

直线共轲内啮合齿轮副的重合度研究

段刚, 崔建昆, 高铭良

(上海理工大学机械工程学院, 上海 200093)

摘要: 根据齿轮啮合原理, 参照渐开线齿轮定义了直线齿廓外齿轮的基本参数, 得出了齿形半角、压力角和最小齿数的关系, 得到直线齿形齿轮的齿廓方程, 在此基础上对啮合极限点进行了研究。为满足连续传动的要求, 推导出直线共轲内啮合齿轮副啮合曲线, 并分析了直线共轲内啮合齿轮传动的啮合特性。根据重合度计算理论推导出直线共轲内啮合齿轮副重合度的计算公式, 保证在齿形参数设计时满足连续传动的要求。根据齿轮的基本参数和重合度的计算公式, 研究外齿轮齿顶高系数、内齿圈齿顶高系数、压力角与重合度的关系。

关键词: 直线共轲; 内啮合; 重合度; 压力角; 齿顶高系数

中图分类号: TH 132.41

文献标志码: A

Contact Ratio of an Internal Meshing Gear Pair with a Straight Line Tooth Profile Out Gear

DUAN Gang, CUI Jiankun, GAO Mingliang

(School of Mechanical Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: According to the gear meshing principle, the basic parameters of external gears with straight tooth profiles were defined by reference to the parameters of involute gears. The relationships between the tooth angle, pressure angle and minimum number of teeth were obtained, and a coordinate system was established to obtain the tooth profile equation. On this basis, the meshing limit points were studied. In order to meet the requirements of continuous transmission, the meshing line of a linear meshing gear pair with a straight line tooth profile out gear was deduced, which is a curve with increasing curvature. The meshing characteristics of the transmission of the internal meshing gear with a straight line tooth profile out gear were analyzed. According to the theory of contact ratio, the formula of the contact ratio of linear conjugate meshing gears was deduced to ensure the requirement of continuous transmission when the tooth parameters were designed. According to the basic parameters of the gear and the calculation formula of the contact ratio, the relationships between the contact ratio and the height coefficient of the external gear tooth crown, the height coefficient of the ring gear tooth tip as well as the pressure angle were studied.

Keywords: straight line conjugation; internal meshing; contact ratio; pressure angle; tooth height coefficient

直线共轭内啮合齿轮副的核心是一对特殊齿形的齿轮副，构成齿轮副的外齿轮齿廓为左右对称的直线，内齿圈齿廓为与外齿轮齿廓共轭的曲线，外齿轮和内齿圈均为圆柱齿轮。

与外啮合齿轮副相比，这种内啮合齿轮副中心距小，而且两齿轮回转方向相同，相对角速度较小，所以，构成了该传动方式最突出的优点：滑动系数小、噪声低^[1]。

目前直线共轭内啮合齿轮副运用最广泛的是在内啮合齿轮泵中。率先成功研发第一台直线共轭内啮合齿轮泵的是瑞士 Turninger 公司^[2]，其齿数比为 13:17，结构简单，输出的工作压力很容易达到 20 MPa，其噪声最小可达 53 dB，在行业内被称为安静泵。

上海航空发动机制造厂设计制造了 NB 系列直线共轭内啮合齿轮泵，NB 泵既具有一般齿轮泵结构简单、对介质污染敏感性小的优点，又具有柱塞泵的高压力和螺杆泵的低噪音、长寿命的优点，是目前国内最先进、最具有竞争力的定量泵。

本文根据齿轮啮合原理，推导出直线共轭齿轮副的啮合曲线，推导出直线共轭内啮合齿轮传动重合度的计算公式，针对关键的齿形参数对重合度的影响进行实例研究。

1 外齿轮基本参数

在直线共轭内啮合齿轮副中，外齿轮齿廓为图 1 所示的左右对称的直线，其中， θ 为分度圆上齿厚所对应的圆心角， β 为外齿轮的齿形半角， r_1 为外齿轮分度圆半径， L 为外齿轮中心到轮齿一侧直线的距离。直线齿廓外齿轮上的压力角在齿廓各点不一样，仿照渐开线齿轮的参数设置，规定齿轮齿廓曲线分度圆上的压力角为标准压力角，用 α 表示。

以外齿轮中心 o_1 为原点建立坐标系 (o_1 - x , y)，则可得

$$\theta=\frac{\pi}{z_1}$$

(1)

式中， z_1 为外齿轮齿数。

$$L=r_1\sin\left(\frac{\theta}{2}+\beta\right)$$

(2)

$$\beta=\alpha-\frac{\theta}{2}$$

(3)

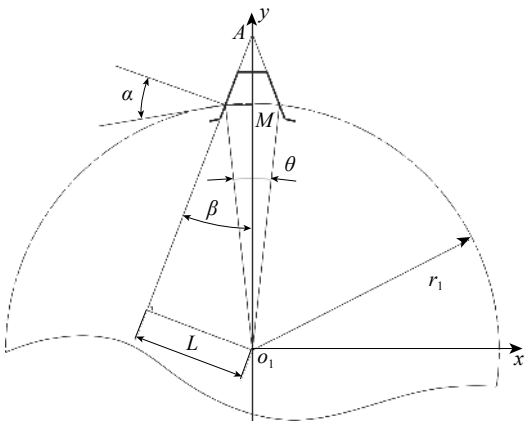


图 1 直线共轭内啮合齿轮副外齿轮齿廓

Fig. 1 External gear tooth profile of the internal meshing gear pair with a straight line tooth profile out gear

由此可见，当压力角一定时，齿数越小，齿形半角越小。同时，曲线与 x 轴的交点表示设定参数条件下的最小齿数，如图 2 所示。

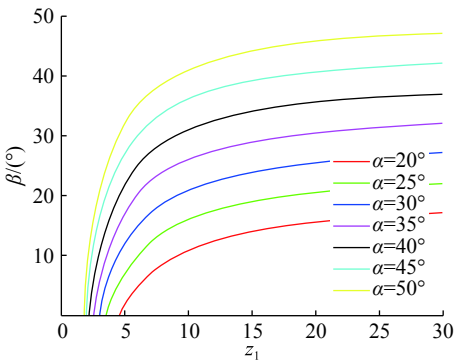


图 2 β 与 z_1 的关系

Fig.2 Relationship between β and z_1

由图 1 可以得出齿轮左侧齿廓直线方程为

$$y=x\cot\beta+r_1\left(\cos\frac{\pi}{2z_1}+\sin\frac{\pi}{2z_1}\cot\beta\right)$$

(4)

2 齿高限制

在直线共轭齿廓中，外齿轮的齿廓左右对称，因此，其齿顶最高不会超过齿廓与对称轴的交点 A ，如图 3 所示。但事实上，点 A 不一定是内外齿轮齿廓啮合时的极限点，经过齿轮齿廓上的一点 M 作齿轮齿廓的法线，交节圆于 P_1 点；将 M 点连法线沿齿廓向上平移，则 P_1 点也在节圆上向右移动，最终到切点 P_c ，此时的啮合点 C 才是齿轮齿廓的啮合极限点。超过啮合极限点的齿廓 CA 因没有共轭曲线，而且齿高过高，可能在齿

轮啮合过程中会发生齿廓干涉现象。啮合极限点 C 也可能在 A 点的上方, 由于轮齿采用对称齿形, C 点超过 A 点的线段并没有实际意义, 因此, 在设计过程中, 可以规定齿顶不能超过 C 点和 A 点中 y 轴坐标较小的点。

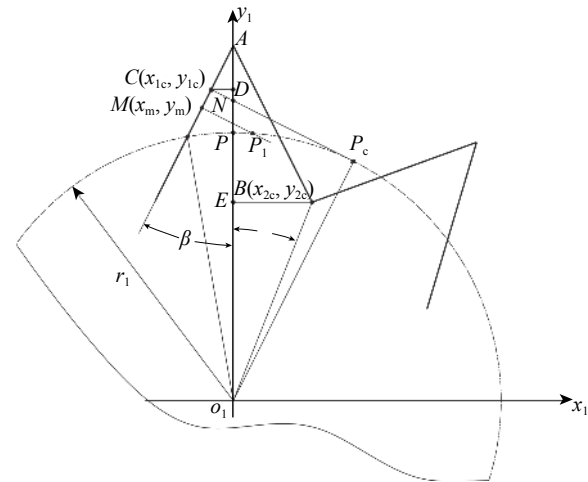


图 3 啮合极限点
Fig.3 Meshing limit points

当外齿轮的齿数和压力角确定时, 外齿轮的齿形也就随之确定, 因此, 齿轮齿槽两侧的直线齿廓在齿根相交于 B 点, 称为齿根极限点。

3 啮合线方程

啮合线是齿轮副啮合过程中, 啮合点在固定坐标系中的轨迹, 可以通过齿廓法线法来进行求解。啮合线可以表达齿轮副的啮合特性, 还可以用于直线共轭齿廓重合度的分析。

图 4 为两齿轮的啮合原理图, 当齿廓上任一点 K 为啮合点时, 外齿轮需逆时针旋转 ψ_1 , 此时, R_1 和 R_2 分别为 K 点到外齿轮和内齿圈中心的距离, a 为中心距。根据勾股定理, 可得

$$R_1^2 = L^2 + r_1^2 \cos^2(\beta - \psi_1) \tag{5}$$

$$R_2^2 = [L + a \sin(\beta - \psi_1)]^2 + r_2^2 \cos^2(\beta - \psi_1) \tag{6}$$

设两轮的传动比为 i_{12} , 外齿轮的分度圆半径为 r_1 , 其齿廓曲线为 g_1 , 内齿圈的分度圆半径为 r_2 。在图 4 中, 以内外两齿轮节圆切点 P 为原点建立固定坐标系 ($P-x, y$); 以 o_1 为原点建立坐标系 (o_1-x_1, y_1), 它与外齿轮固联并随它一起旋转; 以 o_2 为原点建立坐标系 (o_2-x_2, y_2), 它与内齿圈固联并随它一起旋转。

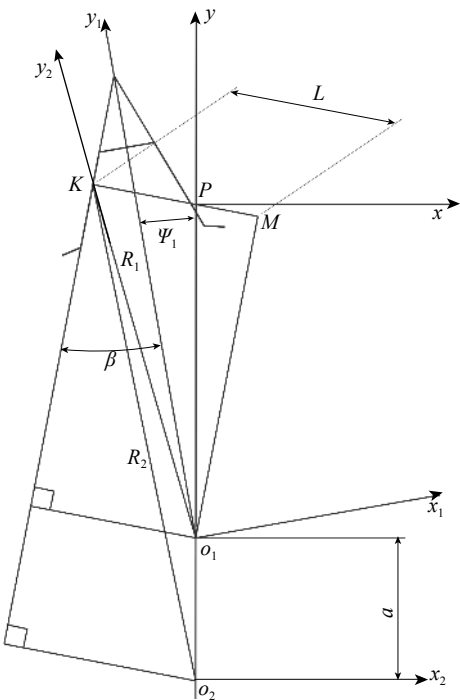


图 4 啮合局部几何关系
Fig. 4 Local geometric relationships in engagement

初始位置如图 5 所示, 两齿轮齿廓在 K 点接触, K_1 为齿廓 g_1 上的任意一点, 它在坐标系 (o_1-x_1, y_1) 中的坐标为 (x_1, y_1) , 外齿轮齿廓 g_1 在 K_1 点处的法线为 K_1P_1 , 且与外齿轮节圆相交于点 P_1 。

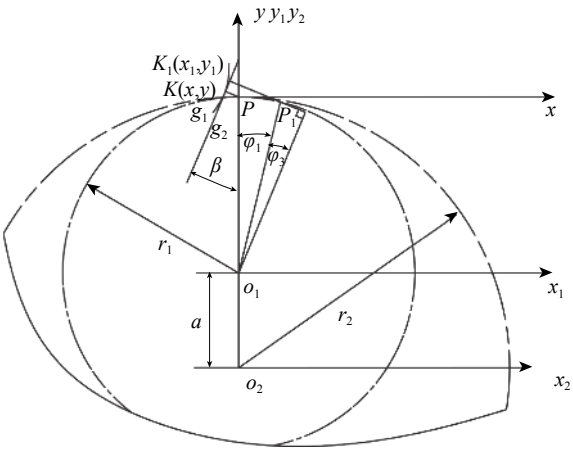


图 5 齿轮副在 K 点啮合
Fig.5 Gear pairs conjugating at point K

如果要使 K_1 点成为接触点, 则必须将外齿轮连同其坐标系 (o_1-x_1, y_1) 相对于其初始位置逆时针旋转角度 ϕ_1 ; 与此同时, 内齿圈也将连同其坐标系 (o_2-x_2, y_2) 按传动比 i_{12} 相对于其初始位置逆时针旋转角度 ϕ_2 , 如图 6 所示 (见下页)。此时

K_1 点在固定坐标系 $(P-x, y)$ 的坐标 (x, y) 即为两齿轮的啮合线对应点的坐标。根据坐标变换原理^[3]可得啮合线方程为

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1 \\ y = x_1 \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1 - r_1 \end{cases} \quad (7)$$

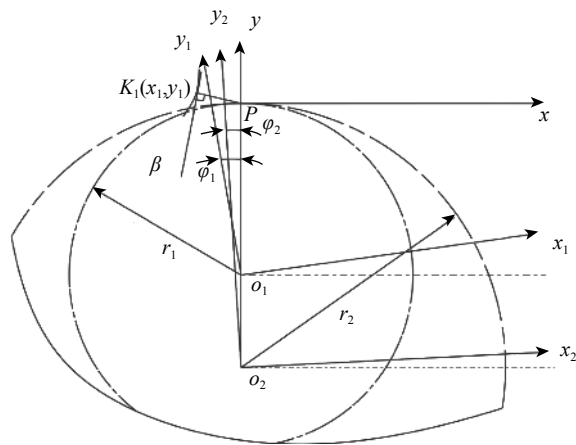


图 6 齿轮副在 K_1 点啮合
Fig.6 Gear pairs conjugating at point K_1

取齿轮副为例，参数如下： $z_1=13, z_2=20, r_1=23.493\text{ mm}, \beta=22.5^\circ, a=12.65\text{ mm}$ ，外齿轮齿顶圆半径 $r_{a1}=25.62\text{ mm}$ ，内齿圈齿顶圆半径 $r_{a2}=38.7\text{ mm}$ 。

通过软件 Matlab 可以得到啮合线，如图 7 所示。由图 7 可以看出，相比于渐开线齿轮的直线型啮合线，直线共轭内啮合齿轮副为曲率逐渐增大的曲线，这代表着他们的啮合特性有着很大的区别。同时，由于渐开线齿轮的基圆半径不会因齿轮位置的移动而改变，所以，当渐开线齿轮副中心距有变动时啮合线不会发生变化，而直线共轭齿轮副的啮合线会因为中心距的变化而改变。

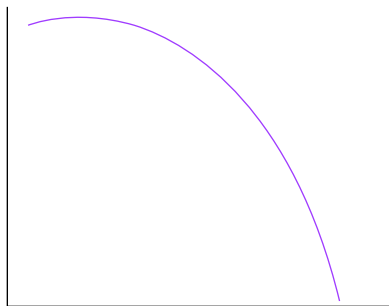


图 7 直线共轭内啮合齿轮副的啮合线
Fig.7 Meshing line of the internal meshing gear pair with a straight line tooth profile out gear

4 重合度

重合度的大小表示同时参与啮合的轮齿对数的平均值。重合度大意味着同时参与啮合的轮齿对数多，提高了齿轮传动的平稳性和承载能力。但对于齿轮泵，如果重合度太大又会引起困油现象^[4]。

由于直线共轭内啮合齿轮副与渐开线内啮合齿轮副的啮合线不同，在渐开线内啮合齿轮副中，该种啮合方式的重合度可以通过实际啮合线的长度与法向齿距的比值来确定。然而，由于直线共轭内啮合齿轮副与渐开线内啮合齿轮副的啮合线不同，所以，直线共轭内啮合齿轮副的重合度就不能单纯地应用渐开线齿轮副重合度的计算方法计算^[5]。根据齿轮的啮合原理，可以得出一种较新的重合度 ε 计算方法。

$$\varepsilon = \varphi / \phi \quad (8)$$

式中： φ 为啮合作用角； ϕ 为周节圆心角。

周节圆心角为一个周节所对的圆心角，即

$$\phi = \frac{2\pi}{z_1} \quad (9)$$

于是，还需要确定齿轮在啮合时的转角 φ 。在内啮合齿轮传动中，两齿轮在啮合传动时，总是从外齿轮的齿根部分和内齿圈的齿顶部分的接触点开始啮合。

当啮合点运动到外齿轮齿顶圆与内齿圈的齿根的接触点时，两齿轮齿廓将脱离接触，该接触点即为终止啮合点。

如图 8 所示， r_{a1} 为外齿轮齿顶圆半径， r_{a2} 为内齿圈齿顶圆半径。根据啮合原理，齿轮副从内齿圈的齿顶圆处开始啮合，从外齿轮的齿顶圆处脱离，即 A 点为啮合起始点， B 点为啮合终止点，曲线段 AB 则为实际啮合线，设计量起始位置为 x_1 轴，齿轮进入啮合时的转角为 φ_{01} ，齿轮脱离啮合时的转角为 φ_{02} 。当相互啮合的一对齿轮的参数确定后，就可以根据啮合线方程和两齿轮的齿顶圆和齿根圆来确定这对齿轮在啮合时的起始啮合角 φ_{01} 及终止啮合角 φ_{02} ，即

$$\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} \quad (10)$$

当齿轮开始啮合时， $R_2^2=r_{a2}^2, \psi_1=\varphi_{01}$ ，将其代入式(6)，可得

$$\varphi_{01} = \beta - \arcsin \frac{La + \sqrt{L^2 a^2 - (a^2 - r_2^2)(L^2 - r_{a2}^2 + r_2^2)}}{r_2^2 - a^2} \quad (11)$$

而当两齿轮脱离啮合时, 有 $R_1^2=r_{a1}^2$, $\psi_1=\varphi_{02}$, 将其代入式(5), 可得

$$\varphi_{02}=\beta-\arccos\sqrt{\frac{r_{a1}^2-L^2}{r_1^2}}\tag{12}$$

由此可得直线共轭内啮合齿轮传动的重合度 ε 的计算公式为

$$\varepsilon=\frac{\varphi_{02}-\varphi_{01}}{2\pi/z_1}=\\ \frac{z_1}{2\pi}\left(\arcsin\frac{La+\sqrt{L^2a^2-(a^2-r_2^2)(L^2-r_{a2}^2+r_2^2)}}{r_2^2-a^2}-\arccos\sqrt{\frac{r_{a1}^2-L^2}{r_1^2}}\right)\tag{13}$$

将前后的基本参数代入式(13), 可得 $\varepsilon=1.218\ 6$ 。

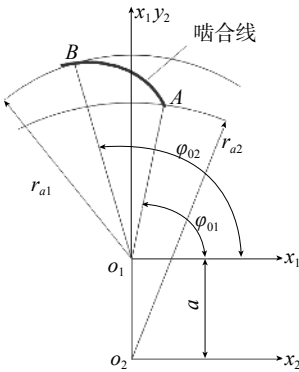


图 8 内外齿轮啮合转角

Fig.8 Conjugate angle of the internal and external gears

5 重合度的影响因素分析

从重合度的计算公式中可以看出, 外齿轮的齿顶圆半径 r_{a1} , 内齿圈的齿顶圆半径 r_{a2} 和距离 L 等参数同齿轮传动的重合度 ε 有直接关系。但是, 外齿轮中心到轮齿齿廓一侧直线的距离 L 在设计中没有直观的几何意义, 所以, 研究其与重合度的关系也没有什么重要的意义。外齿轮和内齿圈齿顶圆半径受齿轮的齿顶高系数影响最大, 所以, 可以研究齿顶高系数来代替齿顶圆半径。同时, 对于直线共轭内啮合齿轮副, 如果再已知压力角 α , 就能确定齿轮的具体齿形。所以, 压力角 α 对于重合度的影响也是一个重要的研究对象。

5.1 外齿轮齿顶高系数 h_{a1}^* 的大小对重合度 ε 的影响

由于重合度 ε 与外齿轮齿顶圆半径 r_{a1} 有密切关系, 在其他条件不变的情况下, 通过改变外齿

轮齿顶高系数 h_{a1}^* 的大小来观察其与重合度 ε 的关系。由于受到式(12)的限制, 因此, 外齿轮齿顶圆半径 r_{a1} 有一最大极限值, 即

$$r_{a1}\leqslant\sqrt{r_1^2+L^2}\tag{14}$$

所以, 对于外齿轮齿顶高系数 h_{a1}^* 也有极限值。

由图 9 可以看得出, 重合度 ε 几乎与外齿轮的齿顶高系数 h_{a1}^* 成正比, 即随着外齿轮的齿顶高系数 h_{a1}^* 的增大, 重合度 ε 也逐渐增大。在 AB 段, 重合度与 h_{a1}^* 基本为线性关系, 在 BC 段, 重合度随着 h_{a1}^* 的增加而急剧增加。所以, 对于这种齿轮副, 从满足传动重合度要求出发, 用于传动方面会选择 BC 段为工作齿面来增加齿轮副的平稳性, 同时用比较小的齿高就可以满足传动要求。而对于齿轮泵方面, 会选择用 AB 段作为工作齿面, 可以选择较大的齿高来增大流量, 减少困油现象。

但是, 如果重合度太大, 就会引起困油现象^[6], 所以, 外齿轮的齿顶高系数 h_{a1}^* 就不能取太大的值。

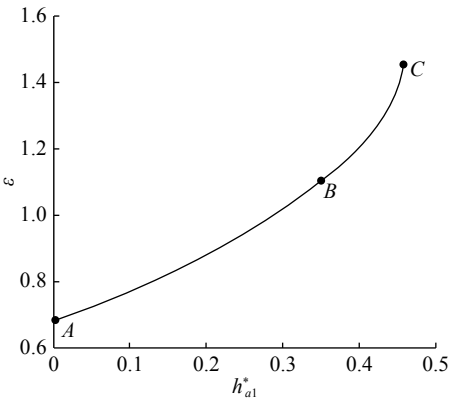


图 9 h_{a1}^* 与 ε 的关系

Fig.9 Relationship between h_{a1}^* and ε

此外, 由于齿高 h 与外齿轮齿顶圆半径为非独立关系, 从而可以得到 h 与外齿轮转角 φ 的关系图应与图 9 类似, 事实验证也确实如此, 如图 10 所示(见下页)。

5.2 内齿圈齿顶高系数 h_{a2}^* 的大小对重合度 ε 的影响

由式(13)还可以看出, 重合度 ε 与内齿圈齿顶圆半径 r_{a2} 有关联, 影响齿顶圆半径最重要的因素为齿顶高系数 h_{a2}^* 。内齿圈齿顶圆半径 r_{a2} 的取值又受到式(11)的限制, 因此, 内齿圈齿顶高系数 h_{a2}^* 也有一定的取值范围。显然, 内齿圈齿顶圆半径 r_{a2} 应小于或等于内齿圈分度圆半径 r_2 , 即

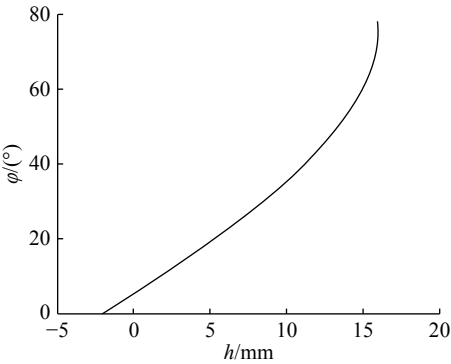


图 10 外齿轮齿高与其啮合转角的关系

Fig.10 Relation between the tooth height of the external gear and its meshing angle

$$r_{a2} \geq \sqrt{\frac{(r_2^2 - a^2)L^2 + 2a(r_2^2 - a^2)L + a^2r_2^2 - a^4}{r_2^2 - a^2}} \quad (15)$$

根据直线共轭内啮合齿轮泵的实际运动情况，内齿圈齿顶圆半径 r_{a2} 又要受到外齿轮的齿根圆半径 r_{f1} 的限制，如图 11 所示，为了方便计算，图中将内齿圈齿顶圆半径 r_{a2} 近似表示，即得

$$r_{a2} = \sqrt{a^2 \cos^2 \frac{\pi}{z_2} - (a^2 - r_{f1}^2) + a \cos \frac{\pi}{z_2}} \quad (16)$$

式中， z_2 为内齿圈齿数。

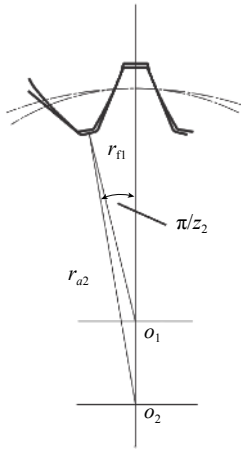


图 11 内齿圈齿顶圆的近似计算

Fig.11 Approximate calculation on the crown circle of the internal ring gear

$$L_1 = \frac{a(a^2 - r_2^2) + \sqrt{a^2(a^2 - r_2^2)^2 - (r_2^2 - a^2)(a^2r_2^2 + a^2r_{a2}^2 - r_2^2r_{a2}^2 - a^4)}}{(r_2^2 - a^2)} \quad (19)$$

式中， L_1 为 L 的最大值。

此外，则考虑到外齿轮齿顶圆半径 r_{a1} 是随着齿形半角 β 的增大而减小的，如图 13 所示，当齿形半角 β 增大到某一值时，考虑到 r_{a1} 的极限情况，即 $r_{a1} \leq o_1A$ ，此时有

比较式 (15) 与式 (16) 中内齿圈齿顶圆半径 r_{a2} 大小，并设其最大者为 $r_{a2\max}$ ，则可得内齿圈齿顶圆半径 r_{a2} 的取值范围为

$$r_{a2\max} \leq r_{a2} \leq r_2 \quad (17)$$

从而得到齿顶高系数 h_{a2}^* 取值范围，得出内齿圈齿顶高系数 h_{a2}^* 与重合度的关系如图 12 所示。

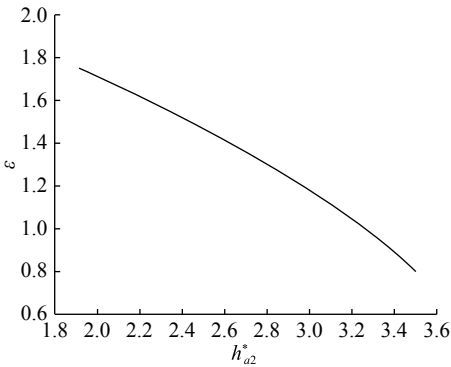


图 12 h_{a2}^* 与 ε 的关系

Fig.12 Relationship between h_{a2}^* and ε

从图 12 中可以看出，随着内齿圈齿顶圆半径 h_{a2}^* 的增大，重合度 ε 逐渐减小。通过对比图 9 和图 12 可以发现，改变外齿轮齿顶高系数对重合度的影响比改变内齿圈齿顶高系数对重合度的影响要大得多。

5.3 压力角 α 的大小对重合度 ε 的影响

压力角 α 可以根据式 (3) 与齿形半角 β 的关系来确定。由于外齿轮齿形半角 β 的取值直接决定齿轮啮合传动会不会出现旋轮线的干涉现象，因此，必须要考虑到齿形半角 β 的取值范围，使其保证齿轮在啮合传动过程中不产生旋轮线的干涉^[7]。

一方面，齿形半角 β 的取值范围可以根据外齿轮中心到轮齿齿廓一侧直线的距离 L 确定；另一方面，齿形半角 β 的取值范围可由外齿轮齿顶圆半径 r_{a1} 的大小确定。由式 (12) 和式 (15) 可得

$$\arcsin \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_1^2}}{r_1} - \frac{\theta}{2} \leq \beta \leq \arcsin \frac{L_1}{r_1} - \frac{\theta}{2} \quad (18)$$

其中

$$\beta \leq \arctan \frac{r_1 \sin \frac{\theta}{2}}{r_{a1} - r_1 \cos \frac{\theta}{2}} \quad (20)$$

则可得外齿轮齿形半角 β 的取值范围为

$$\arcsin \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_1^2}}{r_1} - \frac{\theta}{2} \leq \beta \leq \beta_{\max} \tag{21}$$

其中

$$\beta_{\max} = \min \left(\arcsin \frac{L_1}{r_1} - \frac{\theta}{2}, \arctan \frac{r_1 \sin \frac{\theta}{2}}{r_{a1} - r_1 \cos \frac{\theta}{2}} \right) \tag{22}$$

式中, $\beta_{\max}$ 为 β 的最大值, 随压力角 α 的取值范围确定。

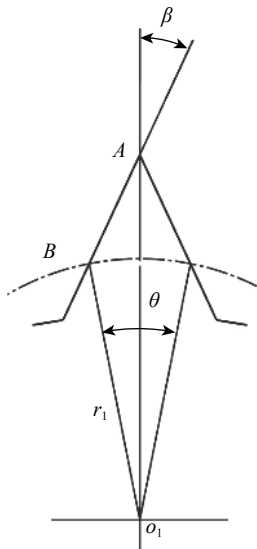


图 13 外齿轮齿顶部分几何关系

Fig.13 Geometry relation of the addendum part of the external gear

从图 14 中可看出, 随着压力角 α 的增大, 重合度 ε 在逐渐减小。为保证齿轮传动能够连续平稳地运行, 压力角 α 范围大约在 $20 \sim 25^\circ$ 。

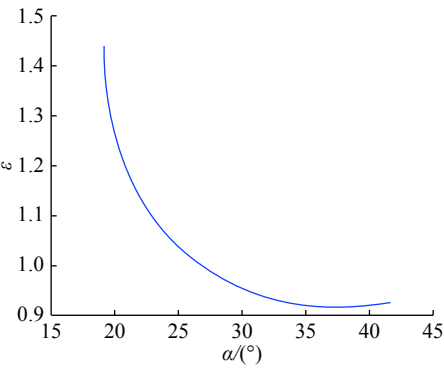


图 14 α 与 ε 的关系

Fig.14 Relationship between α and ε

6 结 论

a. 根据齿轮啮合原理, 可以得到一对共轭曲线, 构成了直线共轭内啮合齿轮副的齿形, 并得出重合度的计算公式, 通过重合度的计算公式可以确定重合度的影响因素为外齿轮的齿顶圆半径 r_{a1} , 内齿圈的齿顶圆半径 r_{a2} 和距离 L 等, 为齿轮泵稳定连续工作齿轮参数的选择提供一定的理论依据。

b. 重合度随着外齿轮齿顶高系数的增大而增大, 但当外齿轮齿顶高系数增大到一定值后重合度会急剧增加, 对于本文所用齿轮副, 当外齿轮齿顶高系数在 $0 \sim 0.35$ 之间, 重合度与齿顶高系数成正比; 而当齿顶高系数大于 0.35 时, 重合度急剧增加, 重合度过大会引起困油现象。

c. 随着内齿圈齿顶高系数的增加, 重合度逐渐减小, 改变外齿轮齿顶高系数对重合度的影响比改变内齿圈齿顶高系数对重合度的影响要大。

d. 随着压力角的增大, 重合度在逐渐减小, 对本文所用齿轮副, 为了保证齿轮能平稳地传动, 压力角应该选择在 $15 \sim 27^\circ$ 之间。

参考文献:

[1] 崔建昆, 秦山, 闻斌, 等. QX 型直线共轭内啮合齿轮泵研制[J]. 流体机械, 2004, 32(12): 41-44.

[2] TRUNINGER S. Zahnradpumpe[P]. Switzerland, 459768, 1967-06-26.

[3] 吴序堂. 齿轮啮合原理[M]. 2 版. 西安: 西安交通大学出版社, 2009.

[4] 方宗德, 蒋孝煜, 宋镜瀛. 大重合度齿轮的性能研究[J]. 齿轮, 1987(1): 27-32.

[5] 叶素娣, 徐敬华, 徐圣伦. 论重合度与齿轮参数的关系[J]. 绥化学院学报, 2015, 35(5): 150-152.

[6] 陈奎生. 液压与气压传动 [M]. 武汉: 武汉理工大学出版社, 2001

[7] 周祥. 直齿共轭内啮合齿轮泵运动学动力学分析[D]. 上海: 煤炭工业部煤炭科学院上海研究所, 1987.

(编辑: 石 瑛)