

块结构 r -循环矩阵的性质及其算法研究

史雨梅, 秦 梅

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 提出了一种新的块循环矩阵, 称之为块首尾差 r -循环矩阵(简记为 $bFLDCM_r$)。首先, 验证了其线性运算结果和矩阵乘积仍是 $bFLDCM_r$; 其次, 给出了 $bFLDCM_r$ 的判别法和非奇异性判定的充要条件, 并讨论了 $bFLDCM_r$ 的对角化; 最后, 利用 Sherman-Morrison-Woodbury 公式, 给出了三对角块 r -循环线性系统求解的直接算法。

关键词: 块首尾差 r -循环矩阵; 判别法; 对角化; 直接算法

中图分类号: O 151.2

文献标志码: A

Properties of r -Circulant Matrices of Block Structure and Their Algorithm Research

SHI Yumei, QIN Mei

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: A new type of matrices which is called the first and the last difference r -block circulant matrix($bFLDCM_r$) was presented. The linear operation and the matrix product were verified to $bFLDCM_r$. Two discriminance, a sufficient and necessary condition for determining the nonsingularity and the diagonalization of $bFLDCM_r$ were discussed. Finally, by using Sherman-Morrison-Woodbury formula, the direct algorithm for solving r -circulant tridiagonal block systems of linear equations was provided.

Keywords: $bFLDCM_r$; discriminance; diagonalization; direct algorithm

循环矩阵的概念于 1885 年由 Muir S.T. 首次提出, 1950 年之前该方面未引起数学研究者的足够重视, 直到 1950 年之后, 人们才对其行列式、逆等性质进行研究。近年来, 循环矩阵以其良好的性质和特殊的结构, 被广泛运用于科技工程及应用数学等领域, 如石油勘测、信号处理、数字图

像处理、计算机时序分析、优化设计等方向。循环矩阵理论已成为矩阵论的热门研究方向^[1-3], 并获得了飞速的发展。

由于特殊循环矩阵的性质和结构相对于循环矩阵更为良好, 故引起我们的关注, 并对其进行推广和研究, 例如其行列式、非奇异性、对角

收稿日期: 2017-12-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11601332); 沪江基金资助项目(B14005)

第一作者: 史雨梅(1990-), 女, 硕士研究生。研究方向: 计算数学。E-mail: 15800923282@163.com

通信作者: 秦 梅(1975-), 女, 讲师。研究方向: 计算数学。E-mail: jisuanusst@126.com

化、谱分解、高次幂的表达式、逆矩阵及广义逆的各种算法等。特殊循环矩阵在研究中所取得的成果对相关领域的发展将起到至关重要的作用。

随着对循环矩阵研究的深入, 新的循环矩阵不断被提出^[4-6], 例如 r -循环矩阵、首尾差 r -循环矩阵、块循环矩阵等。本文在此基础上, 给出了块首尾差 r -循环矩阵的概念, 研究了其线性运

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & A_{n-2} & A_{n-1} \\ rA_{n-1} & A_0 - A_{n-1} & A_1 & \cdots & A_{n-3} & A_{n-2} \\ rA_{n-2} & rA_{n-1} - A_{n-2} & A_0 - A_{n-1} & \cdots & A_{n-4} & A_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ rA_2 & rA_3 - A_2 & rA_4 - A_3 & \cdots & A_0 - A_{n-1} & A_1 \\ rA_1 & rA_2 - A_1 & rA_3 - A_2 & \cdots & rA_{n-1} - A_{n-2} & A_0 - A_{n-1} \end{pmatrix}$$

则称矩阵 A 为块首尾差 r -循环矩阵 ($bFLDCM_r$), 可记作 $A = bFLDC(A_0, A_1, \cdots, A_{n-1})_r$ 。

定义 2^[7] 若矩阵 A 和矩阵 B 分别是 $m \times n$ 和 $p \times q$ 阶的矩阵, 则 Kronecker 积 $A \otimes B$ 为一个 $mp \times nq$ 的矩阵, 即

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

定义 3^[8] 设矩阵 $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n} (r > 0)$, 若矩阵 A 的奇异值记作 $\sigma_i (i = 1, 2, \cdots, r)$, 则 A 的 Schatten p -范数为

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} \sigma_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

引理 1^[9] 设 $A \in P_p$, 且 $A = (A_{ij})$, 则有

$$\|A\|_p^2 \leq \sum_{i,j} \|A_{ij}\|_p^2, \quad 2 \leq p < \infty$$

其中 P_p 为定义了 Schatten p -范数的算子空间。

引理 2^[10] 若分块多项式矩阵 $\begin{pmatrix} f(x) & I_n & 0 \\ g(x) & 0 & I_n \end{pmatrix}$ 进行一系列的初等行变换后化为 $\begin{pmatrix} d(x) & u(x) & v(x) \\ 0 & s(x) & t(x) \end{pmatrix}$

则 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大右公因式, 且 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$ 。

2 块首尾差 r -循环矩阵的性质

为了研究方便, 称如下形式的矩阵

算、矩阵乘积、非奇异性、对角化等性质, 并给出了三对角块 r -循环线性系统求解的直接算法。

1 预备知识

定义 1 设矩阵 $A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}$ 均为复数域上的 m 阶矩阵, 若 $n \times m$ 阶矩阵 A 有下列形式

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & I_m & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I_m \\ rI_m & -I_m & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

为基本块首尾差 r -循环矩阵。

显然, 它的特征多项式为

$$G(x) = x^n I_m + x I_m - r I_m$$

且

$$\Phi^0 = I_{nm}, \quad \Phi^n = r I_{nm} - \Phi$$

其中 I_{nm} 是主对角元为 I_m 的 n 阶块对角矩阵。特别地, 当 $m = 1$ 时, Φ 就退化为基本首尾差 r -循环矩阵, 简记为 A 。

定理 1 矩阵 A 是块首尾差 r -循环矩阵, 当且仅当矩阵 $A = \sum_{i=0}^{n-1} (I_n \otimes A_i) \Phi^i = F(\Phi)$ 。

下记 $F(\Phi)$ 为块首尾差 r -循环矩阵的表示多项式。

定理 2 矩阵 A 是块首尾差 r -循环矩阵当且仅当 $A\Phi = \Phi A$ 。

证明: 必要性显然。

充分性 设 $A = (A_{ij})_{n \times n}$, 其中 $A_{ij} (i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, n)$ 为 m 阶矩阵。

由 $A\Phi = \Phi A$ 知

$$\begin{aligned} A_{1,i+1} &= rA_{in}, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1 \\ A_{i+1,2} &= A_{i1} - A_{in}, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1 \\ A_{i+1,j+1} &= A_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1; \quad j = 2, 3, \cdots, n-1 \end{aligned}$$

则可得

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1,n-1} & A_{1n} \\ rA_{1n} & A_{11} - A_{1n} & A_{12} & \cdots & A_{1,n-2} & A_{1,n-1} \\ rA_{1,n-1} & rA_{1n} - A_{1,n-1} & A_{11} - A_{1n} & \cdots & A_{1,n-3} & A_{1,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ rA_{13} & rA_{14} - A_{13} & rA_{15} - A_{14} & \cdots & A_{11} - A_{1n} & A_{12} \\ rA_{12} & rA_{13} - A_{12} & rA_{14} - A_{13} & \cdots & rA_{1n} - A_{1,n-1} & A_{11} - A_{1n} \end{pmatrix}$$

因此矩阵 A 是块首尾差 r -循环矩阵。

推论 1 如果矩阵 A, B 为同类型的块首尾差 r -循环矩阵, 则 $A + B, A - B$ 仍为同类型的块首尾差 r -循环矩阵。

定理 3 如果矩阵 A, B 为同类型块首尾差 r -循环矩阵, 则它们的乘积仍为该类型块首尾差 r -循环矩阵。特别地, 若 A, B 是同类型二重块首尾差 r -循环矩阵, 则有 $AB = BA$ 。

证明: 因为矩阵 A 和 B 都是块首尾差 r -循环矩阵, 由定理 2 可得

$$A\Phi = \Phi A, B\Phi = \Phi B$$

因此

$$AB\Phi = A\Phi B = \Phi AB \\ BA\Phi = B\Phi A = \Phi BA$$

所以 AB 和 BA 都是块首尾差 r -循环矩阵。

由定理 1 显然可得 $AB = BA$ 。

定理 4 如果矩阵 A 为块首尾差 r -循环矩阵, 则矩阵 A 非奇异当且仅当矩阵多项式 $F(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (I_n \otimes A_i) x^i$ 和 $G(x) = x^n I_m + x I_m - r I_m$ 的最大右公因式为 I_m 。

证明: 必要性 令 $H(x)$ 为矩阵多项式 $F(x), G(x)$ 的最大右公因式, 则存在矩阵多项式 $U_1(x), V_1(x), Q(x)$ 使得

$$U_1(x)F(x) + V_1(x)G(x) = H(x) \\ F(x) = Q(x)H(x)$$

令 $x = \Phi$, 则 $F(\Phi) = Q(\Phi)H(\Phi)$ 。由 $A = F(\Phi)$ 非奇异可知 $H(\Phi)$ 非奇异, 故存在矩阵多项式 $H_1(x)$ 使得 $H_1(\Phi)H(\Phi) = I_{nm}$, 那么 $F_1(x)U_1(x)F(x) + H_1(x)V_1(x)G(x) = H_1(x)H(x) = I_m$ 所以 I_m 为矩阵多项式 $F(x)$ 和 $G(x)$ 的最大右公因式。

充分性 若 I_m 为矩阵多项式 $F(x)$ 和 $G(x)$ 最大右公因式, 则存在矩阵多项式 $U(x), V(x)$ 使

$$U(x)F(x) + V(x)G(x) = I_m$$

令 $x = \Phi$, 则

$$U(\Phi)F(\Phi) + V(\Phi)G(\Phi) = I_{nm} \\ \text{又 } F(\Phi) = A, G(\Phi) = 0, \text{ 则} \\ U(\Phi)A = I_{nm}$$

故矩阵 A 是非奇异的。

3 块首尾差 r -循环矩阵的对角化

由矩阵 A, Φ 及 Kronecker 积的定义知

$$A \otimes I_m = \Phi$$

且

$$\Phi^k = (A \otimes I_m)^k = A^k \otimes I_m$$

其中 $A^k = V_\Delta \text{diag}(\omega_0^k, \omega_1^k, \dots, \omega_{n-1}^k) V_\Delta^{-1}$, 而

$$V_\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_{n-2} & \omega_{n-1} \\ \omega_0^2 & \omega_1^2 & \omega_2^2 & \cdots & \omega_{n-2}^2 & \omega_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \omega_0^{n-2} & \omega_1^{n-2} & \omega_2^{n-2} & \cdots & \omega_{n-2}^{n-2} & \omega_{n-1}^{n-2} \\ \omega_0^{n-1} & \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \cdots & \omega_{n-2}^{n-1} & \omega_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

且 $\omega_i (i = 0, 1, \dots, n-1)$ 为基本首尾差 r -循环矩阵 A 的 n 个不同特征值。

定理 5 若矩阵 Φ 为基本块首尾差 r -循环矩阵, 则矩阵 Φ 可对角化且 $V_\Phi^{-1} \Phi V_\Phi = \text{diag}(\omega_0 I_m, \omega_1 I_m, \dots, \omega_{n-1} I_m)$, 其中 $V_\Phi = V_\Delta \otimes I_m$ 。

证明: 由上述讨论可得

$$\Phi = A \otimes I_m = (V_\Delta \text{diag}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}) V_\Delta^{-1}) \otimes I_m$$

由 Kronecker 积性质可知

$$(V_\Delta \otimes I_m)(\text{diag}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}) \otimes I_m) (V_\Delta^{-1} \otimes I_m) = \\ V_\Phi \text{diag}(\omega_0 I_m, \omega_1 I_m, \dots, \omega_{n-1} I_m) V_\Phi^{-1}$$

即

$$\Phi = V_\Phi \text{diag}(\omega_0 I_m, \omega_1 I_m, \dots, \omega_{n-1} I_m) V_\Phi^{-1}$$

所以

$$V_\Phi^{-1} \Phi V_\Phi = \text{diag}(\omega_0 I_m, \omega_1 I_m, \dots, \omega_{n-1} I_m)$$

定理 6 若矩阵 A 为非奇异块首尾差 r -循环矩阵, 则矩阵 A 可对角化且 $V_\Phi^{-1} A V_\Phi = \text{diag}(F(\omega_0), F(\omega_1), \dots, F(\omega_{n-1}))$, 其中 $F(x) = \sum_{i=0}^{n-1} A_i x^i, V_\Phi = V_\Delta \otimes I_m$ 。

证明: 已知矩阵 A 为块首尾差 r -循环矩阵, 由

定理 1 得

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} (I_n \otimes A_i) \Phi^i$$

所以

$$V_\Phi^{-1} A V_\Phi = V_\Phi^{-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (I_n \otimes A_i) \Phi^i \right) V_\Phi = \sum_{i=0}^{n-1} V_\Phi^{-1} (I_n \otimes A_i) \Phi^i V_\Phi$$

又 $V_\Phi = V_\Delta \otimes I_m$, 所以 $V_\Phi i^{-1} = V_\Delta^{-1} \otimes I_m$, 故

$$\begin{aligned} V_\Phi^{-1} A V_\Phi &= \sum_{i=0}^{n-1} (V_\Delta^{-1} \otimes I_m) (I_n \otimes A_i) (A^i \otimes I_m) (V_\Delta \otimes I_m) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (V_\Delta^{-1} A^i V_\Delta) \otimes A_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \text{diag}(\omega_0^i A_i, \omega_1^i A_i, \dots, \omega_{n-1}^i A_i) \\ &= \text{diag}(F(\omega_0), F(\omega_1), \dots, F(\omega_{n-1})) \end{aligned}$$

推论 2 若 A 是块首尾差 r -循环矩阵, 且 $A = bFLDC(A_0, A_1, \dots, A_{n-1})_r$, 则有

$$\|A\|_p^2 \leq n \sum_{j=1}^{n-1} \|A_j\|_p^2, \quad 2 \leq p < \infty$$

证明: 令 $W = \frac{1}{\sqrt{n}} V_\Phi$, 由块首尾差 r -循环矩阵的对角化得

$$X = W^* A W$$

于是

$$X_{kk} = \sum_{j=1}^{n-1} \omega_j^k A_j, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

因此

$$\|A\|_p = \|X\|_p = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \|A_{kk}\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

再由引理 1 得 $\left(\sum_{k=0}^{n-1} \left\| \sum_{j=1}^{n-1} \omega_j^k A_j \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq n \|A_j\|_p^2$, 即

$$\|A\|_p^2 \leq n \sum_{j=1}^{n-1} \|A_j\|_p^2, \quad 2 \leq p < \infty$$

4 三对角块 r -循环线性系统解的直接算法

在现代工程研究领域, 常常会用到循环线性系统, 通过已有的数学理论, 下面将对如下具有块结构的 Hermitian 对称线性系统的解进行研究

$$Mx = F \quad (1)$$

其中 $F \in \mathbb{C}^n$, $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 且矩阵 M 为如下的 $m \times m$ 块三对角块 r -循环矩阵

$$M = M(A, B, \dots, 0, B^*)_r = \begin{pmatrix} A & B & 0 & \cdots & 0 & B^* \\ rB^* & A & B & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ rB & 0 & 0 & \cdots & rB^* & A \end{pmatrix}$$

这里 $s(n = ms)$ 阶矩阵 $A = A^* > 0$, B 非奇异, 列向量 $x = \{X_i\}$, $F = \{F_i\}$, 且 $X_i, F_i \in \mathbb{C}^s, i = 1, 2, \dots, m$.

首先考虑方程

$$Ny = F \quad (2)$$

其中

$$N = N(A, B, B^*, \Gamma) = \begin{pmatrix} \Gamma & B & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ rB^* & A & B & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & rB^* & A \end{pmatrix}$$

对 N 进行 LU 分解得到

$$L = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ rB^* \Gamma^{-1} & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & rB^* \Gamma^{-1} & I \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \Gamma & B & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Gamma & B & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \Gamma \end{pmatrix}$$

这里 $\Gamma = \Gamma^*$ 需满足等式 $A = \Gamma + rB^* \Gamma^{-1} B$, 于是方程 (2) 等价于如下的线性系统

$$Lz = F, \quad z = \{Z_i\}, \quad Uy = z, \quad y = \{Y_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

通过计算可得

$$Z_1 = F_1, \quad Z_i = F_i - rB^* \Gamma^{-1} Z_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, m$$

$$Y_r = \Gamma^{-1} Z_r, \quad Y_i = \Gamma^{-1} (Z_i - BY_{i+1}), \quad i = m-1, m-2, \dots, 1$$

为了方便, 令 $P = rB^* \Gamma^{-1}$, $Q = \Gamma^{-1} B$, $D = \text{diag}(\Gamma, \Gamma, \dots, \Gamma)$, 于是 $N = LDV$, 得到

$$N^{-1} = V^{-1} D^{-1} L^{-1} \quad (3)$$

记 $L^{-1} = (l_{ij})$, $V^{-1} = (v_{ij})$, 则有

$$l_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j \\ (-1)^{i-j} P^{j-i}, & i \geq j \end{cases}$$

$$v_{ij} = \begin{cases} 0, & i > j \\ (-1)^{j-i} Q^{j-i}, & i \leq j \end{cases}$$

且

$$D^{-1} = \text{diag}(\Gamma^{-1}, \Gamma^{-1}, \dots, \Gamma^{-1})$$

接着寻求如下线性系统的解

$$\tilde{N}\tilde{y}=F\tag{4}$$

这里

$$\tilde{N}=\begin{pmatrix}A&B&0&\cdots&0&0\\rB^*&A&B&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&rB^*&A\end{pmatrix},\tilde{y}=\begin{pmatrix}\tilde{Y}_1\\\tilde{Y}_2\\\vdots\\\tilde{Y}_m\end{pmatrix}$$

而

$$\tilde{N}=\begin{pmatrix}A&B&0&\cdots&0&0\\rB^*&A&B&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&rB^*&A\end{pmatrix}=N+\begin{pmatrix}I\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}(A-\Gamma,0,\cdots,0)=N+E_1R^T$$

于是由 Sherman-Morrison-Woodbury 公式得

$$\tilde{N}^{-1}=N^{-1}-N^{-1}E_1(I+R^TN^{-1}E_1)^{-1}R^TN^{-1}$$

因此，可以得到式(4)的解为

$$\begin{aligned}\tilde{y}&=\tilde{N}^{-1}F\\&=N^{-1}F-N^{-1}E_1(I+R^TN^{-1}E_1)^{-1}R^TN^{-1}F\\&=y-N^{-1}E_1(I+(A-\Gamma)E_1^TN^{-1}E_1)^{-1}R^Ty\\&=y-N^{-1}E_1(I+(A-\Gamma)E_1^TN^{-1}E_1)^{-1}(A-\Gamma)Y_1\end{aligned}$$

而由式(3)可计算得到

$$(N^{-1}E_1)_i=(V^{-1}D^{-1}L^{-1}E_1)_i=\sum_{k=1}^m(-1)^{i+1}Q^{k-i}\Gamma^{-1}P^{k-1}$$

$$E_1^TN^{-1}E_1=\sum_{k=1}^mQ^{k-1}\Gamma^{-1}P^{k-1},\quad i=1,2,\cdots,m$$

因此，式(4)可写成

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_i&=Y_i-\left[\sum_{k=i}^m(-1)^{i+1}Q^{k-i}\Gamma^{-1}P^{k-1}\right]\cdot\\&\quad\left[I+(A-\Gamma)\sum_{k=1}^mQ^{k-1}\Gamma^{-1}P^{k-1}\right]^{-1}(A-\Gamma)Y_1\end{aligned}$$

最后回归到线性系统(1)，寻求该线性系统的解。式(1)的系数矩阵可以写为

$$M=\tilde{N}+\begin{pmatrix}I&0\\0&0\\\vdots&\vdots\\0&0\\0&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&B^*\\rB&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}=\tilde{N}+\tilde{U}\tilde{B}^T$$

于是再由 Sherman-Morrison-Woodbury 公式得

$$M^{-1}=\tilde{N}^{-1}-\tilde{N}^{-1}\tilde{U}(I+\tilde{B}^T\tilde{N}^{-1}\tilde{U})^{-1}\tilde{B}^T\tilde{N}^{-1}$$

$$M^{-1}F=\tilde{N}^{-1}F-\tilde{N}^{-1}\tilde{U}(I+\tilde{B}^T\tilde{N}^{-1}\tilde{U})^{-1}\tilde{B}^T\tilde{N}^{-1}F$$

此时线性系统(1)的解为

$$x=\tilde{y}-\tilde{N}^{-1}\tilde{U}(I+\tilde{B}^T\tilde{N}^{-1}\tilde{U})^{-1}\tilde{B}^T\tilde{y}$$

5 结 论

提出了块首尾差 循环矩阵的概念，并验证了其和、差及乘积仍是块首尾差循环矩阵，这说明了其有很强的保结构性。接着通过构造基本块首尾差循环矩阵研究了非奇异性，并通过运用 Kronecker 积的性质，研究了其对角化的性质。利用 Sherman-Morrison-Woodbury 公式，给出了三对角块循环线性系统求解的直接算法，这对其他领域的应用具有重要的意义。

参考文献:

[1] SOLAK S, BAHŞI M. Some properties of circulant matrices with Ducci sequences[J]. Linear Algebra and its Applications, 2018, 542: 557–568.

[2] JOE S. The Hermite normal form for certain rank-1 circulant and skew-circulant lattice rules[J]. Linear Algebra and its Applications, 2016, 496: 438–451.

[3] CARMONA A, ENCINAS A M, GAGO S, et al. The inverses of some circulant matrices[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 270: 785–793.

[4] HE C Y, WANG X Y. The discriminance for a special class of circulant matrices and their diagonalization[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 238: 7–12.

[5] 李静, 何承源. 求解首尾差循环矩阵逆与广义逆的快速算法[J]. 山东大学学报(理学版), 2013, 48(6): 96–99.

[6] SEARLE S R. On inverting circulant matrices[J]. Linear Algebra and its Applications, 1976, 25: 77–89.

[7] VAN LOAN C F. The ubiquitous Kronecker product[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2000, 123(1/2): 85–100.

[8] BANI-DOMI W, KITTANEH F. Norm equalities and inequalities for operator matrices[J]. Linear Algebra and its Applications, 2008, 429(1): 57–67.

[9] BHATIA R, KITTANEH F. Norm inequalities for partitioned operators and an application[J]. Mathematische Annalen, 1990, 287(1): 719–726.

[10] 何承源, 黄廷祝. 两类循环分块矩阵及其有关算法[J]. 应用数学学报, 2002, 25(2): 125–130.