

一类奇异拟线性椭圆方程组正解的存在性

王雨婷, 贾 高

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 在有 $C^{1,\alpha}$ 边界的有界区域中, 研究了一类奇异拟线性椭圆方程组正解的存在性。对于这类方程组具有 3 个负指数即有奇异性的情形, 以往处理半线性椭圆方程组的 Morse 理论、上下解方法、极小极大方法等传统方法不可以直接使用, 因此, 对于这类拟线性椭圆方程组, 首先基于上下解理论在指数满足一定条件下构造方程组的上下解, 再根据所得上下解定义集合, 然后在对应的集合里验证定义的算子满足 Schauder 不动点定理的相关条件, 最后根据不动点定理获得这类奇异拟线性椭圆方程组的正解。

关键词: 拟线性椭圆方程; 奇异性; 上下解方法; 弱解

中图分类号: F 830 **文献标志码:** A

Positive Solutions for a Class of Quasilinear Singular Elliptic Systems

WANG Yuting, JIA Gao

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: In the bounded domain with $C^{1,\alpha}$ boundary, the existence of positive solutions for a class of quasilinear singular elliptic system was studied. For such system with three negative exponents, that is, a singular system, the traditional methods, such as the Morse theory, the theory of sub- and super-solutions and minimax methods, which are used usually to deal with semilinear elliptic systems in the past, can not be used directly. So, for this kind of quasilinear elliptic systems, sub- and super-solutions of the system were first constructed on the basis of the sub- and super-solution theory. Next, a set was defined according to the obtained sub- and super-solutions, and it was verified that in the corresponding set the defined operator satisfies the related conditions of the sufficient Schauder fixed point theorem. Then, the positive solutions of the quasilinear singular elliptic system were obtained according to the fixed point theorem.

Keywords: quasilinear elliptic system; singularity; sub- and super-solution method; weak solution

收稿日期: 2017-09-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11171220); 上海市一流学科 (系统科学) 建设项目 (XTKX2012)

第一作者: 王雨婷 (1993-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 偏微分方程. E-mail: 523308285@qq.com

通信作者: 贾 高 (1960-), 男, 教授. 研究方向: 非线性分析及其应用、微分算子的特征值理论.

E-mail: gaojia89@163.com

1 问题的提出

现代任一学科的发展都必须保证自身的精确化，而建立数学模型是精确化的重要手段之一。在这些数学模型中，会有许多非线性的问题，如 p -Laplacian 算子在研究化学反应、假塑性流体、种群动力学及天体物理学等问题时就常常被用到。这些问题的解决对于科学技术的发展产生很大的推动作用，同时对数学学科自身的发展也有很大影响。

近些年来很多学者开始研究拟线性椭圆方程及方程组的问题。拟线性椭圆型问题来自于拟正则映射理论和广义反应扩散理论，以及非牛顿湍流等问题。因为， $p \neq 2$ 时 p -Laplace 算子不再是线性算子，所以，关于 Laplace 算子的线性理论不能直接用于 p -Laplace 算子。对于拟线性椭圆方程

$$\begin{cases} -\Delta_p u = F(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

解的存在性问题，文献[1]研究了 $F(x,u) = f(x)|u|^{q-2}u + g(x)|u|^{s-2}u - |u|^{p-2}u$ ， $1 < q < p$ ， $s = p^*$ 时解的存在性。文献[2]对其他情况进行了研究。另外，含有 p -Laplace 算子的拟线性椭圆方程组也是当今研究热点之一。对于拟线性椭圆方程组

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^{\alpha_1} v^{\beta_1}, & x \in \Omega \\ -\Delta_q v = u^{\alpha_2} v^{\beta_2}, & x \in \Omega \\ u, v > 0, & x \in \Omega \\ u, v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

对正则情况(即所有指数都是正的)已经研究得很透彻了。如文献[3]研究了 $p = q$ 的情况，文献[4]利用上下解理论和 Schauder 不动点定理研究了 $p \neq q$ 时方程组解的存在性等。

关于方程组(1)的奇异情况是最近开始被研究的。一部分工作致力于研究半线性情况，即 $p = q = 2$ 。在这种情况下，方程组(1)可以看作是一类与椭圆方程组类似的 Gierer-Meinhardt 方程组，是一种重要的生物化学模型，此时可以直接用上下解方法和拓扑度理论研究其解的存在性，如文献[5]。另一部分工作则致力于研究拟线性的情况，即 $p \neq q$ ，文献[6-7]分别用单调性方法和上下解理论研究了 $\alpha_1, \beta_2 < 0$ 时方程组(1)解的存在性。而文献[8]研究了所有指数都是负数时方程组(1)解的存在性，这种情形与出现在天体物理学中的 Lane-Emden 方程有关，具有重要的应用背景。

现考虑奇异拟线性方程组

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^{-\alpha_1} v^{-\beta_1}, & x \in \Omega \\ -\Delta_q v = u^{-\alpha_2} v^{\beta_2}, & x \in \Omega \\ u, v > 0, & x \in \Omega \\ u, v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

正解的存在性。其中， Ω 是 $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$ 中有 $C^{1,\alpha}$ 边界的有界区域， $1 < p, q < N$ ， $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 > 0$ ， $\alpha_2 < q$ ， $\alpha_1 < 1$ 。本文的主要结果为定理 1。

定理 1 若 $1 < p, q < N$ ， $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 > 0$ ， $\alpha_1 < 1$ ， $\alpha_2 < q$ ，

a. 如果 $1 + \beta_2 < \alpha_2 < 2 - \frac{1}{q} + \left(1 - \frac{1}{q}\right)\beta_2$ 和 $0 < \alpha_1 + \beta_1 \frac{q - \alpha_2}{q - \beta_2 - 1} < 1$ ，则方程组(2)有唯一弱解 (u, v) ，且 $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ， $v \in W_0^{1,q}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ；

b. 如果 $0 < \alpha_2 < 1 + \beta_2$ 和 $0 < \beta_1 < 1 - \alpha_1$ ，则方程组(2)有唯一弱解 (u, v) ，且 $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ ， $v \in W_0^{1,q}(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ 。

2 预备知识

现在考虑边值问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

其中， $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是具有光滑边界的有界区域， $p > 1$ ， $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ ， p' 是 p 的共轭指数，即 $p' = \frac{p}{p-1}$ 。

引理 1^[9] 对 $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ ，则方程(3)只有一个弱解 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ，即对 $\forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ，有

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi - f \phi) dx = 0$$

引理 2^[9] 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一个有界区域，那么，

a. $\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ 在有界集上一致连续；

b. $(\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$ 是 Δ_p 的逆算子，且它是连续的；

c. 如果 $1 \leq s < \frac{pN}{N-p}$ ，则 $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$ 是紧的。

引理 3^[9] 设 $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ ， $u \neq 0$ ，满足

$$\begin{cases} -\Delta_p u \geq 0, & x \in \Omega \\ u \geq 0, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

则 $u > 0, x \in \Omega$ 。

引理 4^[10] 若 $K(x) = d(x)^{-k} L(d(x))$ ($0 < k < p, d(x) := \text{dist}(x, \partial\Omega)$)， $L(t)$ 是摄动函数， D 是区域 Ω 的直

径, $p > 1$, $-1 < q < p-1$, 那么, 对于

$$\begin{cases} -\Delta_p v = K(x)v^q, & x \in \Omega \\ v \geq 0, & x \in \Omega \\ v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4)$$

a. 如果 $k \in (0, 1+q)$, 则式(4)有唯一解 $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, 且满足 $v(x) \sim d(x)$;

b. 如果 $k = 1+q$, 则式(4)有唯一解 $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, 且满足

$$v(x) \sim d(x) \left(\int_{d(x)}^{2D} \frac{L(t)}{t} dt \right)^{\frac{1}{p-k}}$$

c. 如果 $k \in \left(1+q, 1+q + \frac{p-(1+q)}{p}\right)$, 则式(4)有唯一解 $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, 且满足

$$v(x) \sim d(x)^{\frac{p-k}{p-(1+q)}} (L(d(x)))^{\frac{1}{p-(1+q)}}$$

d. 如果 $k \in \left[1+q + \frac{p-(1+q)}{p}, p\right)$, 则式(4)有唯一解 $v \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega) \cap C_0(\bar{\Omega})$, 且满足

$$v(x) \sim d(x)^{\frac{p-k}{p-(1+q)}} (L(d(x)))^{\frac{1}{p-(1+q)}}$$

e. 如果 $k = p$ 且 $L(t)$ 满足 $\int_0^{2D} t^{-1} L(t)^{p-1} dt < +\infty$, 则式(4)有唯一解 $v \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega) \cap C_0(\bar{\Omega})$, 且满足

$$v(x) \sim \left(\int_0^{d(x)} t^{-1} L(t)^{p-1} dt \right)^{\frac{p-1}{p-(1+q)}}$$

$v(x) \sim d(x)$ 表示存在正常数 a, b , 使得 $a \leq \frac{v(x)}{d(x)} \leq b$. 而 d 中的 $W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega)$ 表示对任意 $\Omega_1 \subset \subset \Omega$, 有 $u \in W^{1,p}(\Omega_1)$, 且 u 在 Ω 上可测。

由于在式(4)中, $K(x) = d(x)^{-k} L(d(x))$ 且 $-1 < q < p-1$, 所以, 根据上下解方法可以证明式(4)的解存在, 且该解与 $d(x)$ 有关; 根据解与 $d(x)$ 之间的关系可以定义集合 (如对情形 a 定义 $\{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), v(x) \sim d(x), x \in \Omega\}$), 在这个集合中利用弱极大值原理可以证明式(4)的解具有唯一性。

引理 5^[11] 若 u 是 $-\Delta_p u = K(x)u^{-\delta}$ 的弱解, $0 \leq K(x) \leq cd(x)^{-\omega}$, $\omega \geq 0$,

a. 如果 $0 < \delta + \omega < 1$, 则 $u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$;

b. 如果 $1 \leq \delta + \omega < 2 - \frac{1-\delta}{p}$, 则 $u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$ 。

引理 6 (Schauder 不动点定理) 设 E 是 Banach 空间, D_1 是 E 中有界闭凸集, T 是 $D_1 \rightarrow D_1$ 的全连续算子, 则 T 在 D_1 中必具有不动点。

3 主要结果的证明

本文方程组(2)的解是弱意义下的, 即存在

$(u, v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ ($u > 0, v > 0$, a.e. $x \in \Omega$), 对任意的 $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ 均成立

$$\begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} u^{-\alpha_1} v^{-\beta_1} \varphi dx \\ \int_{\Omega} |\nabla v|^{q-2} \nabla v \nabla \psi dx = \int_{\Omega} u^{-\alpha_2} v^{\beta_2} \psi dx \end{cases}$$

如果 $(\bar{u}, \bar{v}), (\underline{u}, \underline{v}) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$, 对任意的 $(\varphi, \psi), (\omega_1, \omega_2) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$, $\varphi > 0, \psi > 0$, a.e. $x \in \Omega$, 满足

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |\nabla \bar{u}|^{p-2} \nabla \bar{u} \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} \bar{u}^{-\alpha_1} \bar{\omega}_2^{-\beta_1} \varphi dx + \\ & \int_{\Omega} |\nabla \bar{v}|^{q-2} \nabla \bar{v} \nabla \psi dx - \int_{\Omega} \bar{\omega}_1^{-\alpha_2} \bar{v}^{\beta_2} \psi dx \geq 0 \\ & \int_{\Omega} |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} \underline{u}^{-\alpha_1} \underline{\omega}_2^{-\beta_1} \varphi dx + \\ & \int_{\Omega} |\nabla \underline{v}|^{q-2} \nabla \underline{v} \nabla \psi dx - \int_{\Omega} \underline{\omega}_1^{-\alpha_2} \underline{v}^{\beta_2} \psi dx \leq 0 \end{aligned}$$

则称 $(\bar{u}, \bar{v})$ 是方程组(2)的上解, 称 $(\underline{u}, \underline{v})$ 是方程组(2)的下解。

现证明定理 1。分别对 2 种情况进行讨论。

情况 1 $1 + \beta_2 < \alpha_2 < 2 - \frac{1}{q} + \left(1 - \frac{1}{q}\right)\beta_2$, $0 < \alpha_1 + \beta_1 \frac{q-\alpha_2}{q-\beta_2-1} < 1$ 。
对方程

$$\begin{cases} -\Delta_q v = d(x)^{-\alpha_2} v^{\beta_2}, & x \in \Omega \\ v \geq 0, & x \in \Omega \\ v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (5)$$

由引理 4 可得其上、下解满足

$$\bar{v} \geq c'_2 d(x)^{\frac{q-\alpha_2}{q-\beta_2-1}}, \quad \underline{v} \leq c'_1 d(x)^{\frac{q-\alpha_2}{q-\beta_2-1}} \quad (6)$$

进一步, 对方程

$$\begin{cases} -\Delta_p u = d(x)^{-\beta_1} \cdot \frac{q-\alpha_2}{q-\beta_2-1} u^{-\alpha_1}, & x \in \Omega \\ u \geq 0, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (7)$$

利用引理 4 可得式(7)的上、下解满足

$$\bar{u} \geq c''_2 d(x), \quad \underline{u} \leq c''_1 d(x) \quad (8)$$

取

$$c_1 = \max \{c'_1, c''_1\}, \quad c_2 = \min \{c'_2, c''_2\} \quad (9)$$

现定义集合 $W = W_1 \times W_2$, $W_1 := \{u \in C(\bar{\Omega}) : k_1 d(x) \leq u(x) \leq k_2 d(x), x \in \Omega\}$, $W_2 := \{v \in C(\bar{\Omega}) : l_1 d(x)^{\frac{q-\alpha_2}{q-\beta_2-1}} \leq v(x) \leq l_2 d(x)^{\frac{q-\alpha_2}{q-\beta_2-1}}, x \in \Omega\}$, 其中, $l_1, l_2, k_1, k_2 > 0$, 满足

$$\begin{aligned} & l_1 k_2^{\frac{\alpha_2}{q-\beta_2-1}} \leq c_2, \quad l_2 k_1^{\frac{\alpha_2}{q-\beta_2-1}} \geq c_1, \\ & l_2^{\frac{\beta_1}{\alpha_1+p-1}} k_1 \leq c_2, \quad l_1^{\frac{\beta_1}{\alpha_1+p-1}} k_2 \geq c_1 \end{aligned} \quad (10)$$

对给定的 $v \in W_2$, 由引理 4 可得问题

$$\begin{cases} -\Delta_p U = v^{-\beta_1} U^{-\alpha_1}, & x \in \Omega \\ U \geq 0, & x \in \Omega \\ U = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (11)$$

有唯一解，将其记为 $T_1 v$ 。又因为 $0 < \alpha_1 + \beta_1 \frac{q-\alpha_2}{q-\beta_2-1} < 1$ ，利用引理 5 的 a 可得 $T_1 v \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ 。

同样，对给定的 $u \in W_1$ ，由引理 4 可得问题

$$\begin{cases} -\Delta_q V = u^{-\alpha_2} V^{\beta_2}, & x \in \Omega \\ V \geq 0, & x \in \Omega \\ V = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (12)$$

有唯一解，将其记为 $T_2 u$ 。又由于 $1 + \beta_2 < \alpha_2 < 2 - \frac{1}{q} + \left(1 - \frac{1}{q}\right)\beta_2$ ，根据引理 5 的 b 可知 $T_2 u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ 。

定义算子 $T: W_1 \times W_2 \rightarrow C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$ 如下：

$$T(u, v) = (T_1 v, T_2 u)$$

其中， $(u, v) \in W$ 。

现证明算子 T 满足 Schauder 不动点定理的条件，即找到方程组 (2) 的弱解。

a. 证明 $T(W) \subseteq W$ 。

设 $(u, v) \in W$ ，由 W_2 的定义，有 $v \leq l_2 d(x) \frac{q-\alpha_2}{q-\beta_2-1}$ ，利用 p -Laplace 算子的单调性，可以得到 $T_1 v$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta_p(T_1 v) \geq \left(l_2 d(x) \frac{q-\alpha_2}{q-\beta_2-1}\right)^{-\beta_1} (T_1 v)^{-\alpha_1}, & x \in \Omega \\ T_1 v = 0, & x \in \Omega \end{cases} \quad (13)$$

设 $\bar{u} = c T_1 v$ (c 待定) 是式 (7) 的一个上解，从而对任意的 $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ， $\varphi \geq 0$ ，有

$$\int_{\Omega} |\nabla(c T_1 v)|^{p-2} \nabla(c T_1 v) \nabla \varphi \, dx \geq \int_{\Omega} d(x)^{-\beta_1 \frac{q-\alpha_2}{q-\beta_2-1}} (c T_1 v)^{-\alpha_1} \, dx \quad (14)$$

通过简单的计算，由式 (13) 和式 (14) 可得 $c \geq l_2^{\frac{\beta_1}{\alpha_1+p-1}}$ ，

所以，可取 $\bar{u} = l_2^{\frac{\beta_1}{\alpha_1+p-1}} T_1 v$ 。再由式 (8) 和式 (9) 可得

$$l_2^{\frac{\beta_1}{\alpha_1+p-1}} T_1 v \geq c_2 d(x) \quad (15)$$

从而由式 (10) 可得

$$T_1 v \geq l_2^{\frac{\beta_1}{\alpha_1+p-1}} c_2 d(x) \geq k_1 d(x) \quad (16)$$

同样，因为 $v \geq l_1 d(x) \frac{q-\alpha_2}{q-\beta_2-1}$ ，故 $T_1 v$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta_p(T_1 v) \leq \left(l_1 d(x) \frac{q-\alpha_2}{q-\beta_2-1}\right)^{-\beta_1} (T_1 v)^{-\alpha_1}, & x \in \Omega \\ T_1 v = 0, & x \in \Omega \end{cases} \quad (17)$$

通过计算可以选择 $\underline{u} = l_1^{\frac{\beta_1}{\alpha_1+p-1}} T_1 v$ 是式 (7) 的一个下解。由式 (8) 和式 (9) 可得

$$l_1^{\frac{\beta_1}{\alpha_1+p-1}} T_1 v \leq c_1 d(x) \quad (18)$$

再根据式 (10)，有

$$T_1 v \leq l_1^{\frac{\beta_1}{\alpha_1+p-1}} c_1 d(x) \leq k_2 d(x) \quad (19)$$

从而得到 $T_1 v \in W_1$ 。

由 W_1 的定义，有 $u(x) \leq k_2 d(x)$ ，从而 $T_2 u$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta_q(T_2 u) \geq (k_2 d(x))^{-\alpha_2} (T_2 u)^{\beta_2}, & x \in \Omega \\ T_2 u = 0, & x \in \Omega \end{cases} \quad (20)$$

通过简单的计算取 $\bar{v} = k_2^{\frac{\alpha_2}{1-q+\beta_2}} T_2 u$ 是式 (5) 的一个上解。再由式 (6) 和式 (9) 可得

$$k_2^{\frac{\alpha_2}{1-q+\beta_2}} T_2 u \geq c_2 d(x) \frac{q-\alpha_2}{q-\beta_2-1} \quad (21)$$

由式 (10) 就可以得到

$$T_2 u \geq k_2^{\frac{\alpha_2}{1-q+\beta_2}} c_2 d(x) \frac{q-\alpha_2}{q-\beta_2-1} \geq l_1 d(x) \frac{q-\alpha_2}{q-\beta_2-1} \quad (22)$$

再由 W_1 定义可知 $u(x) \geq k_1 d(x)$ ，故 $T_2 u$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta_q(T_2 u) \leq (k_1 d(x))^{-\alpha_2} (T_2 u)^{\beta_2}, & x \in \Omega \\ T_2 u = 0, & x \in \Omega \end{cases} \quad (23)$$

从而通过计算可选取 $\underline{v} = k_1^{\frac{\alpha_2}{1-q+\beta_2}} T_2 u$ 作为式 (5) 的一个下解。再根据式 (6)，(9)，(10) 可得

$$T_2 u \leq k_1^{\frac{\alpha_2}{1-q+\beta_2}} c_1 d(x) \leq l_2 d(x) \frac{q-\alpha_2}{q-\beta_2-1} \quad (24)$$

所以，由式 (16)，(19)，(22)，(24) 可得 $(T_1 v, T_2 u) \in W$ ，即证明了 $T(W) \subseteq W$ 。

b. 证明 T 是全连续算子。

由式 (11) 可知 $T_1 v \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ ，而由式 (12) 可得 $T_2 u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ 。因为， $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ ， $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ ，所以， T_1, T_2 是紧算子，故 T 是紧算子。

现取 $\{(u_n, v_n)\} \subseteq W$ ，且当 $n \rightarrow \infty$ 时，在 $(w_0^{1,p} \cap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})) \times (w_0^{1,q} \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}))$ 中， (u_n, v_n) 强收敛到 (u, v) 。因为， T 是紧算子，所以，存在收敛子列，仍记为 $\{(T_1 v_n, T_2 u_n)\}$ 。从而存在 $(T_1 V, T_2 U) \in T(W)$ ，使得当 $n \rightarrow \infty$ 时， $(T_1 v_n, T_2 u_n) \rightarrow (T_1 V, T_2 U)$ 。

进一步，因为， $T_1 v_n$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta_p(T_1 v_n) = v^{-\beta_1} (T_1 v_n)^{-\alpha_1}, & x \in \Omega \\ T_1 v_n \geq 0, & x \in \Omega \\ T_1 v_n = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (25)$$

通过取极限可得

$$\begin{cases} -\Delta_p(T_1 V) = v^{-\beta_1} (T_1 V)^{-\alpha_1}, & x \in \Omega \\ T_1 V \geq 0, & x \in \Omega \\ T_1 V = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (26)$$

因为，式 (11) 的解是唯一的，所以，有 $T_1 v = T_1 V$ 。

同理，由式 (12) 解的唯一性也可以得到 $T_2 u = T_2 U$ 。因此，对于 $\{(u_n, v_n)\} \subseteq W$ 且 $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v) (n \rightarrow \infty)$

∞), 有 $(T_1 v_n, T_2 u_n) \rightarrow (T_1 v, T_2 u) (n \rightarrow \infty)$, 从而证明了算子 T 的连续性。

综上 a 和 b, 由引理 6 可得, 存在 $(u, v) \in W$, 使得 $T(u, v) = (u, v)$ 。因此, 方程组 (2) 有正解。

情况 2 $0 < \alpha_2 < 1 + \beta_2$, $0 < \beta_1 < 1 - \alpha_1$ 。

对方程

$$\begin{cases} -\Delta_q v = d(x)^{-\alpha_2} v^{\beta_2}, & x \in \Omega \\ v \geq 0, & x \in \Omega \\ v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (27)$$

借助引理 4 可得式 (27) 的上、下解满足

$$\bar{v} \geq c_2^* d(x), \quad \underline{v} \leq c_1^* d(x) \quad (28)$$

同样, 对方程

$$\begin{cases} -\Delta_p u = d(x)^{-\beta_1} u^{-\alpha_1}, & x \in \Omega \\ u \geq 0, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (29)$$

再利用引理 4 可以得到式 (29) 的上、下解满足

$$\bar{u} \geq c_2^{**} d(x), \quad \underline{u} \leq c_1^{**} d(x) \quad (30)$$

现选取

$$\hat{c}_1 = \max \{c_1^*, c_1^{**}\}, \quad \hat{c}_2 = \min \{c_2^*, c_2^{**}\} \quad (31)$$

然后定义集合 $O = O_1 \times O_2$, $O_1 := \{u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) : \hat{k}_1 d(x) \leq u(x) \leq \hat{k}_2 d(x)\}$, $O_2 := \{v \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) : \hat{l}_1 d(x) \leq v(x) \leq \hat{l}_2 d(x), x \in \Omega\}$, 其中, $\hat{l}_1, \hat{l}_2, \hat{k}_1, \hat{k}_2 > 0$, 满足

$$\begin{aligned} \hat{k}_2 \hat{l}_1^{\frac{\beta_1}{\alpha_1+p-1}} &\geq \hat{c}_1, \quad \hat{k}_1 \hat{l}_2^{\frac{\beta_1}{\alpha_1+p-1}} \leq \hat{c}_2, \\ \hat{k}_2^{\frac{\alpha_2}{q-\beta_2-1}} \hat{l}_1 &\leq \hat{c}_2, \quad \hat{k}_1^{\frac{\alpha_2}{q-\beta_2-1}} \hat{l}_2 \geq \hat{c}_1 \end{aligned} \quad (32)$$

对给定的 $v \in O_2$, 由引理 4 可知边值问题

$$\begin{cases} -\Delta_p U = v^{-\beta_1} U^{-\alpha_1}, & x \in \Omega \\ U \geq 0, & x \in \Omega \\ U = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (33)$$

有唯一解, 将其记为 $\tilde{T}_1 v$ 。同样, 对给定的 $u \in O_1$, 由引理 4 可知边值问题

$$\begin{cases} -\Delta_q V = u^{-\alpha_2} V^{\beta_2}, & x \in \Omega \\ V \geq 0, & x \in \Omega \\ V = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (34)$$

有唯一解, 将其记为 $\tilde{T}_2 u$ 。因为, $0 < \alpha_2 < 1 + \beta_2$, $0 < \beta_1 < 1 - \alpha_1$, 根据引理 5 的 a 可得 $\tilde{T}_1 v, \tilde{T}_2 u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ 。

定义算子 $\tilde{T}: O \rightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \times C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ 如下:

$$\tilde{T}(u, v) = (\tilde{T}_1 v, \tilde{T}_2 u)$$

其中, $(u, v) \in O$ 。

现借助 Schauder 不动点定理证明对于情况

2 方程组 (2) 存在正解。首先要证明 $\tilde{T}(O) \subseteq \tilde{T}(O)$, 然后再证明 $\tilde{T}$ 是全连续算子。

a. 证明 $\tilde{T}(O) \subseteq O$ 。

设 $(u, v) \in O$, 由 O_2 的定义, 有 $v \leq \hat{l}_2 d(x)$, 所以, $\tilde{T}_1 v$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta_p(\tilde{T}_1 v) \geq (\hat{l}_2 d(x))^{-\beta_1} (\tilde{T}_1 v)^{-\alpha_1}, & x \in \Omega \\ \tilde{T}_1 v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (35)$$

通过简单的计算, 选取 $\bar{u} = \hat{l}_2^{-\frac{\beta_1}{1-\alpha_1-p}} \tilde{T}_1 v$ 。再由式 (30) 和式 (31) 可知

$$\hat{l}_2^{-\frac{\beta_1}{1-\alpha_1-p}} \tilde{T}_1 v \geq \hat{c}_2 d(x) \quad (36)$$

在式 (32) 中, 有 $\hat{k}_1 \hat{l}_2^{\frac{\beta_1}{\alpha_1+p-1}} \leq \hat{c}_2$, 所以, 有

$$\tilde{T}_1 v \geq \hat{k}_1 d(x) \quad (37)$$

又因为 $v \geq \hat{l}_1 d(x)$, 通过 $\underline{u}$ 的选取, 由式 (30), (31), (32) 同样可得

$$\tilde{T}_1 v \leq \hat{k}_2 d(x) \quad (38)$$

同理, 可以证明 $\hat{l}_1 d(x) \leq T_2 u \leq \hat{l}_2 d(x)$ 。再由式 (37) 和式 (38) 可得 $(\tilde{T}_1 v, \tilde{T}_2 u) \in O$, 故证明了 $\tilde{T}(O) \subseteq O$ 。

b. 证明 $\tilde{T}$ 是全连续算子。其证明过程与情况 1 类似。综上 a 和 b, 由引理 6 可得, 存在 $(u, v) \in O$, 使得 $\tilde{T}(u, v) = (u, v)$ 。从而对于此情形方程组 (2) 也有解, 即定理 1 得证。

参考文献:

- [1] PRASHANTH S, SREENADH K. Multiplicity results in a ball for p -Laplace equation with positive nonlinearity[J]. Advances in Differential Equations, 2002, 7(7): 877–896.
- [2] AZORERO J P G, ALONSO I P, MANFREDI J J. Sobolev versus Hölder local minimizers and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations[J]. Communications in Contemporary Mathematics, 2000, 2(3): 385–404.
- [3] KIM E H. Singular Gierer-Meinhardt systems of elliptic boundary value problems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 308(1): 1–10.
- [4] CLÉMENT P, FLECKINGER J, MITIDIERI E, et al. Existence of positive solutions for a nonvariational quasilinear elliptic system[J]. Journal of Differential Equations, 2000, 166(2): 455–477.
- [5] HERNÁNDEZ J, MANCEBO F J, VEGA J M. Positive solutions for singular semilinear elliptic systems[J]. Advances in Differential Equations, 2008, 13(9/10): 857–880.

(下转第 322 页)

efficiency and ultra-simplified hybrid white organic light-emitting diodes exploiting double multifunctional blue emitting layers[J]. *Light: Science & Application*, 2016, 5: e16137.

[8] CHEN C, LIU Y F, CHEN Z, et al. High efficiency warm white phosphorescent organic light emitting devices based on blue light emission from a bipolar mixed-host[J]. *Organic Electronics*, 2017, 45: 273–278.

[9] CHEN P, CHEN B Y, ZUO L M, et al. High-efficiency and superior color-stability white phosphorescent organic light-emitting diodes based on double mixed-host emission Layer[J]. *Organic Electronics*, 2016, 31: 136–141.

[10] DENG L L, BAO Y Y, ZHANG Y N, et al. Enhanced performances for top-emitting white organic light-emitting diodes by utilizing green phosphor as energy transfer medium[J]. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2016, 49(25): 255103.

[11] YOO S I, YOON J A, KIM N H, et al. Efficiency enhancement of blue phosphorescent organic light-emitting diodes using mixed electron transport layer[J]. *Optical Materials*, 2015, 39: 21–25.

[12] JOU J H, KUMAR S, AGRAWAL A, et al. Approaches for fabricating high efficiency organic light emitting diodes[J]. *Journal of Materials Chemistry C*, 2015, 3(13): 2974–3002.

[13] WANG J, LIU J, HUANG S, et al. High efficiency green phosphorescent organic light-emitting diodes with a low roll-off at high brightness[J]. *Organic Electronics*, 2013, 14(11): 2854–2858.

(编辑: 石 瑛)



(上接第 311 页)

[6] GIACOMONI J, HERNÁNDEZ J, MOUSSAOUI A. Quasilinear and singular systems: the cooperative case[J]. *Contemporary Mathematics*, 2011, 540: 79–94.

[7] GIACOMONI J, HERNÁNDEZ J, SAUVY P. Quasilinear and singular elliptic systems[J]. *Advances in Nonlinear Analysis*, 2013, 2(1): 1–41.

[8] GHERGU M. Lane-Emden systems with negative exponents[J]. *Journal of Functional Analysis*, 2010, 258(10): 3295–3318.

[9] ALVES C O, CORRÊA F J S A. On the existence of positive solution for a class of singular systems involving quasilinear operators[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, 185(1): 727–736.

[10] GIACOMONI J, MAAGLI H, SAUVY P. Existence of compact support solutions for a quasilinear and singular problem[J]. *Differential Integral Equations*, 2012, 25(7/8): 629–659.

[11] GIACOMONI J, SCHINDLER I, TAKÁČ P. Singular quasilinear elliptic systems and Hölder regularity[J]. *Advances in Differential Equations*, 2015, 20(3/4): 259–298.

(编辑: 石 瑛)