4 Ω 在具有 C^3 边界的 R^3 上是有界开集, $\mu > 0, 2\mu + 3\lambda > 0$ 且 $\mathbf{B} \in L^\infty(\partial \Omega)$ 是对称矩阵, 那么, 对于足够大的 β 来说, 存在紧自伴随算子 $S_\beta: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, 使得算子的值域在 W 中, 且对所有的 $g \in L^2(\Omega)$ 和 $\omega \in W$, 式(8)都成立。同时存在正交基 $\{\omega_k\}_k$, 其元素在 $W \cap C^\infty(\Omega)$ 中, 而且是 S_β 的特征函数, 即 $S_\beta \omega_k = \lambda_k^{-1} \omega_k$, 其中, $\lambda_k \rightarrow \infty$ 。

引理 5 假设 $\mu > 0, 2\mu + 3\lambda > 0, m \geq 0$ 且 Ω 在具有 C^{m+1} 边界上是有界开集, B 是一个具有 $C^{m+1}(\partial\Omega)$ 的映射, 这个映射将 $\partial\Omega$ 的某个区域映射到 1 个 3×3 矩阵集合, 则存在 1 个常数 $C_m = C(\mu, \lambda, \Omega, B)$, 使得如果 u 是式 (7) 的 1 个在式 (8) 意义下的解, 其中, β 和 $g \in H^m(\Omega)$, 那么, 可以得到 $u \in H^{m+2}(\Omega)$ 且下面式子成立:

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C_m(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^m(\Omega)})$$

对于 $-\Delta$ 算子考虑如下问题: 找到 $H: \bar{\Omega} \rightarrow R^3$, 使得

$$\begin{cases} -\Delta H + \gamma H = \bar{g} \\ H \cdot n|_{\partial\Omega} = 0 \\ n \times (\nabla \times H)|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

其中, $\gamma \in R$ 固定, $\bar{g}: \Omega \rightarrow R$ 是给定函数。

用 $\varphi \in H^1(\Omega)$ 乘以上述的微分方程, 然后分部积分, 可得

$$B_\gamma(H, \varphi) = \int_\Omega \bar{g} \cdot \varphi dx \quad (10)$$

其中, $B_\gamma: H^1 \times H^1 \rightarrow R$ 是双线性形式。

$$B_\gamma(H, \varphi) = \int_\Omega (\nabla H \cdot \nabla \varphi + \gamma H \varphi) dx$$

类似于 L 算子, 存在 1 个有界解算子 $\Gamma_\gamma: L^2(\Omega) \rightarrow H^1$, 对所有的 $\varphi \in H^1$ 和足够大的 γ 都满足

$$B_\gamma(\Gamma_\gamma g, \varphi) = \int_\Omega \bar{g} \cdot \varphi dx$$

与引理 4 和引理 5 类似, 可得引理 6。

引理 6 Ω 在具有 C^3 边界的 R^3 上是有界开集, 对于足够大的 γ 来说, 存在紧自伴随算子 $\Gamma_\gamma: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, 算子的值域在 H^1 中, 且对所有的 $\bar{g} \in L^2(\Omega)$ 和 $\varphi \in H^1$, 式 (9) 都成立。同时存在正交基 $\{\varphi_k\}_k$, 其元素在 $H^1 \cap C^\infty(\Omega)$ 中, 而且是 Γ_γ 的特征函数, 即 $\Gamma_\gamma \varphi_k = \lambda_k^{-1} \omega_k$, 其中, $\lambda_k \rightarrow \infty$ 。

引理 7 假设 $\mu > 0, 2\mu + 3\lambda > 0, m \geq 0$ 且 Ω 在具有 C^{m+1} 边界上是有界开集, B 是一个具有 $C^{m+1}(\partial\Omega)$ 的映射, 这个映射将 $\partial\Omega$ 的某个区域映射到 1 个 3×3 矩阵集合, 则存在 1 个常数 $\bar{C}_m = \bar{C}(\Omega)$, 使得如果 H 是式 (9) 的 1 个在式 (10) 意义下的解, 这里

$$\rho(x, t) \geq \underline{\rho} e^{-\int_0^t \|\nabla u\|_{L^\infty} d\tau} \geq \underline{\rho} e^{-\int_0^t (\|\nabla u\|_{W^{1,q}}^2)^{1/2} t^{1/2} d\tau} \geq \underline{\rho} e^{-(Ct)^{1/2}} \geq \underline{\rho} e^{-1}$$

$$\rho(x, t) \leq \|\rho_0\|_{L^\infty} e^{\int_0^t \|\nabla u\|_{L^\infty} d\tau} \leq \|\rho_0\|_{W^{1,q}} e^{\int_0^t (\|\nabla u\|_{W^{1,q}}^2)^{1/2} t^{1/2} d\tau} \leq \|\rho_0\|_{W^{1,q}} e^{(Ct)^{1/2}}$$

引理 8 对 $3 < q \leq 6$, 有下列不等式成立:

$$\frac{d}{dt} \|\rho\|_{L^q}^q \leq C(\|u\|_{W^{1,q}} \cdot \|\rho\|_{L^q}^q)$$

证明 根据式 (1) 中的第 1 个式子(质量方程), 可得

γ 和 $\bar{g} \in H^m(\Omega)$, 那么, 可以得到 $H \in H^{m+2}(\Omega)$, 且下面式子成立

$$\|H\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq \bar{C}_m(\|H\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{g}\|_{H^m(\Omega)})$$

4 先验估计

为了证明解的局部存在性, 需要下面的先验估计. 假设存在 C_0 和 C_1 满足下列不等式:

$$\|\rho_0\|_{W^{1,q}} + \|(u_0, H_0)\|_{H^2} + 1 \leq C_0$$

$$\sup(\|u(t)\|_{H^2} + \|u_t(t)\|_{L^2}) + \int_0^{T^*} (\|\nabla u_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla^2 u\|_{L^q}^2) dt + 1 \leq C_1$$

其中, $1 \leq C_0 \leq C_1 \leq C$ 且 $0 \leq T_* \leq T$.

4.1 密度估计

首先, 式 (1) 中第 1 个式子(质量方程)可以写成

$$\begin{cases} \rho_t + u \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} u = 0 \\ \rho|_{t=0} = \rho_0 \end{cases}$$

存在由如下方程定义的特征线 $X(t, y; t_0)$:

$$\begin{cases} \frac{dX(t, y; t_0)}{dt} = u(X(t, y; t_0)) \\ X(t, y_0; t_0) = x \end{cases}$$

证明 $\rho_t + \nabla \rho \cdot u + \rho \operatorname{div} u = 0$

移项得

$$\rho_t + \nabla \rho \cdot u = -\rho \operatorname{div} u$$

令 $\frac{dx}{dt} = u$, 利用特征线法可得

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho_t + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt}$$

将 $\frac{d\rho}{dt} = \rho_t + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt}$ 代入 $\rho_t + \nabla \rho \cdot u = -\rho \operatorname{div} u$, 可得

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} u$$

对上式关于时间 τ 在 $[0, t]$ 上积分, 得到

$$\ln \rho|_0^t = - \int_0^t \operatorname{div} u d\tau$$

$$\rho(t) = \exp \left\{ \ln \rho_0 - \int_0^t \operatorname{div} (u(X(x, s; t), s)) d\tau \right\} =$$

$$\rho_0 \exp \left\{ - \int_0^t \operatorname{div} (u(X(x, s; t), s)) d\tau \right\}$$

因为, ρ_0 存在下界 $\underline{\rho}$, 上界 $\bar{\rho}$, 由上式可得

$$\rho_t + \nabla \rho \cdot u + \rho \operatorname{div} u = 0$$

对上式两边同乘以 ρ^{q-1} , 有

$$\rho_t \rho^{q-1} + \nabla \rho \rho^{q-1} \cdot u + \rho^q \operatorname{div} u = 0$$

再关于 x 在 Ω 上积分, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{q} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^q dx + \frac{1}{q} \int_{\Omega} \nabla(\rho^q) \mathbf{u} dx + \int_{\Omega} \rho^q \operatorname{div} \mathbf{u} dx = 0 \\ & \frac{d}{dt} \|\rho\|_{L^q}^q = - \int_{\Omega} \nabla(\rho^q) \cdot \mathbf{u} dx - \int_{\Omega} \rho^q \operatorname{div} \mathbf{u} dx = \\ & - \int_{\partial\Omega} \rho^q \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\Omega} (q\rho^q \operatorname{div} \mathbf{u} - q\rho^q \operatorname{div} \mathbf{u}) dx \leq \\ & C \int_{\Omega} |\rho^q| |\nabla \mathbf{u}| dx \leq C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty} \|\rho\|_{L^q}^q \leq C \|\nabla \mathbf{u}\|_{W^{1,q}} \|\rho\|_{L^q}^q \end{aligned}$$

引理 9 对 $3 < q \leq 6$, 有下列不等式成立:

$$\frac{d}{dt} \|\nabla \rho\|_{L^q}^q \leq C(\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty} \cdot \|\nabla \rho\|_{L^q}^q + \|\nabla \rho\|_{L^q}^q)$$

证明 应用 ∂_x 到式(1)中第1个式子, 可得

$$\partial_x \rho_t + \nabla(\partial_x \rho) \cdot \mathbf{u} = -\partial_x \mathbf{u} \cdot \nabla \rho - \rho \cdot \partial_x(\operatorname{div} \mathbf{u}) - \partial_x \rho \cdot \operatorname{div} \mathbf{u}$$

∂_x 表示关于 x 的偏导数.

用 $|\nabla \rho|^{q-2} \partial_x \rho$ 乘以上述方程, 然后关于 x 在 Ω 积分, 利用分部积分, 可得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{q} |\nabla \rho|^q \right)_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{1}{q} |\nabla \rho|^q \right) \leq \\ & |\nabla \mathbf{u}| \cdot |\nabla \rho|^q + \rho |\nabla \rho|^{q-1} |\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}| + |\nabla \rho|^q |\operatorname{div} \mathbf{u}| \end{aligned}$$

将上式关于 x 在 Ω 积分, 利用分部积分, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{q} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \rho|^q dx + \frac{1}{q} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla |\nabla \rho|^q dx \leq \\ & \int_{\Omega} (|\nabla \mathbf{u}| \cdot |\nabla \rho|^q + \rho |\nabla \rho|^{q-1} |\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}| + |\nabla \rho|^q |\operatorname{div} \mathbf{u}|) dx \\ & \frac{d}{dt} \|\nabla \rho\|_{L^q}^q + \int_{\partial\Omega} |\nabla \rho|^q \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot |\nabla \rho|^q dx \leq \\ & q(\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty} \|\nabla \rho\|_{L^q}^q + \|\rho\|_{L^\infty} \|\nabla \rho\|_{L^q}^{q-1} \|\nabla^2 \mathbf{u}\|_{L^q} + \\ & \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty} \|\nabla \rho\|_{L^q}^q) \leq C(\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty} \|\nabla \rho\|_{L^q}^q + \\ & \|\rho\|_{W^{1,q}} \|\nabla \rho\|_{L^q}^{q-1} \|\nabla^2 \mathbf{u}\|_{L^q}) \leq C(\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty} \|\nabla \rho\|_{L^q}^q + \\ & C_\delta \|\nabla \rho\|_{L^q}^q + \delta \|\nabla^2 \mathbf{u}\|_{L^q}^q) \end{aligned}$$

取 δ 充分小, 从而有

$$\frac{d}{dt} \|\nabla \rho\|_{L^q}^q \leq C(\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty} \cdot \|\nabla \rho\|_{L^q}^q + \|\nabla \rho\|_{L^q}^q)$$

引理 10 对于 $3 < q \leq 6$, 有

$$\|\rho_t\|_{L^q} \leq C(\|\mathbf{u}\|_{H^2} \|\nabla \rho\|_{L^q} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^q})$$

证明 对式(1)中第1个式子两边关于 x 在 Ω 积分, 可得

$$\begin{aligned} & \|\rho_t\|_{L^q} \leq \|\mathbf{u} \cdot \nabla \rho\|_{L^q} + \|\rho \operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^q} \leq \\ & \|\mathbf{u}\|_{L^\infty} \|\nabla \rho\|_{L^q} + \|\rho\|_{L^\infty} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^q} \leq C(\|\mathbf{u}\|_{H^2} \|\nabla \rho\|_{L^q} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^q}) \end{aligned}$$

4.2 速度估计

引理 11

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}|^2 dx + C \|\mathbf{u}\|_{H^1}^2 \leq C \|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + C \|\rho\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{H}\|_{H^1}^2 \cdot \|\mathbf{u}\|_{H^1}$$

证明 方程式(1)中第2个式子两边同时乘以

$\mathbf{u}$, 并利用质量方程, 可得

$$\begin{aligned} & \rho \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{u}|^2 + \nabla P \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{H}|^2 \cdot \mathbf{u} = \\ & (2\mu \operatorname{div}(S\mathbf{u}) + \lambda \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{u} \end{aligned}$$

将上式关于 x 在 Ω 上积分, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}|^2 dx + \int_{\Omega} \left(\nabla P \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{H}|^2 \cdot \mathbf{u} \right) dx = \\ & \int_{\Omega} (2\mu \operatorname{div}(S\mathbf{u}) + \lambda \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{u} dx \end{aligned} \quad (11)$$

由式(11)的右端项可得

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} (2\mu \operatorname{div}(S\mathbf{u}) + \lambda \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{u} dx = \\ & \int_{\Omega} (2\mu (S\mathbf{u})^2 + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{u})^2) dx - \int_{\partial\Omega} 2\mu (S\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u} ds = \\ & \int_{\Omega} (2\mu (S\mathbf{u})^2 + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{u})^2) dx - \int_{\partial\Omega} 2\mu B\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} ds \geq \\ & \int_{\Omega} (2\mu (S\mathbf{u})^2 + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{u})^2) dx - C \int_{\partial\Omega} |\mathbf{u}|^2 ds \geq \\ & C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 - C \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{u}| |\nabla \mathbf{u}| ds \geq \\ & C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 - C \|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \nabla P \cdot \mathbf{u} dx \right| = \left| \int_{\Omega} P \cdot \operatorname{div} \mathbf{u} dx \right| \leq \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} \|P\|_{L^2} \leq \\ & C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} \|\rho\|_{L^2} \|\rho\|_{L^\infty}^\gamma \delta \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + C_\delta \|\rho\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \nabla \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{u} dx \right| \leq \|\nabla \mathbf{H}\|_{L^2} \|\mathbf{H}\|_{L^3} \|\mathbf{u}\|_{L^6} \leq \\ & C \|\mathbf{H}\|_{H^1}^2 \|\mathbf{u}\|_{H^1} \end{aligned} \quad (14)$$

将式(12)~(14)代入式(11), 取 δ 充分小, 可得引理 12.

引理 12

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} 2\mu |S\mathbf{u}|^2 + \lambda |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 dx + \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}_t|^2 dx \leq \\ & 2 \frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} (B\mathbf{u}) ds + C(\|\rho\|_{H^1}^2 + \|\mathbf{u}\|_{H^1}^3 \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^1} + \\ & \|\mathbf{u}\|_{H^1}^2 \|\mathbf{H}\|_{H^1} \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^1}) \end{aligned}$$

实际上, 由引理 12 可得

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\mathbf{u}_\tau\|_{L^2}^2 d\tau \leq C$$

证明 利用质量方程, 方程式(1)中第2个式子可写为

$$\begin{aligned} & \rho \mathbf{u}_t + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla P + \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{H}|^2 - \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} \right) = \\ & \mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (15)$$

在式(15)两边同时乘以 $\mathbf{u}_t$, 关于 x 在 Ω 上积分, 可得

$$\int_{\Omega} \rho u_t^2 + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \mathbf{u}_t + \nabla P \mathbf{u}_t + \frac{1}{2} \nabla |H^2| \mathbf{u}_t dx = \int_{\Omega} 2\mu \operatorname{div}(S\mathbf{u}) + \lambda \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{u}_t dx \quad (16)$$

对于等号右边项, 通过分部积分, 可得

$$\int_{\Omega} (2\mu \operatorname{div}(S\mathbf{u}) + \lambda \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{u}_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega} \mathbf{B} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} ds - \int_{\Omega} 2\mu |S\mathbf{u}| |S\mathbf{u}_t| - \lambda |\operatorname{div} \mathbf{u}| |\operatorname{div} \mathbf{u}_t| dx$$

将上式代入式(16), 等式两边关于 t 积分, 可得

$$\int_0^t (\|\sqrt{\rho} \mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2) d\tau \leq C + C \int_{\partial\Omega} |\mathbf{u}|^2 ds + C \int_0^t \int_{\Omega} (\rho |\mathbf{u}| |\nabla \mathbf{u}| |\mathbf{u}_t| + |\mathbf{u}_t| |\nabla P| + |H^2| |\mathbf{u}_t|) dx d\tau$$

对上式不等号右边项分别进行估计

$$\int_{\partial\Omega} |\mathbf{u}|^2 ds \leq C \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{u}| |\nabla \mathbf{u}| dx \leq C \|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + C_{\delta} \|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \delta \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2$$

$$\int_0^t \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}| |\nabla \mathbf{u}| |\mathbf{u}_t| dx d\tau \leq$$

$$C \int_0^t \|\rho\|_{L^{\infty}} \|\mathbf{u}\|_{L^{\infty}} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} \|\mathbf{u}_t\|_{L^2} d\tau \leq$$

$$\delta \int_0^t \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 d\tau + C_{\delta} \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 d\tau$$

$$\int_0^t \int_{\Omega} |\nabla P| |\mathbf{u}_t| dx d\tau \leq C \int_0^t \|\mathbf{u}_t\|_{L^2} \|\nabla \rho\|_{L^2} d\tau \leq$$

$$\delta \int_0^t \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 d\tau + C_{\delta} \int_0^t \|\nabla \rho\|_{L^2}^2 d\tau$$

$$\int_0^t \int_{\Omega} (|H^2| |\mathbf{u}_t|) dx d\tau \leq \int_0^t \|\mathbf{u}_t\|_{L^2} \|H^2\|_{L^2} d\tau \leq$$

$$\delta \int_0^t \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 d\tau + C_{\delta} \int_0^t \|H^2\|_{L^2}^2 d\tau$$

取 δ 充分小, 可得

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 d\tau \leq C$$

引理 13

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}_t|^2 dx + C \|\mathbf{u}_t\|_{H^1}^2 \leq \delta \|\mathbf{u}_t\|_{H^1}^2 + \delta \|\nabla \mathbf{u}\|_{W^{1,q}}^2 +$$

$$C_{\delta} \bar{\rho} \Lambda (\|\rho_t\|_{L^3}, \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}, \|\mathbf{u}\|_{H^2}, \|\rho\|_{W^{1,q}}, \|\mathbf{H}_t\|_{L^2}, \|\mathbf{H}\|_{H^2})$$

证明 在方程(1)中第2个式子两边关于 t 求导, 可得

$$\rho \mathbf{u}_{tt} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_t - 2\mu \operatorname{div}(S\mathbf{u}_t) - \lambda \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_t = -\rho_t \mathbf{u}_t - \rho_t \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \rho \mathbf{u}_t \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla P_t - \nabla |H H_t| \quad (17)$$

在式(17)两边同时乘以 $\mathbf{u}_t$, 关于 x 在 Ω 上积分, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}_t|^2 dx - \int_{\Omega} (2\mu \operatorname{div}(S\mathbf{u}_t) - \lambda \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_t) \mathbf{u}_t dx = \\ & - \int_{\Omega} \rho_t |\mathbf{u}_t|^2 dx - \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}_t \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_t dx - \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}_t|^2 |\nabla \mathbf{u}| dx - \\ & \int_{\Omega} |\mathbf{u}_t| |\nabla P_t| dx - \int_{\Omega} (\nabla H \cdot H_t + H \cdot \nabla H_t) \mathbf{u}_t dx \end{aligned} \quad (18)$$

对式(18)等号左边第2项进行估计, 并利用边界条件 $(S\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_{\tau|_{\partial\Omega}} = (B\mathbf{u})_{\tau|_{\partial\Omega}}$,

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} (2\mu \operatorname{div}(S\mathbf{u}_t) - \lambda \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_t) \mathbf{u}_t dx = \\ & \int_{\Omega} 2\mu |S\mathbf{u}_t|^2 + \lambda |\operatorname{div} \mathbf{u}_t|^2 dx - \int_{\partial\Omega} 2\mu (S\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}_t ds \geq \\ & 2C \|\mathbf{u}_t\|_{H^1}^2 - C \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 - C \|\mathbf{u}_t\| \|\nabla \mathbf{u}_t\| \geq \\ & C \|\mathbf{u}_t\|_{H^1}^2 - C \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (19)$$

对式(19)右边的项逐个计算

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \rho_t |\mathbf{u}_t|^2 dx \right| \leq \|\rho_t\|_{L^3} \cdot \|\mathbf{u}_t\|_{L^2} \cdot \|\mathbf{u}_t\|_{L^6} \leq \\ & \|\rho_t\|_{L^3} \cdot \|\mathbf{u}_t\|_{L^2} \cdot \|\mathbf{u}_t\|_{H^1} \leq \\ & C_{\delta} \|\rho_t\|_{L^3}^2 \cdot \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + \delta \|\mathbf{u}_t\|_{H^1}^2 \end{aligned} \quad (20)$$

利用质量方程和嵌入定理, 有

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \rho_t \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_t dx \right| = \|\rho_t\|_{L^3} \|\mathbf{u}\|_{L^{\infty}} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} \cdot (\|\mathbf{u}_t\|_{L^2} + \\ & \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2}) \leq (\|\nabla \rho\|_{L^3} \|\mathbf{u}\|_{L^{\infty}} + \|\rho\|_{L^6} \|\nabla^2 \mathbf{u}\|_{L^2}) \|\mathbf{u}\|_{H^2}^2 \cdot \\ & (\|\mathbf{u}_t\|_{L^2} + \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2}) \leq (\|\nabla \rho\|_{L^3} + \|\rho\|_{L^6}) \|\mathbf{u}\|_{H^2}^3 \cdot \\ & \|\mathbf{u}_t\|_{L^2} + (\|\nabla \rho\|_{L^3} + \|\rho\|_{L^6}) \|\mathbf{u}\|_{H^2}^3 \cdot \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2} \leq \\ & C_{\delta} (\|\nabla \rho\|_{L^q} + 1) \|\mathbf{u}\|_{H^2}^3 \cdot \|\mathbf{u}_t\|_{L^2} + \\ & C_{\delta} (\|\nabla \rho\|_{L^q} + 1)^2 \|\mathbf{u}\|_{H^2}^6 + \delta \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 \leq \\ & C_{\delta} \Lambda (\|\nabla \rho\|_{L^q}, \|\mathbf{u}\|_{H^2}, \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}) + \delta \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}_t \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_t dx \right| \leq \|\rho\|_{L^{\infty}} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^{\infty}} \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 \leq \\ & \delta \|\nabla \mathbf{u}\|_{W^{1,q}}^2 + C_{\delta} \bar{\rho} \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^4 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \nabla P_t \cdot \mathbf{u}_t dx \right| = \left| \int_{\Omega} P_t \cdot \operatorname{div} \mathbf{u}_t dx \right| \leq \\ & C_{\delta} \|\rho_t\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2} \leq \delta \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + C_{\delta} \bar{\rho} \|\rho_t\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} (\nabla H \cdot H_t + H \cdot \nabla H_t) \mathbf{u}_t dx \right| \leq \|\nabla H\|_{L^6} \|H_t\|_{L^2} \|\mathbf{u}_t\|_{L^3} + \\ & \|H\|_{L^6} \|\nabla H_t\|_{L^2} \|\mathbf{u}_t\|_{L^3} \leq \|H\|_{H^2} \|H_t\|_{L^2} \|\mathbf{u}_t\|_{H^1} + \\ & \|H\|_{H^1} \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|H\|_{H^1} \|\mathbf{u}_t\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|\nabla H_t\|_{L^2} \leq \\ & \delta (\|\mathbf{u}_t\|_{H^1}^2 + \|\mathbf{H}_t\|_{H^1}^2) + \\ & C_{\delta} (\|H\|_{H^2}^2 \|H_t\|_{L^2}^2 + \|H\|_{H^1}^4 \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2) \end{aligned} \quad (24)$$

将式(19)~(24)代入式(18), 取 δ 充分小, 通过引理 11 和引理 12 得到引理 13。

4.3 磁场估计

引理 14 $\frac{d}{dt} \|H\|_{L^2}^2 + C \|H\|_{H^1}^2 \leq C \|H_0\|_{L^2}^2$

证明 在式(5)两边同乘以 H , 且关于 x 在 Ω 的积分, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} H^2 dx + \int_{\Omega} \sigma \nabla \times (\nabla \times H) \cdot H dx \leq \\ & \int_{\Omega} |u \nabla H \cdot H| + |H^2 \nabla u| dx \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|H\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} \sigma \nabla \times (\nabla \times H) \cdot H dx \leq C \|\nabla u\|_{L^\infty} \|H\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

由引理 4 可得

$$\|H\|_{H^1} \leq C \left(\|\nabla \times u\|_{L^2} + \|\operatorname{div} H\|_{L^2} + \|H\|_{L^2} + \|H \cdot n\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right) \leq C (\|\nabla \times H\|_{L^2} + \|H\|_{L^2})$$

从而有

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \times (\nabla \times H) \cdot H dx = \|\nabla H\|_{L^2}^2 \geq C \|H\|_{H^1}^2 - C \|H\|_{L^2}^2 \\ & \frac{d}{dt} \|H\|_{L^2}^2 + C \|H\|_{H^1}^2 - C \|H\|_{L^2}^2 \leq C \|\nabla u\|_{L^\infty}^2 C \|H\|_{L^2}^2 \\ & \frac{d}{dt} \|H\|_{L^2}^2 + C \|H\|_{H^1}^2 \leq (1 + \|\nabla u\|_{W^{1,q}}^2) \|H\|_{L^2}^2 \quad (25) \end{aligned}$$

$$\|H\|_{L^2}^2 \leq e^{\int_0^t 1 + \|\nabla u\|_{W^{1,q}}^2 d\tau} \|H_0\|_{L^2}^2 \quad (26)$$

应用 Gronwall 不等式, 将式(26)代入式(25), 可得

$$\frac{d}{dt} \|H\|_{L^2}^2 + C \|H\|_{H^1}^2 \leq C \|H_0\|_{L^2}^2$$

引理 15

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\sigma}{2} \|\nabla \times H\|_{L^2}^2 \right) + \frac{1}{2} \|H\|_{L^2}^2 \leq C \|u\|_{H^2}^2 \|H\|_{H^1}^2$$

证明 在式(5)等式两边同乘以 H_t , 且关于 x 在 Ω 的积分, 可得

$$\begin{aligned} & \|H_t\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} u \cdot \nabla H \cdot H_t dx - \int_{\Omega} H \cdot \nabla u \cdot H_t dx + \\ & \sigma \int_{\Omega} \nabla \times (\nabla \times H) \cdot H_t dx = 0 \quad (27) \end{aligned}$$

式(27)左边的第 2~4 项:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u \cdot \nabla H \cdot H_t dx \leq \frac{1}{4} \|H_t\|_{L^2}^2 + C \|u\|_{L^\infty}^2 \|\nabla H\|_{L^2}^2 \leq \\ & \frac{1}{4} \|H_t\|_{L^2}^2 + C \|u\|_{H^2}^2 \|\nabla H\|_{L^2}^2 \quad (28) \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} H \cdot \nabla u \cdot H_t dx \leq \frac{1}{4} \|H_t\|_{L^2}^2 + C \|\nabla u\|_{H^1}^2 \|H\|_{H^1}^2 \quad (29)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \times (\nabla \times H) \cdot H_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \times H\|_{L^2}^2 \quad (30)$$

将式(28)~(30)代入式(27)中, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\sigma}{2} \|\nabla \times H\|_{L^2}^2 \right) + \|H_t\|_{L^2}^2 \leq \\ & \frac{1}{2} \|H_t\|_{L^2}^2 + C \|u\|_{H^2}^2 \|\nabla H\|_{L^2}^2 + C \|\nabla u\|_{H^1}^2 \|H\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

从而可证

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\sigma}{2} \|\nabla \times H\|_{L^2}^2 \right) + \frac{1}{2} \|H_t\|_{L^2}^2 \leq C \|u\|_{H^2}^2 \|H\|_{H^1}^2$$

引理 16

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|H_t\|_{L^2}^2 + C \|H_t\|_{H^1}^2 \leq \delta (\|\nabla u_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{W^{1,q}}^2) + \\ & C_\delta (\|u_t\|_{L^2}^2 \|H\|_{L^2}^4 + \|H_t\|_{L^2}^4 + \|H_t\|_{L^2}^2) \end{aligned}$$

证明 对式(5)关于 t 求导, 然后等式两边同乘以 H_t , 且关于 x 在 Ω 的积分, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|H_t\|_{L^2}^2 = - \int_{\Omega} u \cdot \nabla H_t \cdot H_t + H \cdot \nabla u_t \cdot H_t + \\ & u_t \cdot \nabla H \cdot H_t + H_t^2 \nabla u dx \quad (31) \end{aligned}$$

对上面右边进行估计

$$\begin{aligned} & RHS \leq \int_{\Omega} |u \cdot \nabla H_t \cdot H_t| + |H \cdot \nabla u_t \cdot H_t| + \\ & |u_t \cdot \nabla H \cdot H_t| + |H_t^2 \nabla u| dx \leq \delta (\|\nabla H_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_t\|_{L^2}^2) + \\ & C_\delta \|u\|_{H^2}^2 \|H_t\|_{L^2}^2 + \|H_t\|_{L^6} \|u_t\|_{L^3} \|\nabla H\|_{L^2} + \\ & \|\nabla u\|_{L^\infty}^2 \|H_t\|_{L^2}^2 \leq \delta (\|\nabla H_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_t\|_{L^2}^2) + \\ & C_\delta \|H_t\|_{H^1} \|u_t\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} + \|u_t\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|H\|_{L^2} + \\ & \|\nabla u\|_{W^{1,q}}^2 \|H_t\|_{L^2}^2 \leq \delta (\|\nabla H_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_t\|_{L^2}^2) + \\ & C_\delta (\|H_t\|_{L^2}^4 \|u_t\|_{L^2} + \|H\|_{L^2}^4) + \delta \|\nabla u\|_{W^{1,q}}^2 \quad (32) \end{aligned}$$

将式(32)代入式(31), 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|H_t\|_{L^2}^2 \leq \delta (\|\nabla H_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_t\|_{L^2}^2 + \\ & \|\nabla u\|_{W^{1,q}}^2) + C_\delta (\|H_t\|_{L^2}^4 + \|u_t\|_{L^2}^2 \|H\|_{L^2}^4) \end{aligned}$$

应用引理 4, 使用边界条件式(4), 取 δ 充分小, 再注意到 $\operatorname{div} H = 0$, 可得

$$\begin{aligned} & \|H_t\|_{H^1}^2 \leq C \left(\|\nabla H_t\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{div} H_t\|_{L^2}^2 + \right. \\ & \left. \|H_t\|_{L^2}^2 + \|H_t \cdot n\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}^2 \right) \leq C (\|\nabla H_t\|_{L^2}^2 + \|H_t\|_{L^2}^2) \end{aligned}$$

从而可得引理 18.

4.4 速度和磁场的椭圆估计

引理 17

$$\|(u, H)\|_{H^2} \leq C \Lambda (\|(u_t, H_t)\|_{L^2}, \|(u, H)\|_{H^1}, \|\rho\|_{W^{1,q}})$$

证明 根据式(1)中的第 2 个式子(动量方程), 可得

$$\rho u_t + \rho u \cdot \nabla u + \nabla P + \nabla H \cdot H = \mu \Delta u + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u$$

$$\lambda \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = \rho \mathbf{u}_t + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla P + \nabla \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} - 2\mu \operatorname{div}(\mathbf{S} \mathbf{u})$$

根据椭圆正则性, 可得

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2} \leq C(\|\rho \mathbf{u}_t\|_{L^2} + \|\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\|_{L^2} + \|\nabla P\|_{L^2}) +$$

$$|B\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \|\mathbf{u}\|_{L^2} + \|\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H}\|_{L^2} \leq$$

$$C(\|\mathbf{u}_t\|_{L^2} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} + \|\rho\|_{W^{1,q}} +$$

$$\|\mathbf{H}\|_{\mathbf{H}^1} \|\nabla \mathbf{H}\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{H}\|_{\mathbf{H}^1}^{\frac{1}{2}} + \|\mathbf{u}\|_{L^2} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1}^2)$$

应用 Young 不等式, 可得

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2} \leq C_{\rho,\delta}(\|\mathbf{u}_t\|_{L^2} + \Lambda(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1}, \|\rho\|_{W^{1,q}}, \|\mathbf{H}\|_{\mathbf{H}^1})) + \delta \|\mathbf{H}\|_{\mathbf{H}^2} \quad (33)$$

对于磁场方程, 式(5)可写成

$$\sigma \Delta \mathbf{H} = \mathbf{H}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{H} - (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

类似地,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{H}\|_{\mathbf{H}^2} &\leq C(\|\mathbf{H}_t\|_{L^2} + \|\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{H}\|_{L^2} + \|\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{u}\|_{L^2} + \|\mathbf{H}\|_{L^2}) \leq C(\|\mathbf{H}_t\|_{L^2} + \\ &\|\mathbf{u}\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{H}\|_{L^3} + \|\mathbf{H}\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^3} + \|\mathbf{H}\|_{L^2}) \leq \\ &C\left(\|\mathbf{H}_t\|_{L^2} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1} \|\nabla \mathbf{H}\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{H}\|_{L^6}^{\frac{1}{2}} + \right. \\ &\left. \|\mathbf{H}\|_{\mathbf{H}^1} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^6}^{\frac{1}{2}} + \|\mathbf{H}\|_{L^2}\right) \leq C\left(\|\mathbf{H}_t\|_{L^2} + \right. \\ &\left. \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1} \|\mathbf{H}\|_{\mathbf{H}^1}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{H}\|_{\mathbf{H}^1}^{\frac{1}{2}} + \|\mathbf{H}\|_{\mathbf{H}^1} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1}^{\frac{1}{2}} + \right. \\ &\left. \|\mathbf{H}\|_{L^2}\right) \leq \delta(\|\mathbf{H}\|_{\mathbf{H}^2} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2}) + C_{\delta}(\|\mathbf{H}_t\|_{L^2} + \\ &\Lambda(\|\mathbf{H}\|_{\mathbf{H}^1}, \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1})) \end{aligned} \quad (34)$$

将式(33)和式(34)相加, 并取 δ 充分小, 可得引理 17 成立。

引理 18 对 $3 < q \leq 6$, 有

$$\|(\mathbf{u}, \mathbf{H})\|_{W^{2,q}} \leq C(\|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^q} + \|\nabla \mathbf{H}_t\|_{L^q} + \Lambda(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2}, \|\mathbf{H}\|_{\mathbf{H}^2}))$$

证明

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{u}, \mathbf{H})\|_{W^{2,q}} &\leq C[\|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^q} + \Lambda(\|(\mathbf{u}_t, \mathbf{H}_t)\|_{L^q}, \|(\mathbf{u}, \mathbf{H})\|_{\mathbf{H}^1}) + \\ &\|\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H}\|_{L^q} + \|\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{H}\|_{L^q} + \|\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{u}\|_{L^q} + \|\mathbf{H}_t\|_{L^q}] \leq \\ &C(\|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^q} + \|\mathbf{H}\|_{L^\infty} \|\mathbf{H}\|_{W^{1,q}} + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty} \|\mathbf{H}\|_{W^{1,q}} + \\ &\|\mathbf{H}\|_{L^\infty} \|\mathbf{u}\|_{W^{1,q}} + \|\mathbf{H}_t\|_{L^q}) \leq C(\|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^q} + \\ &\|\mathbf{H}\|_{\mathbf{H}^2} \|\mathbf{H}\|_{\mathbf{H}^2} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2} \|\mathbf{H}\|_{\mathbf{H}^2} + \|\mathbf{H}_t\|_{L^q}) \leq \\ &C(\|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^q} + \|\nabla \mathbf{H}_t\|_{L^q} + \Lambda(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2}, \|\mathbf{H}\|_{\mathbf{H}^2})) \end{aligned}$$

5 磁流体方程组解的局部存在性

首先考虑磁流体方程组的线性化方程

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \\ (\rho \mathbf{u})_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) + \nabla P + \operatorname{div}\left(\frac{1}{2}|\mathbf{H}|^2 - \mathbf{H} \otimes \mathbf{H}\right) = \\ \mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} \\ \mathbf{H}_t + \nabla \times (\mathbf{H} \times \mathbf{u}) = \sigma \Delta \mathbf{H} \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \end{cases} \quad (35)$$

引理 19 当 $3 < q \leq 6$, 设 $v \in L^\infty([0, T]; \mathbf{H}^2(\Omega)) \cap L^2([0, T]; W^{2,q}(\Omega))$, $v_t \in L^\infty([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2([0, T]; \mathbf{H}^1(\Omega))$, 令 Ω 是 R^3 中带有滑动边界的有界区域, $(\rho_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{H}_0)$ 是已知函数, 且满足正则条件:

$$\underline{\rho} \leq \rho_0 \in W^{1,q}; \quad (\mathbf{u}_0, \mathbf{H}_0) \in \mathbf{H}^2(\Omega)$$

边界条件:

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} = 0, 2\mu(S(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n})_\tau|_{\partial\Omega} = (B\mathbf{v})_\tau|_{\partial\Omega}$$

则初边值问题(35)存在唯一解 $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{H})$, 使得

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{H}) &\in L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)) \\ (\mathbf{u}_t, \mathbf{H}_t) &\in L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)) \\ \rho &\in L^q(0, T; W^{1,q}(\Omega)) \end{aligned}$$

其中, $(\mathbf{u}, \mathbf{H})$ 满足边界条件, 且满足

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{u}_t, \mathbf{H}_t)\|_{L^2}^2 + \|(\mathbf{u}, \mathbf{H})\|_{\mathbf{H}^2}^2 + \|\rho\|_{W^{1,q}}^q + \\ \int_0^t \|(\mathbf{u}_t, \mathbf{H}_t)\|_{L^2}^2 + \|(\mathbf{u}, \mathbf{H})\|_{L^2}^2 d\tau \leq C \end{aligned}$$

证明 由文献[20]中第 5.9 章定理 4, 可以得到 $\mathbf{u} \in C([0, T]; \mathbf{H}^1)$, 由正则性理论和连续性理论可知, $0 \leq \rho \leq L^q(0, T; W^{1,q}(\Omega))$ 。因此, 线性动量方程可以写成

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho^{-1} \nabla P + \rho^{-1} \operatorname{div}\left(\frac{1}{2}|\mathbf{H}|^2 - \mathbf{H} \otimes \mathbf{H}\right) = \\ \rho^{-1}(\mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}) \\ (\mathbf{H}_t + \nabla \times (\mathbf{H} \times \mathbf{u}))\rho^{-1} = \sigma \Delta \mathbf{H} \rho^{-1} \end{cases} \quad (36)$$

现通过 Galerkin 逼近法来证明式(36)解的局部存在性。

设 $\{\varphi_l\}_1^m, \{\omega_l\}_1^m$ 分别是 $-\Delta$ 算子和 L 算子的特征向量, 且是光滑函数, $V^m = \operatorname{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$, $W^m = \operatorname{span}\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$, 对固定的正整数 m , 令

$$\mathbf{H}_m(t) = \sum_{l=1}^m a_m^l(t) \varphi_l, \quad \mathbf{u}_m(t) = \sum_{l=1}^m b_m^l(t) \omega_l$$

系数 $a_m^l(t), b_m^l(t)$ 满足

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \mathbf{u}_{tm} \omega_k + \nu_m \cdot \nabla \mathbf{u}_m \cdot \omega_k + \rho^{-1} \nabla P \omega_k + \\ \rho^{-1} \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{H}_m|^2 - \mathbf{H}_m \otimes \mathbf{H}_m \right) \omega_k dx = \\ \int_{\Omega} \rho^{-1} (\mu \Delta \mathbf{u}_m + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_m) \omega_k dx, \quad (37) \\ \int_{\Omega} (\mathbf{H}_{tm} + \nabla \times (\mathbf{H}_m \times \mathbf{u}_m)) \phi_k dx = \\ \int_{\Omega} \sigma \Delta \mathbf{H}_m \phi_k dx, \end{array} \right.$$

根据文献[20]中第7章定理1可得, 对任意 m , 存在唯一的 $(\mathbf{u}_m, \mathbf{H}_m)$ 满足式(37)。

类似于前面的先验估计, 可得

$$\sup(\|(\mathbf{u}_m, \mathbf{H}_m)\|_{H^1} + \|\partial_t(\mathbf{u}_m, \mathbf{H}_m)\|_{H^1}) + \int_0^{T_*} (\|\partial_t(\mathbf{u}_m, \mathbf{H}_m)\|_{L^2}^2 + \|\nabla^2(\mathbf{u}_m, \mathbf{H}_m)\|_{L^q}^2) dt + 1 \leq C$$

其中, C 与 m 无关, 则可得

在 $L^\infty(0, T; H^1)$ 中, $(\mathbf{u}_m, \mathbf{H}_m) \rightarrow (\mathbf{u}, \mathbf{H})$ 。

在 $L^2(0, T; H^1)$ 中, $(\mathbf{u}_m, \mathbf{H}_m) \xrightarrow{\text{弱}} (\mathbf{u}, \mathbf{H})$ 。

在 $L^\infty(0, T; H^1)$ 中, $(\mathbf{u}_m, \mathbf{H}_m) \xrightarrow{\text{弱}^*} (\mathbf{u}, \mathbf{H})$ 。

在 $L^2(0, T; H^1)$ 中, $(\partial_t \mathbf{u}_m, \partial_t \mathbf{H}_m) \xrightarrow{\text{弱}} (\mathbf{u}_t, \mathbf{H}_t)$ 。

令 $m \rightarrow \infty$, 则存在式(36)在式(37)意义下的一个弱解。

根据文献[20]中第7章定理3, 令 $m \rightarrow \infty$, 则可得 $(\mathbf{u}, \mathbf{H})$ 是式(36)的解。

现用迭代法证明磁流体方程组解的局部存在性。

构造磁流体方程组满足初边值问题(2)~(4)的逼近解。

首先作如下假设和定义:

a. 定义 $\mathbf{u}^0 = 0$;

b. 假设对于 $k \geq 1$, 定义 $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{k-1}$ 。

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t^k + \operatorname{div}(\rho^k \mathbf{u}^{k-1}) = 0 \\ (\rho^k \mathbf{u}^k)_t + \operatorname{div}(\rho^k \mathbf{u}^{k-1} \otimes \mathbf{u}^k) + \nabla P^k + \\ \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{H}^k|^2 - \mathbf{H}^k \otimes \mathbf{H}^k \right) = \mu \Delta \mathbf{u}^k + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}^k \quad (38) \\ \mathbf{H}_t^k + \nabla \times (\mathbf{H}^k \times \mathbf{u}^{k-1}) = \sigma \Delta \mathbf{H}^k \\ \operatorname{div} \mathbf{H}^k = 0 \end{array} \right.$$

初始条件:

$$(\rho^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{H}^k)|_{t=0} = (\rho_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{H}_0) \quad (39)$$

边界条件:

$$\mathbf{u}^k \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, (S \mathbf{u}^k \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = (B \mathbf{u}^k)|_{\partial\Omega} \quad (40)$$

根据引理21可知, 式(38)~(40)存在局部解

$(\rho^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{H}^k)$ 。另外, 根据先验估计, 可得

$$\begin{aligned} & \sup(\|\rho^k\|_{W^{1,q}} + \|\rho_t^k\|_{L^2} + \|(\mathbf{u}^k, \mathbf{H}^k)\|_{H^1} + \\ & \|(\mathbf{u}^k, \mathbf{H}^k)\|_{H^1} + \|\partial_t(\mathbf{u}^k, \mathbf{H}^k)\|_{L^2}) + \\ & \int_0^{T_*} (\|\partial_t(\nabla \mathbf{u}^k, \nabla \mathbf{H}^k)\|_{L^2}^2 + \|\nabla^2(\mathbf{u}^k, \mathbf{H}^k)\|_{L^q}^2) dt \leq C \end{aligned}$$

其中, C 是与 k 无关的常数。

根据 Aubin-Lions 引理, 可得

在 $L^\infty(0, T_*; L^q)$ 中, $\rho^k \rightarrow \rho$ 。

在 $L^\infty(0, T_*; W^{1,q})$ 中, $\rho^k \xrightarrow{\text{弱}} \rho$ 。

在 $L^\infty(0, T_*; H^1)$ 中, $(\mathbf{u}^k, \mathbf{H}^k) \rightarrow (\mathbf{u}, \mathbf{H})$ 。

且

$$\begin{aligned} & \rho \in L^\infty(0, T_*; W^{1,q}) \\ & (\mathbf{u}, \mathbf{H}) \in L^\infty(0, T_*; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T_*; H^1) \\ & (\mathbf{u}_t, \mathbf{H}_t) \in L^\infty(0, T_*; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T_*; H^1) \\ & \text{由连续性理论可得, } \rho \in L^\infty(0, T_*; W^{1,q}). \\ & \text{由嵌入定理可知} \end{aligned}$$

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T_*; H^1 - \text{弱}) \cap L^\infty(0, T_*; H^1)$$

现证 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{H}$ 关于时间的连续性, 首先证明 $(\rho \mathbf{u}_t)_t \in L^\infty(0, T_*; W^*)$, 其中, W^* 表示 W 的共轭空间。

$$\|(\rho \mathbf{u}_t)_t\|_{W^*} = \sup_{0 \leq t \leq T_*} |\langle (\rho \mathbf{u}_t)_t, \psi \rangle| \leq$$

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T_*} \int_{\Omega} |\rho_t| |\mathbf{u}| |\nabla \mathbf{u}| |\psi| + |\rho| |\mathbf{u}_t| |\nabla \mathbf{u}| |\psi| + |\rho| |\mathbf{u}| |\nabla \mathbf{u}_t| |\psi| + \\ & |P_t| |\psi| + |\nabla \mathbf{u}_t| |\nabla \psi| + |\nabla \mathbf{H}_t| |\mathbf{H}| |\psi| + |\nabla \mathbf{H}| |\mathbf{H}_t| |\psi| dx + \\ & \sup_{0 \leq t \leq T_*} \int_{\partial\Omega} |\mathbf{u}_t| |\psi| ds \leq \sup_{\|\psi\|_{W^*}=1} C (\|\rho_t\|_{L^2} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^3} + \\ & \|\rho\|_{L^\infty} \|\mathbf{u}_t\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^3} + \|\rho\|_{L^\infty} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty} \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2}) \|\psi\|_{H^1} + \\ & C (\|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2} + \|\rho^{r-1}\|_{L^\infty} \|\rho_t\|_{L^2} + \|\mathbf{H}\|_{L^3} \|\nabla \mathbf{H}_t\|_{L^2} + \\ & \|\mathbf{H}_t\|_{L^3} \|\nabla \mathbf{H}\|_{L^2}) \|\psi\|_{H^1} + C \|\mathbf{u}_t\|_{H^1} \|\psi\|_{H^1} \end{aligned}$$

因为, $\rho \mathbf{u}_t \in L^2(0, T_*; W)$, 应用文献[20]中第5.9章定理3, 可知 $\rho \mathbf{u}_t \in C(0, T_*; L^2)$, 所以, 可得 $\mathbf{u}_t \in C(0, T_*; L^2)$, 根据椭圆的正则性理论, 可知 $\nabla^2 \mathbf{u} \in C(0, T_*; L^2)$ 。

$$\|(\mathbf{H}_t)_t\|_{W^*} = \sup_{\|\varphi\|_{H^1}=1} |\langle (\mathbf{H}_t)_t, \varphi \rangle| \leq \sup_{\|\varphi\|_{H^1}=1} \int_{\Omega} |\mathbf{u}_t \nabla \mathbf{H}| + |\mathbf{u} \nabla \mathbf{H}_t| +$$

$$|\mathbf{H}_t \nabla \mathbf{u}| + |\mathbf{H} \nabla \mathbf{u}_t| + |\sigma \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}_t)| |\varphi| dx \leq$$

$$\sup_{\|\varphi\|_{H^1}=1} C (\|\mathbf{u}_t\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{H}\|_{L^3} \|\varphi\|_{H^1} +$$

$$\|\nabla \mathbf{H}_t\|_{L^2} \|\mathbf{u}\|_{L^3} \|\varphi\|_{H^1} + \|\mathbf{H}_t\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^3} \|\varphi\|_{H^1} +$$

$$\|\nabla \mathbf{u}_t\|_{L^2} \|\mathbf{H}\|_{L^3} \|\varphi\|_{H^1}) + C \|\mathbf{H}_t\|_{H^1} \|\varphi\|_{H^1}$$

其中, $(H^1(\Omega))^*$ 表示 $H^1(\Omega)$ 的共轭空间, 这就证明

了 $(\mathbf{H}_t)_t \in L^2(0, T_*; (\mathbf{H}^1(\Omega))^*)$ 。因为, $\mathbf{H}_t \in L^2(0, T_*; \mathbf{H}^1)$, 类似于 $\rho \mathbf{u}_t$ 连续性的证明, 可知 $\mathbf{H}_t \in C(0, T_*; L^2)$ 成立, 根据椭圆的正则性理论, 可知 $\nabla^2 \mathbf{H} \in C(0, T_*; L^2)$ 。

综上, 定理1得证。

参考文献:

- [1] DAVIDSON P A. An introduction to magnetohydrodynamics[M]. Cambridge, England: Cambridge University, 2016.
- [2] SERMANGE M, TEMAM R. Some mathematical questions related to the mhd equations[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1983, 36(5): 635–664.
- [3] BIAN D F, GUO B L. Well-posedness in critical spaces for the full compressible mhd equations[J]. Acta Mathematica Scientia, 2013, 33(4): 1153–1176.
- [4] KOZONO H. Weak and classical solutions of the two-dimensional magnetohydrodynamic equations[J]. Tohoku Mathematical Journal, 1989, 41(3): 471–488.
- [5] LIU S Q, YU H B, ZHANG J W. Global weak solutions of 3D compressible MHD with discontinuous initial data and vacuum[J]. Journal of Differential Equations, 2013, 254(1): 229–255.
- [6] TAN Z, WANG Y J. Global well-posedness of an initial-boundary value problem for viscous non-resistive MHD systems[J]. Mathematics, 2015, 258(7): 2531–2571.
- [7] OHNO M, SHIROTA T. On the initial-boundary value problem for the linearized MHD equations[J]. Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku, 1998, 1045: 26–44.
- [8] MATSUMURA A, NISHIDA T. Initial-boundary value problems for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids[J]. Communications in Mathematical Physics, 1983, 89(2): 445–464.
- [9] LIONS P L. Mathematical topics in fluid mechanics volume 1: incompressible models[M]. Oxford: Oxford University Press, 1996: 10–121.
- [10] HOFF D. Existence of solutions to a model for sparse, one-dimensional fluids[J]. Journal of Differential Equations, 2011, 250(2): 1083–1113.
- [11] HOFF D, SERRE D. The failure of continuous dependence on initial data for the Navier-Stokes equations of compressible flow[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1991, 51(4): 887–898.
- [12] HOFF D. Compressible flow in a half-space with Navier boundary conditions[J]. Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 2005, 7(3): 315–338.
- [13] HOFF D. Global solutions of the Navier-Stokes equations for multidimensional compressible flow with discontinuous initial data[J]. Journal of Differential Equations, 1997, 120(1): 215–254.
- [14] FAN J S, SONG J, NAKAMURA G, et al. Logarithmically improved regularity criteria for the Navier-Stokes and MHD equations[J]. Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 2011, 13(4): 557–571.
- [15] HOFF D, SANTOS M M. Lagrangean structure and propagation of singularities in multidimensional compressible flow[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2008, 188(3): 509–543.
- [16] HOFF D. Uniqueness of weak solutions of the Navier-Stokes equations of multidimensional, compressible flow[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2006, 37(6): 1742–1760.
- [17] HOFF D. Local solutions of a compressible flow problem with Navier boundary conditions in general three-dimensional domains[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2012, 44(2): 633–650.
- [18] TEMAN R. Navier-stokes equations: theory and numerical analysis[M]. New York: North-Holland Publishing Company, 1979.
- [19] XIAO Y L, XIN Z P. On the vanishing viscosity limit for the 3D Navier-Stokes equations with a slip boundary condition[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2007, 60(7): 1027–1055.
- [20] EVANS L C. Partial differential equations[M]. 2nd ed. American: American Mathematical Society, 2010.

(编辑: 石 瑛)