

# 混合分数阶 $p$ -Laplace 算子方程积分边值问题的多解性

张潇涵, 刘锡平, 贾梅, 陈豪亮

(上海理工大学理学院, 上海 200093)

**摘要:** 研究了一类同时具有 Riemann-Liouville 导数和 Caputo 导数的混合型分数阶  $p$ -Laplace 算子方程在 Riemann-Stieltjes 积分边界条件下的正解的存在性。根据 Riemann-Stieltjes 积分性质, 建立了边值问题具有多个正解存在的结论。分别运用不动点定理和单调迭代方法证明了所得结论的正确性, 并建立了求解此类边值问题的近似解的迭代序列。最后给出实例用于说明所得结论的适用性。

**关键词:**  $p$ -Laplace 算子; 混合分数阶方程; Riemann-Stieltjes 积分; 不动点定理; 正解

中图分类号: O 175.8

文献标志码: A

## Multiplicity of Solutions for Integrated Boundary Value Problems of Mixed Fractional $p$ -Laplacian Operator Equations

ZHANG Xiaohan, LIU Xiping, JIA Mei, CHEN Haoliang

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

**Abstract:** The existence of positive solutions was studied for a class of mixed fractional  $p$ -Laplacian operator equations with both Riemann-Liouville derivatives and Caputo derivatives under Riemann-Stieltjes integral boundary conditions. According to the Riemann-Stieltjes integral properties, several conclusions were obtained about the existence of multiple positive solutions of boundary value problems by using the fixed point theorem and monotone iterative method. Iterative sequences were established for finding the approximate solutions of such boundary value problems. Finally, some examples were presented to demonstrate the applicability of the conclusions.

**Keywords:**  $p$ -Laplacian operator; mixed fractional equation; Riemann-Stieltjes integral; fixed point theorem; positive solution

### 1 问题的提出

随着自然科学和社会科学的发展, 复杂工程

应用需求的增加, 分数阶微积分理论及其应用开始受到广泛关注<sup>[1-4]</sup>。非线性分数阶微分方程起源于核物理、流体力学及非线性光学等应用领域,

收稿日期: 2017-08-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11171220); 沪江基金资助项目 (B14005)

第一作者: 张潇涵(1992-), 女, 硕士研究生。研究方向: 常微分方程理论与应用。E-mail: 18749506111@163.com

通信作者: 刘锡平(1962-), 男, 教授。研究方向: 常微分方程理论与应用。E-mail: xipingliu@usst.edu.cn

其理论研究在目前微分方程领域中较为活跃<sup>[5-9]</sup>。具有 $p$ -Laplace算子的分数阶微分方程边值问题是非线性微分方程的一个重要研究课题,许多学者对不同类型的分数阶微分方程边值问题解或正解的存在性与多重性进行了大量研究<sup>[10-17]</sup>。由于Riemann-Stieltjes积分边值问题是经典Riemann积分边值问题的推广,两点边值问题、多点边值问题及一般Riemann积分边值问题可视为Riemann-Stieltjes积分边值问题的特例,因此,Riemann-Stieltjes积分边值问题具有更广泛的应用背景<sup>[12]</sup>。

本文研究一类同时具有Riemann-Liouville导数和Caputo导数的混合型分数阶 $p$ -Laplace算子方程在Riemann-Stieltjes积分边界条件下的正解的存在性。

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}(\varphi_p({}^c D_{0+}^{\beta} u(t))) = f(t, u(t)), & t \in (0, 1) \\ u'(0) = u''(0) = 0, & u(1) = \int_0^1 u(s) dB(s) \\ {}^c D_{0+}^{\beta} u(0) = {}^c D_{0+}^{\beta} u(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $1 < \alpha \leq 2 < \beta \leq 3$ ;  $D_{0+}^{\alpha}$ 是标准的Riemann-Liouville分数阶导数;  ${}^c D_{0+}^{\beta}$ 是Caputo型分数阶导数;  $\varphi_p$ 是 $p$ -Laplace算子,  $\varphi_p(s) = |s|^{p-2}s$ ,  $p > 1$ ,  $\varphi_q = \varphi_p^{-1}$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ;  $f: [0, 1] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 是连续函数,  $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ ;  $\int_0^1 u(s) dB(s)$ 是Riemann-Stieltjes积分, 其中,  $B$ 是单调递增函数。

## 2 预备知识及引理

分数阶微积分的相关定义及其结论见文献<sup>[2-3]</sup>。这里给出几个与本文密切相关的结论。

**引理1<sup>[3]</sup>** 假设 $u \in C(0, 1) \cap L(0, 1)$ , 则分数阶微分方程 $D_{0+}^{\alpha} u(t) = 0$ 的解为

$$u(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \cdots + c_n t^{\alpha-n}$$

式中:  $c_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ )为任意常数;  $n$ 为大于或等于 $\alpha$ 的最小整数。

**引理2<sup>[3]</sup>** 假设 $u \in C(0, 1) \cap L(0, 1)$ , 则分数阶微分方程 ${}^c D_{0+}^{\alpha} u(t) = 0$ 的解为

$$u(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \cdots + d_{n-1} t^{n-1}$$

式中:  $d_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ )为任意常数;  $n$ 为大于或等于 $\alpha$ 的最小整数。

**引理3<sup>[18]</sup>** 设函数 $B$ 在 $[a, b]$ 上单调递增。如果 $h, g$ 在 $[a, b]$ 上关于 $B$ 是Riemann-Stieltjes可积的, 且对于 $[a, b]$ 内的一切 $x$ 都有 $h(x) \leq g(x)$ , 则有

$$\int_a^b h(x) dB(x) \leq \int_a^b g(x) dB(x)$$

**引理4<sup>[18]</sup>** 设 $f$ 在矩形区域 $Q = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ 的每个点 $(x, y)$ 处连续,  $B$ 在 $[a, b]$ 上单调递增, 那么,

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dB(x)$$

在 $[c, d]$ 上连续。

现假设

$$(H_0) \quad w = \int_0^1 dB(t) < 1, \quad m = \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t) dB(t) \neq 0$$

定义空间 $E = C[0, 1]$ , 取范数 $\|u\| = \max_{t \in [0, 1]} |u(t)|$ , 显然,  $E$ 为实Banach空间。定义锥 $P \subset E$ 为

$$P = \{u \in E : u(t) \geq 0\}$$

**引理5** 令 $\xi \in C[0, 1]$ , 则函数 $u \in E$ 是下面的边值问题的解。

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}(\varphi_p({}^c D_{0+}^{\beta} u(t))) = \xi(t), & t \in (0, 1) \\ u'(0) = u''(0) = 0, & u(1) = \int_0^1 u(s) dB(s) \\ {}^c D_{0+}^{\beta} u(0) = {}^c D_{0+}^{\beta} u(1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

当且仅当 $u \in E$ ,

$$u(t) = \int_0^1 H(t, s) \varphi_q \left( \int_0^1 G(s, \tau) \xi(\tau) d\tau \right) ds \quad (3)$$

其中

$$H(t, s) = \Lambda(t, s) + \frac{g_B(s)}{1-w} \quad (4)$$

$$\Lambda(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \begin{cases} (1-s)^{\beta-1} - (t-s)^{\beta-1}, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ (1-s)^{\beta-1}, & 0 \leq t < s \leq 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$G(s, \tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} (s(1-\tau))^{\alpha-1} - (s-\tau)^{\alpha-1}, & 0 \leq \tau \leq s \leq 1 \\ (s(1-\tau))^{\alpha-1}, & 0 \leq s < \tau \leq 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$g_B(s) = \int_0^1 \Lambda(t, s) dB(t) \quad (7)$$

**证明** 令 $\varphi_p({}^c D_{0+}^{\beta} u(t)) = v(t)$ , 则边值问题(2)可以分解为如下两个边值问题:

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha} v(t) = \xi(t), & t \in (0, 1) \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

和

$$\begin{cases} {}^c D_{0+}^{\beta} u(t) = \varphi_q(v(t)), & t \in (0, 1) \\ u'(0) = u''(0) = 0, & u(1) = \int_0^1 u(s) dB(s) \end{cases} \quad (9)$$

根据引理1和引理2分别得到边值问题(8)和(9)的解为

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \xi(s) ds - \\ &\quad \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \xi(s) ds = - \int_0^1 G(t, s) \xi(s) ds \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \varphi_q(v(s)) ds - \\
 &\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} \varphi_q(v(s)) ds + \int_0^1 u(s) dB(s) = \\
 &-\int_0^1 \Lambda(t,s) \varphi_q(v(s)) ds + \int_0^1 u(s) dB(s) \quad (11)
 \end{aligned}$$

对式(11)的两边进行 Riemann-Stieltjes 积分,

$$\int_0^1 u(t) dB(t) = - \int_0^1 g_B(s) \varphi_q(v(s)) ds + w \int_0^1 u(s) dB(s)$$

从而得到

$$\int_0^1 u(t) dB(t) = - \frac{1}{1-w} \int_0^1 g_B(s) \varphi_q(v(s)) ds$$

将其代入式(11), 可得

$$\begin{aligned}
 u(t) &= - \int_0^1 \Lambda(t,s) \varphi_q(v(s)) ds - \frac{1}{1-w} \int_0^1 g_B(s) \varphi_q(v(s)) ds = \\
 &-\int_0^1 H(t,s) \varphi_q(v(s)) ds
 \end{aligned}$$

再结合式(10), 可知边值问题(2)的解为式(3)。

反之, 设

$$u \in E, \quad u(t) = \int_0^1 H(t,s) \varphi_q \left( \int_0^1 G(s,\tau) \xi(\tau) d\tau \right) ds$$

易证  $u = u(t)$  满足式(2)的方程与边界条件。

证毕。

**引理 6** 函数  $G(s,\tau)$  和  $\Lambda(t,s)$  满足如下性质:

a.  $G(s,\tau)$  和  $\Lambda(t,s)$  均在  $[0,1] \times [0,1]$  上连续, 且  $\Lambda(t,s) \geq 0$ , 对任意  $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$ ;

b.  $0 \leq G(s,\tau) \leq G(\tau,\tau)$ , 对任意  $(s,\tau) \in [0,1] \times [0,1]$ ;

c.  $\frac{t^{\beta-1}(1-t)(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \leq \Lambda(t,s) \leq \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$ , 对任意  $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$ 。

**证明** 由函数  $G(s,\tau)$  和  $\Lambda(t,s)$  的表达式容易证得性质 a 和 b。下面证明性质 c。

当  $0 \leq s \leq t \leq 1$  时,

$$\begin{aligned}
 \Gamma(\beta) \Lambda(t,s) &= (1-s)^{\beta-1} - (t-s)^{\beta-1} \geq (1-s)^{\beta-1} - (t-ts)^{\beta-1} \geq \\
 &(\beta-1)(t-ts)^{\beta-2}(1-t)(1-s) = \\
 &(\beta-1)t^{\beta-2}(1-t)(1-s)^{\beta-1} > t^{\beta-1}(1-t)(1-s)^{\beta-1}
 \end{aligned}$$

另一方面, 有

$$\Gamma(\beta) \Lambda(t,s) = (1-s)^{\beta-1} - (t-s)^{\beta-1} \leq (1-s)^{\beta-1}$$

当  $0 \leq t < s \leq 1$  时,

$$\Gamma(\beta) \Lambda(t,s) = (1-s)^{\beta-1} \geq t^{\beta-1}(1-t)(1-s)^{\beta-1}$$

证毕。

**引理 7** 函数  $H(t,s)$  满足如下性质:

a.  $H(t,s)$  在  $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$  上连续;

b.  $0 \leq \frac{m(1-s)^{\beta-1}}{(1-w)\Gamma(\beta)} \leq H(t,s) \leq \frac{(1-s)^{\beta-1}}{(1-w)\Gamma(\beta)}$ , 对任意的  $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$  成立。

**证明** 由引理 6 可知,  $\Lambda(t,s)$  在  $[0,1] \times [0,1]$  上是连续的, 再根据引理 4, 可得  $g_B(s)$  是连续的, 从而  $H(t,s)$  连续。

因为,

$$\frac{t^{\beta-1}(1-t)(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \leq \Lambda(t,s) \leq \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$$

由引理 3 可得

$$\begin{aligned}
 g_B(s) &= \int_0^1 \Lambda(t,s) dB(t) \geq \int_0^1 \frac{t^{\beta-1}(1-t)(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} dB(t) = \\
 &\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t) dB(t) = \frac{m(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}
 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
 g_B(s) &= \int_0^1 \Lambda(t,s) dB(t) \leq \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} dB(t) = \\
 &\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 dB(t) = \frac{w(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}
 \end{aligned}$$

因此,

$$H(t,s) = \Lambda(t,s) + \frac{g_B(s)}{1-w} \geq \frac{g_B(s)}{1-w} \geq \frac{m(1-s)^{\beta-1}}{(1-w)\Gamma(\beta)} \geq 0$$

且

$$\begin{aligned}
 H(t,s) &= \Lambda(t,s) + \frac{g_B(s)}{1-w} \leq \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} + \\
 &\frac{w(1-s)^{\beta-1}}{(1-w)\Gamma(\beta)} = \frac{(1-s)^{\beta-1}}{(1-w)\Gamma(\beta)}
 \end{aligned}$$

证毕。

### 3 边值问题正解的多重性

设  $P$  是 Banach 空间  $E$  中的锥,  $\theta: P \rightarrow \mathbb{R}^+$  为连续泛函, 对任意  $x, y \in P$  及  $\lambda \in [0,1]$ , 满足

$$\theta(\lambda x + (1-\lambda)y) - \lambda\theta(x) - (1-\lambda)\theta(y) \geq 0$$

则称  $\theta$  为  $P$  上的一个凹泛函<sup>[1]</sup>。

记  $P_c = \{x \in P: \|x\| < c\}$ ,  $P\{\theta, b, d\} = \{x \in P: b \leq \theta(x), \|x\| \leq d\}$ , 这里  $b, c, d > 0$ 。定义连续凹泛函  $\theta(u) = \min_{t \in [0,1]} |u(t)|$ 。

**引理 8**<sup>[1]</sup> 设有常数  $0 < a < b < d \leq c$ , 算子  $T: P_c \rightarrow P_c$  全连续,  $\theta: P \rightarrow \mathbb{R}^+$  为连续凹泛函,  $\theta(x) \leq \|x\|$  对任意的  $x \in P_c$  成立。又设

a.  $\{x \in P(\theta, b, d): \theta(x) > b\} \neq \emptyset$ , 对任意的  $x \in P(\theta, b, d)$ , 有  $\theta(Tx) > b$ ;

b.  $\|Tx\| < a$ , 对任意的  $x \in P_a$ ;

c.  $\theta(Tx) > b$ , 对任意的  $x \in P(\theta, b, c)$  且  $\|Tx\| > d$ 。

则  $T$  至少有 3 个不动点  $x_1, x_2, x_3$ , 满足  $\|x_1\| < a < \|x_3\|$ ,  $\theta(x_3) < b < \theta(x_2)$ 。

**引理 9** 假设  $(H_0)$  成立,  $f: [0, 1] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  是连续函数, 定义算子  $A: P \rightarrow E$  为

$$Au(t) = \int_0^1 H(t, s) \varphi_q \left( \int_0^1 G(s, \tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau \right) ds$$

则算子  $A: P \rightarrow P$  全连续。

**证明** 对任意  $u \in P$ , 由函数  $H, G, f$  的非负性和连续性, 可得  $Au(t) \geq 0$ , 且  $A$  为连续算子, 即  $A: P \rightarrow P$  连续。

令  $\Omega \subset P$  为非空有界闭集, 即存在一个正常数  $r$ , 使得  $\|u\| \leq r$  对所有  $u \in \Omega$  成立。

$$\begin{aligned} \text{令 } M &= \max_{t \in [0, 1], u \in \Omega} |f(t, u(t))| + 1, \text{ 则对 } u \in \Omega, \text{ 有} \\ |Au(t)| &= \left| \int_0^1 H(t, s) \varphi_q \left( \int_0^1 G(s, \tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau \right) ds \right| \leq \\ &M^{q-1} \int_0^1 H(t, s) \varphi_q \left( \int_0^1 G(s, \tau) d\tau \right) ds \leq \\ &M^{q-1} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{(1-w)\Gamma(\beta)} \varphi_q \left( \int_0^1 G(\tau, \tau) d\tau \right) ds \end{aligned}$$

即  $\|Au\| < +\infty$ , 因此,  $A$  一致有界。

因为, 函数  $H(t, s)$  在  $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$  上连续, 从而一致连续, 所以, 对任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得对任意  $t_1, t_2 \in [0, 1]$ , 当  $|t_1 - t_2| < \delta$  时, 有  $|H(t_1, s) - H(t_2, s)| < \varepsilon \left( M^{q-1} \varphi_q \left( \int_0^1 G(\tau, \tau) d\tau \right) \right)$ 。于是, 对所有  $u \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned} |Au(t_2) - Au(t_1)| &\leq \\ \int_0^1 |H(t_2, s) - H(t_1, s)| \varphi_q \left( \int_0^1 G(s, \tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau \right) ds &\leq \\ M^{q-1} \varphi_q \left( \int_0^1 G(\tau, \tau) d\tau \right) \int_0^1 |H(t_2, s) - H(t_1, s)| ds &< \varepsilon \end{aligned}$$

因此,  $A$  等度连续。

由 Arzela-Ascoli 定理可知,  $A: P \rightarrow P$  全连续。证毕。

现作如下记号:

$$\begin{aligned} L_1 &= (1-w)\Gamma(\beta+1) \left( \varphi_q \left( \int_0^1 G(\tau, \tau) d\tau \right) \right)^{-1} \\ L_2 &= \frac{(1-w)\Gamma(\beta)}{m} \left( \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} \varphi_q \left( \int_0^1 G(s, \tau) d\tau \right) ds \right)^{-1} \end{aligned}$$

显然, 当  $(H_0)$  成立时,  $L_1 > 0, L_2 > 0$ 。

**定理 1** 假设  $(H_0)$  成立, 且  $f: [0, 1] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  连续, 存在常数  $0 < a < b < d = c$ ,  $L_2 b < L_1 c$ , 满足:

- a.  $f(t, u) < \varphi_p(L_1 a)$ , 对  $(t, u) \in [0, 1] \times [0, a]$ ;
- b.  $f(t, u) > \varphi_p(L_2 b)$ , 对  $(t, u) \in [0, 1] \times [b, c]$ ;
- c.  $f(t, u) \leq \varphi_p(L_1 c)$ , 对  $(t, u) \in [0, 1] \times [0, c]$ 。

则边值问题 (1) 至少有 3 个正解  $u_1, u_2, u_3$ , 满足:

$$\max_{t \in [0, 1]} u_1(t) < a, \quad b < \min_{t \in [0, 1]} u_2(t) < \max_{t \in [0, 1]} u_2(t) \leq c$$

$$a < \max_{t \in [0, 1]} u_3(t) \leq c, \quad \min_{t \in [0, 1]} u_3(t) < b$$

**证明** 由引理 5 可知, 边值问题 (1) 等价于积分方程

$$u(t) = \int_0^1 H(t, s) \varphi_q \left( \int_0^1 G(s, \tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau \right) ds$$

显然,  $u = u(t)$  是边值问题 (1) 的正解当且仅当  $u$  满足算子方程  $u = Au(t)$ 。

首先, 证明  $A: P_c \rightarrow P_c$  全连续。对任意的  $u \in P_c$ , 由定理 1 的 c, 有

$$\begin{aligned} \|Au(t)\| &= \max_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^1 H(t, s) \varphi_q \left( \int_0^1 G(s, \tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau \right) ds \right| \leq \\ &\int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{(1-w)\Gamma(\beta)} \varphi_q \left( \int_0^1 G(\tau, \tau) \varphi_p(L_1 c) d\tau \right) ds = \\ &\frac{L_1 c}{(1-w)\Gamma(\beta)} \varphi_q \left( \int_0^1 G(\tau, \tau) d\tau \right) \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} ds = \\ &\frac{L_1 c \varphi_q \left( \int_0^1 G(\tau, \tau) d\tau \right)}{(1-w)\Gamma(\beta+1)} \leq c \end{aligned}$$

即  $Au \in P_c$ 。再根据引理 9, 可知  $A: P_c \rightarrow P_c$  是全连续的。

类似地, 由定理 1 的 a 可以证明, 当  $u \in P_a$  时,  $\|Au\| < a$ , 即引理 8 中的 b 成立。

选取  $u(t) = \frac{b+c}{2}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , 显然,  $u(t) \in P(\theta, b, c)$ , 且  $\theta(u) = \min_{t \in [0, 1]} |u(t)| = \frac{b+c}{2} > b$ , 所以,  $\{u \in P(\theta, b, c) : \theta(u) > b\} \neq \emptyset$ 。如果  $u \in P(\theta, b, c)$ , 那么, 对  $t \in [0, 1]$ ,  $b \leq u(t) \leq c$ 。根据定理 1 的 b, 有

$$\begin{aligned} \theta(Au) &= \min_{t \in [0, 1]} |Au(t)| = \\ \min_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^1 H(t, s) \varphi_q \left( \int_0^1 G(s, \tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau \right) ds \right| &> \\ \int_0^1 \frac{m(1-s)^{\beta-1}}{(1-w)\Gamma(\beta)} \varphi_q \left( \int_0^1 G(s, \tau) \varphi_p(L_2 b) d\tau \right) ds &= \\ \frac{mL_2 b}{(1-w)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} \varphi_q \left( \int_0^1 G(s, \tau) d\tau \right) ds &= b \end{aligned}$$

即  $\theta(Au) > b$ , 对所有的  $u \in P(\theta, b, c)$ 。选取  $d = c$ , 则引理 8 中的 a 成立。同理, 如果  $u \in P(\theta, b, c)$  且  $\|Au\| > d$ , 可以证得  $\theta(Au) > b$ , 那么, 引理 8 中的 c 也成立。

因此, 由引理 8 可知, 边值问题 (1) 至少存在 3 个正解  $u_1, u_2, u_3$ , 并且

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, 1]} u_1(t) < a, \quad b < \min_{t \in [0, 1]} u_2(t) < \max_{t \in [0, 1]} u_2(t) \leq c \\ a < \max_{t \in [0, 1]} u_3(t) \leq c, \quad \min_{t \in [0, 1]} u_3(t) < b \end{aligned}$$

证毕。

**定理 2** 假设  $(H_0)$  成立,  $f(t, 0) \neq 0$ ,  $t \in [0, 1]$ , 并且存在常数  $c > 0$ , 使得  $f$  满足

$$f(t, u) < f(t, v) < \varphi_p(L_1 c), \quad 0 \leq u < v \leq c, \quad t \in [0, 1]$$

则边值问题(1)有2个正解  $\mu^*, \omega^*$ , 满足  $0 \leq \|\mu^*\| < \|\omega^*\| \leq c$ 。迭代序列  $\mu_{k+1} = A\mu_k$ ,  $\omega_{k+1} = A\omega_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , 分别收敛于  $\mu^*, \omega^*$ , 其中,  $\mu_0(t) = 0$ ,  $\omega_0(t) = c$ ,  $t \in [0, 1]$ , 并且

$$\mu_0(t) < \mu_1(t) < \dots < \mu_k(t) < \dots < \mu^*(t) < \omega^*(t) < \dots < \omega_k(t) < \dots < \omega_1(t) < \omega_0(t)$$

**证明** 首先, 证明迭代序列  $\{\mu_k\}$  为递增序列且存在  $\mu^* \in P_c$  使  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k - \mu^*\| = 0$ ,  $\mu^*$  是边值问题(1)的1个正解。

取  $\mu_0(t) = 0$ , 显然,  $\mu_0 \in P_c$ 。根据定理1的证明过程, 可知  $A(P_c) \subseteq P_c$ , 则  $\mu_k \in A(P_c) \subseteq P_c$ 。又因  $A: P_c \rightarrow P_c$  全连续, 故  $\{\mu_k\}$  为列紧集。由  $\mu_1 = A\mu_0 \in P_c$ , 得到

$$c \geq \mu_1(t) = A\mu_0(t) > 0 = \mu_0(t), \quad t \in [0, 1]$$

根据假设条件,  $f(t, u)$  在  $u \in P_c$  上单调递增, 从而算子  $A$  为增算子, 那么,

$$\mu_2(t) = A\mu_1(t) > A\mu_0(t) = \mu_1(t), \quad t \in [0, 1]$$

依此类推, 有  $\mu_{k+1}(t) > \mu_k(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ 。

因此, 存在  $\mu^* \in P_c$ , 使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_k - \mu^*\| = 0$ 。由  $\mu_{k+1} = A\mu_k$  及算子  $A$  的全连续性, 有  $\mu^* = A\mu^*$ , 所以,  $\mu^*$  为边值问题(1)的1个正解。

现证明迭代序列  $\{\omega_k\}$  为递减序列且存在  $\omega^* \in P_c$  使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\omega_k - \omega^*\| = 0$ ,  $\omega^*$  是边值问题(1)的1个正解。

取  $\omega_0(t) = c$ , 显然,  $\omega_0 \in P_c$ 。因为,  $\omega_{k+1} = A\omega_k$ ,  $A(P_c) \subseteq P_c$ , 所以,  $\omega_k \in A(P_c) \subseteq P_c$ 。又因为  $A$  是全连续算子, 所以,  $\{\omega_k\}$  为列紧集。由  $\omega_1 = A\omega_0 \in P_c$ , 得到

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= \int_0^1 H(t, s) \varphi_q \left( \int_0^1 G(s, \tau) f(\tau, c) d\tau \right) ds < \\ &= \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{(1-w)\Gamma(\beta)} \varphi_q \left( \int_0^1 G(\tau, \tau) \varphi_p(L_1 c) d\tau \right) ds = \\ &= \frac{L_1 c}{(1-w)\Gamma(\beta)} \varphi_q \left( \int_0^1 G(\tau, \tau) d\tau \right) \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} ds = \\ &= \frac{L_1 c \varphi_q \left( \int_0^1 G(\tau, \tau) d\tau \right)}{(1-w)\Gamma(\beta+1)} = c = \omega_0(t) \end{aligned}$$

即  $\omega_1(t) < \omega_0(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ 。由  $f(t, u)$  在  $u \in P_c$  上单调递增, 从而有

$$\begin{aligned} \omega_2(t) &= A\omega_1(t) = \int_0^1 H(t, s) \varphi_q \left( \int_0^1 G(s, \tau) f(\tau, \omega_1(\tau)) d\tau \right) ds < \\ &= \int_0^1 H(t, s) \varphi_q \left( \int_0^1 G(s, \tau) f(\tau, \omega_0(\tau)) d\tau \right) ds = \\ &= A\omega_0(t) = \omega_1(t) \end{aligned}$$

依此类推, 有  $\omega_{k+1}(t) < \omega_k(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ 。

因此, 存在  $\omega^* \in P_c$ , 使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\omega_k - \omega^*\| = 0$ 。由  $\omega_{k+1} = A\omega_k$  及算子  $A$  的全连续性, 有  $\omega^* = A\omega^*$ , 所以,  $\omega^*$  为边值问题(1)的1个正解。

最后, 证明  $\mu_k(t) < \omega_k(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ 。

因为,  $\mu_0(t) < \omega_0(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , 则

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= A\mu_0(t) = \int_0^1 H(t, s) \varphi_q \left( \int_0^1 G(s, \tau) f(\tau, \mu_0(\tau)) d\tau \right) ds < \\ &= \int_0^1 H(t, s) \varphi_q \left( \int_0^1 G(s, \tau) f(\tau, \omega_0(\tau)) d\tau \right) ds = \\ &= A\omega_0(t) = \omega_1(t) \end{aligned}$$

类似地, 可以推出  $\mu_k(t) < \omega_k(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ 。证毕。

## 4 应用举例

现运用所得结论解决几个具体的混合型分数阶  $p$ -Laplace 算子方程边值问题。

**例1** 若取

$$B(s) = \begin{cases} 0, & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{1}{2}, & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

则有  $\int_0^1 u(s) dB(s) = \frac{1}{2} u\left(\frac{1}{2}\right)$ , 于是, Riemann-Stieltjes 积分边值问题(1)退化为如下混合分数阶微分方程边值问题:

$$\begin{cases} D_{0+}^{\frac{3}{2}} \left( \varphi_{\frac{3}{2}} \left( {}^c D_{0+}^{\frac{5}{2}} u(t) \right) \right) = f(t, u(t)), & t \in (0, 1) \\ u'(0) = u''(0) = 0, & u(1) = \frac{1}{2} u\left(\frac{1}{2}\right) \\ {}^c D_{0+}^{\frac{5}{2}} u(0) = {}^c D_{0+}^{\frac{5}{2}} u(1) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi_{\frac{3}{2}} \left( {}^c D_{0+}^{\frac{5}{2}} u(t) \right) &= \begin{cases} \frac{{}^c D_{0+}^{\frac{5}{2}} u(t)}{\sqrt{|{}^c D_{0+}^{\frac{5}{2}} u(t)|}}, & {}^c D_{0+}^{\frac{5}{2}} u(t) \neq 0 \\ 0, & {}^c D_{0+}^{\frac{5}{2}} u(t) = 0 \end{cases} \\ f(t, u) &= \begin{cases} \frac{1}{2} t^2 + 19u^3, & u \leq 1 \\ \frac{1}{2} t^2 + \sqrt{u} + 18, & u \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$\alpha = \frac{3}{2}$ ,  $\beta = \frac{5}{2}$ ,  $p = \frac{3}{2}$ 。容易算出,  $w = \frac{1}{2} < 1$ ,  $m = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{2}} \neq 0$ , 符合假设条件, 从而得到  $L_1 = 8.4628$ ,  $L_2 = 328.8962$ 。选取  $a = 0.1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 100$ , 则有  $L_2 b < L_1 c$ , 并且  $f(t, u)$  满足:

$$\mathbf{a.} \quad (t, u) \leq 0.519 < \varphi_{\frac{3}{2}}(L_1 a) = 0.9199, \quad (t, u) \in [0, 1] \times$$

[0, 0.1];

b.  $f(t, u) \geq 19 > \varphi_{\frac{3}{2}}(L_2 b) = 18.135\ 5$ ,  $(t, u) \in [0, 1] \times [1, 100]$ ;

c.  $f(t, u) \leq 28.5 \leq \varphi_{\frac{3}{2}}(L_1 c) = 29.090\ 9$ ,  $(t, u) \in [0, 1] \times [0, 100]$ .

因此, 运用定理 1, 边值问题(12)至少有 3 个正解  $u_1, u_2, u_3$ , 满足:

$$\max_{t \in [0, 1]} u_1(t) < 0.1, \quad 1 < \min_{t \in [0, 1]} u_2(t) < \max_{t \in [0, 1]} u_2(t) \leq 100$$

$$0.1 < \max_{t \in [0, 1]} u_3(t) \leq 100, \quad \min_{t \in [0, 1]} u_3(t) < 1$$

**例 2** 考虑混合分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} D_{0+}^{\frac{5}{4}} \left( \varphi_{\frac{3}{2}} \left( {}^c D_{0+}^{\frac{5}{2}} u(t) \right) \right) = e^t + \sqrt{u} + 4, & t \in (0, 1) \\ u'(0) = u''(0) = 0, & u(1) = \frac{2}{3} \int_0^1 s u(s) ds \\ {}^c D_{0+}^{\frac{5}{2}} u(0) = {}^c D_{0+}^{\frac{5}{2}} u(1) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

其中

$$\varphi_{\frac{3}{2}} \left( {}^c D_{0+}^{\frac{5}{2}} u(t) \right) = \begin{cases} \frac{{}^c D_{0+}^{\frac{5}{2}} u(t)}{\sqrt{|{}^c D_{0+}^{\frac{5}{2}} u(t)|}}, & {}^c D_{0+}^{\frac{5}{2}} u(t) \neq 0 \\ 0, & {}^c D_{0+}^{\frac{5}{2}} u(t) = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{5}{4}, \beta = \frac{5}{2}, p = \frac{3}{2}, B(s) = \frac{1}{3} s^2, \quad f(t, u) = e^t + \sqrt{u} + 4。$$

易得  $w = \frac{1}{3} < 1$  成立, 从而求得  $L_1 = 4.766\ 0$ 。取

$c = 50$ , 则  $f(t, u)$  满足  $f(t, 0) = e^t + 4 \neq 0$  且

$$f(t, u) \leq f(t, 50) \leq f(1, 50) = 13.789\ 4 < 15.437\ 0 = \varphi_{\frac{3}{2}}(L_1 c)$$

因此, 运用定理 2, 边值问题(13)至少有 2 个正解  $\mu^*, \omega^*$ , 且满足  $0 \leq \|\mu^*\| < \|\omega^*\| \leq 50$ 。

**参考文献:**

- [1] 白占兵. 分数阶微分方程边值问题理论及应用[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 2013.
- [2] PODLUBNY I. Fractional differential equations [M]. San Diego: Academic Press, 1999.
- [3] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and applications of fractional differential equations [M]. Amsterdam: Elsevier, 2006.
- [4] DIETHELM K. The analysis of fractional differential equations[M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 2010.
- [5] YANG L, SHEN C F, XIE D P. Multiple positive solutions for nonlinear boundary value problem of fractional order differential equation with the Riemann-Liouville derivative[J]. Advances in Difference Equations, 2014, 2014: 284.
- [6] 胡雨欣, 寇春海, 葛富东. Banach 空间中分数阶微分方程

解的存在性[J]. 东华大学学报(自然科学版), 2015, 41(6): 867–872.

- [7] GE F D, KOU C H. Stability analysis by Krasnoselskii's fixed point theorem for nonlinear fractional differential equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 257: 308–316.
- [8] BAI Z B, ZHANG S, SUN S J, et al. Monotone iterative method for fractional differential equations[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2016, 2016(6): 1–8.
- [9] LI Y F, YANG W G. Monotone iterative method for nonlinear fractional  $p$ -difference equations with integral boundary conditions[J]. Advances in Difference Equations, 2015, 2015: 294.
- [10] LIU X P, JIA M, GE W G. The method of lower and upper solutions for mixed fractional four-point boundary value problem with  $p$ -Laplacian operator[J]. Applied Mathematics Letters, 2017, 65: 56–62.
- [11] LU H L, HAN Z L, SUN S R, et al. Existence on positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations with  $p$ -Laplacian[J]. Advances in Difference Equations, 2013, 2013: 30.
- [12] ZHANG X G, LIU L S, WIWATANAPATAPHEE B, et al. The eigenvalue for a class of singular  $p$ -Laplacian fractional differential equations involving the Riemann-Stieltjes integral boundary condition[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 235: 412–422.
- [13] LIU X P, JIA M, GE W G. Multiple solutions of a  $p$ -Laplacian model involving a fractional derivative[J]. Advances in Difference Equations, 2013, 2013: 126.
- [14] 刘帅, 贾梅, 秦小娜. 带积分边值条件的分数阶微分方程解的存在性和唯一性[J]. 上海理工大学学报, 2014, 36(5): 409–415.
- [15] 李燕, 刘锡平, 李晓晨, 等. 具逐项分数阶导数的积分边值问题正解的存在性[J]. 上海理工大学学报, 2016, 38(6): 511–516.
- [16] DONG X Y, BAI Z B, ZHANG S Q. Positive solutions to boundary value problems of  $p$ -Laplacian with fractional derivative[J]. Boundary Value Problems, 2017, 2017: 5.
- [17] LIU Y, XIE D P, BAI C Z, et al. Multiple positive solutions for a coupled system of fractional multi-point BVP with  $p$ -Laplacian operator[J]. Advances in Difference Equations, 2017, 2017: 168.
- [18] APOSTOL T M. Mathematical analysis[M]. Reading, Massachusetts, USA: Addison-Wesley, 1957.