

全直线区域上的对角化 Chebyshev 有理谱方法

赵云阁, 余旭洪

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 基于 Schmidt 正交化思想, 研究了全直线区域上带渐近边界条件的二阶微分方程的对角化 Chebyshev 有理谱方法, 构造了二阶微分方程的 Fourier 型 Sobolev 正交基函数并导出相应的全对角离散代数方程组, 在此基础上分别给出了微分方程真解和数值解的 Fourier 级数展开形式及局部截断形式。数值结果保持了谱精度, 且与以往算法相比, 新算法优化了计算过程, 减少了计算量, 并且简单易行。

关键词: 谱方法; 无界区域; Chebyshev 有理函数; Fourier 型基函数

中图分类号: O 241.81 **文献标志码:** A

Diagonalized Chebyshev Rational Spectral Method on the Whole Line

ZHAO Yunge, YU Xuhong

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: Based on the idea of Schmidt orthogonalization, a fully diagonalized Chebyshev rational spectral method for solving second order differential equations on the whole line with asymptotic boundary conditions was proposed. Some Fourier-like Sobolev orthogonal basis functions were constructed and fully diagonal discrete algebraic equations were derived. Accordingly, both the exact solutions and the approximate solutions were represented as infinite and truncated Fourier series. The numerical results demonstrate the spectral accuracy. Compared with the existing algorithms, the results of numerical experiment indicate the cost of the computation with the present algorithm is less and the algorithm is easier to be implemented.

Keywords: spectral method; unbounded domain; Chebyshev rational function; Fourier-like basis function

科学与工程中的许多问题都被归结为无界区域问题, 例如, 无界区域的流体问题、量子力学中的非线性波动方程等。随着科技的发展, 无界区域问题越来越受到人们的重视。因此, 如何高

效地求解此类问题一直是研究的热点, 同时由于定义区域的无界特性也使得此类问题成为数值分析和实际应用的难点。在实践中人们采用的第一类方法是人工边界方法, 即将无界区域问题转化

收稿日期: 2018-02-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11571238, 11601332)

第一作者: 赵云阁(1992-), 女, 硕士研究生。研究方向: 微分方程数值方法。E-mail: yunge66@foxmail.com

通信作者: 余旭洪(1984-), 男, 副教授。研究方向: 微分方程数值方法。E-mail: xhyu@usst.edu.cn

为有界区域问题, 但该类方法往往会带来人工误差, 甚至导致数值不稳定; 第二类方法是直接使用 Hermite 或 Laguerre 函数逼近无界问题^[1-3], 但该类方法往往由于逼近函数的 Gauss 点过于集中在原点附近, 而使得远离原点区域的逼近效果不够理想; 第三类方法是通过变量变换将无界区域问题变换成有界区域上的奇异问题, 再利用 Jacobi 谱方法等进行数值求解^[4], 但该类方法所得奇异问题一般形式过于复杂, 不利于理论分析与数值计算; 第四类方法即有理谱方法^[5-7], 其作为一类求解无界区域问题的行之有效的方法已越来越被人们重视。

通常应用 Chebyshev 有理谱方法求解无界区域问题时, 虽然问题离散后所得代数方程组的系数矩阵往往是带状稀疏矩阵, 但条件数却往往以基函数个数的幂次方快速增长, 从而导致病态矩阵问题, 给实际计算带来了困难。因此, 人们希望获得一类对角化的系数矩阵来解决条件数的快速增长问题。受文献[8-10]的启发, 本文将建立全直线区域上二阶微分方程的对角化 Chebyshev 有理谱方法, 并构造相应的 Fourier 型基函数。特别地, 通过 Fourier 型基函数, 能将原问题真解展开成 Fourier 级数的形式, 并将数值解表示成级数的截断形式。在数值实验中可以看出, 新算法优化了计算过程, 减少了计算量, 并且简单易行。

1 预备知识及引理

对任意的正整数 r , 在区间 $\Lambda = (-\infty, +\infty)$ 上按照通常方式定义 Sobolev 空间 $H^r(\Lambda)$, 其内积和范数定义为

$$(u, v)_r = \sum_{k=0}^r \int_{\Lambda} \frac{d^k u}{dx^k} \frac{d^k v}{dx^k} dx, \|v\|_r = (v, v)_r^{1/2}, \forall u, v \in H^r(\Lambda)$$

当 $r=0$ 时, 记 $L^2(\Lambda) = H^0(\Lambda)$ 且 $(u, v) = (u, v)_0$ 和 $\|v\| = \|v\|_0$ 。为了叙述方便, 分别记 $\frac{dv}{dx} = v'$, $\frac{d^2 v}{dx^2} = v''$ 和 $\frac{d^k v}{dx^k} = \partial_x^k v$ 。

记 $T_k(y)$ 为定义在 $I = (-1, 1)$ 上由如下三递推公式生成的 k 次 Chebyshev 多项式:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 R_k(x) = & -\frac{1}{16}(k-1)(k-3)R_{k-4}(x) + \frac{1}{4}(k-1)^2 R_{k-2}(x) - \left(\frac{1}{8}(3k^2+1) - \frac{1}{16}\delta_{k,2}\right)R_k(x) + \\ & \frac{1}{4}(k+1)^2(1+\delta_{k,0})R_{k+2}(x) - \frac{1}{16}(k+1)(k+3)(1+\delta_{k,0})R_{k+4}(x) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{cases} T_{k+1}(y) = 2yT_k(y) - T_{k-1}(y), & k \geq 1 \\ T_0(y) = 1, & T_1(y) = y \end{cases} \quad (1)$$

Chebyshev 多项式具有正交性:

$$\int_{-1}^1 T_k(y)T_l(y) \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{c_k \pi}{2} \delta_{k,l}, \quad k, l \geq 0 \quad (2)$$

其中, $\delta_{k,l}$ 为 Kronecker 数, $c_0 = 2$ 且当 $k \geq 1$ 时, $c_k = 1$ 。此外, Chebyshev 多项式还满足递推关系:

$$2T_k(y) = \frac{1}{k+1}T'_{k+1}(y) - \frac{1}{k-1}T'_{k-1}(y), \quad k \geq 2 \quad (3)$$

$$(1-y^2)T'_k(y) = \frac{k}{2}(T_{k-1}(y) - T_{k+1}(y)), \quad k \geq 2 \quad (4)$$

且有 $T_k(\pm 1) = (\pm 1)^k$ 和 $T'_k(\pm 1) = (\pm 1)^{k-1}k^2$ 。

定义全直线区域 Λ 上的 k 次 Chebyshev 有理函数

$$R_k(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}T_k\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right), \quad x \in \Lambda \quad (5)$$

由式(5)和式(2)可知 Chebyshev 有理函数具有正交性:

$$\int_{\Lambda} R_k(x)R_l(x)dx = \frac{\pi}{2}c_k\delta_{k,l} \quad (6)$$

且有

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} \partial_x((x^2+1)^{\frac{1}{2}}R_k(x))\partial_x((x^2+1)^{\frac{1}{2}} \cdot \\ R_l(x))(x^2+1)dx = \frac{\pi}{2}k^2c_k\delta_{k,l}, \quad k, l \geq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

由式(1), (3)和(4)可得递推关系:

$$R_{k+1}(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}R_k(x) - R_{k-1}(x), \quad k \geq 1 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} R_k(x) = & \frac{x^2+1}{2(k+1)}\partial_x((x^2+1)^{\frac{1}{2}}R_{k+1}(x)) - \\ & \frac{x^2+1}{2(k-1)}\partial_x((x^2+1)^{\frac{1}{2}}R_{k-1}(x)), \quad k \geq 2 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1}\partial_x R_k(x) = & \frac{k}{2}(R_{k-1}(x) - R_{k+1}(x)) - \\ & \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}R_k(x), \quad k \geq 2 \end{aligned} \quad (10)$$

为叙述方便, 当 $k < 0$ 时令 $R_k(x) \equiv 0$ 。显然, 对任意的 $v \in L^2(\Lambda)$, 有

$$v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{v}_k R_k(x), \quad \tilde{v}_k = \frac{2}{c_k \pi} \int_{\Lambda} v(x) R_k(x) dx \quad (11)$$

引理 1 任意的 $k \geq 0$, 有如下等式成立:

证明 由式(8), (9)和(10)可以得到

$$\begin{aligned}
\partial_x R_k(x) &= \frac{k}{2\sqrt{x^2+1}}(R_{k-1}(x) - R_{k+1}(x)) - \frac{x}{x^2+1}R_k(x) = \frac{k}{2\sqrt{x^2+1}}(R_{k-1}(x) - R_{k+1}(x)) - \\
&\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(R_{k+1}(x) + R_{k-1}(x)) = \frac{k-1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}R_{k-1}(x) - \frac{k+1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}R_{k+1}(x) = \\
&\frac{k-1}{4k}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\partial_x((x^2+1)^{\frac{1}{2}}R_k(x)) - \frac{k-1}{4(k-2)}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\partial_x((x^2+1)^{\frac{1}{2}}R_{k-2}(x)) - \frac{k+1}{4(k+2)}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\partial_x((x^2+1)^{\frac{1}{2}}R_{k+2}(x)) + \\
&\frac{k+1}{4k}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\partial_x((x^2+1)^{\frac{1}{2}}R_k(x)) = -\frac{k+1}{4(k-2)}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\partial_x((x^2+1)^{\frac{1}{2}}R_{k-2}(x)) + \frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\partial_x((x^2+1)^{\frac{1}{2}}R_k(x)) - \\
&\frac{k+1}{4(k+2)}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\partial_x((x^2+1)^{\frac{1}{2}}R_{k+2}(x))
\end{aligned} \quad (13)$$

记矩阵 $A = (a_{k,l})_{0 \leq k,l \leq N}$, 其中, $a_{k,l} = (\partial_x R_l, \partial_x R_k)$ 。

由式(13)和式(7)可得矩阵 A 的非零元素为

$$\begin{cases} a_{k,k} = \frac{\pi}{16}(3k^2+1), & k \geq 3 \\ a_{k,k+2} = a_{k+2,k} = -\frac{\pi}{8}(k+1)^2, & k \geq 1 \\ a_{k,k+4} = a_{k+4,k} = \frac{\pi}{32}(k+1)(k+3), & k \geq 1 \end{cases} \quad (14)$$

且

$$\begin{aligned} a_{0,0} &= \frac{\pi}{8}, \quad a_{1,1} = \frac{\pi}{4}, \quad a_{2,2} = \frac{25\pi}{32}, \\ a_{2,0} &= a_{0,2} = -\frac{\pi}{4}, \quad a_{4,0} = a_{0,4} = \frac{3\pi}{16} \end{aligned} \quad (15)$$

显然, $\partial_x^2 R_k(x) \in L^2(\Lambda)$, 由式(11)可知, $\partial_x^2 R_k(x)$

可由 $\{R_k(x)\}_{k=0}^\infty$ 线性表示。可设 $\partial_x^2 R_k(x) = \sum_{l=0}^\infty c_{kl} R_l(x)$,

由式(6)及分部积分法可得

$$c_{kl} = \frac{(\partial_x^2 R_k, R_l)}{(R_l, R_l)} = -\frac{(\partial_x R_k, \partial_x R_l)}{(R_l, R_l)} = -\frac{2}{c_l \pi} (\partial_x R_k, \partial_x R_l)$$

结合式(14)和式(15), 很容易得到结论式(12)成立。

2 对角化 Chebyshev 有理谱方法

建立全直线区域上带渐近边界条件的二阶椭圆

$$\begin{cases} \eta_k = \frac{1}{16}\pi c_k(3k^2+1) - \frac{1}{32}\pi\delta_{k,2} + \frac{1}{2}\lambda\pi c_k - (d_{k,1})^2\eta_{k-2} - (d_{k,2})^2\eta_{k-4}, & k \geq 0 \\ d_{k,1} = \left(-\frac{\pi}{8}(k-1)^2(1+\delta_{k,2}) - \frac{\pi}{32}(k-1)(k-3)(1+\delta_{k,4})d_{k-2,1}\right)\eta_{k-2}^{-1}, & k \geq 2 \\ d_{k,2} = \frac{\pi}{32}(k-1)(k-3)(1+\delta_{k,4})\eta_{k-4}^{-1}, & k \geq 4 \end{cases} \quad (21)$$

证明 首先利用数学归纳法证明式(20)成立。由 Schmidt 正交化思想, 令

$$\varphi_k(x) = R_k(x) - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{A_\lambda(R_k, \varphi_l)}{\eta_l} \varphi_l(x), \quad k \geq 0 \quad (22)$$

由基函数系 $\{R_k(x)\}_{k=0}^\infty$ 的正交性, 有

$$(R_k, \phi) = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{P}_{k-1}(\Lambda) \quad (23)$$

圆型微分方程及非线性热传导方程的对角化 Chebyshev 有理谱方法, 并构造相应的 Fourier 型 Sobolev 正交基函数, 使得方程的真解和数值解能展开成 Fourier 级数的形式。

2.1 二阶椭圆型边值问题的对角化有理谱方法

考虑定义在全直线区域上的二阶模型问题

$$\begin{cases} -u''(x) + \lambda u(x) = f(x), & \lambda \geq 0, \quad x \in \Lambda, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

方程(16)的变分形式为: 寻找 $u \in H^1(\Lambda)$, 使得

$$A_\lambda(u, v) := (u', v') + \lambda(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in H^1(\Lambda) \quad (17)$$

令 $\mathcal{P}_N(\Lambda) = \text{span}\{R_0(x), R_1(x), \dots, R_N(x)\}$, 那么, 式(17)的 Chebyshev 有理谱格式为: 寻找 $u_N \in \mathcal{P}_N(\Lambda)$, 使得

$$A_\lambda(u_N, \phi) = (f, \phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{P}_N(\Lambda) \quad (18)$$

为了获得谱格式式(18)的对角化逼近格式, 需要构造在 Sobolev 内积 $A_\lambda(\cdot, \cdot)$ 下的正交基函数 $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$ 。

引理 2 设 $\varphi_k \in \mathcal{P}_k(\Lambda)$ 是满足

$$\varphi_k - R_k \in \mathcal{P}_{k-1}(\Lambda), \quad A_\lambda(\varphi_k, \varphi_l) = \eta_k \delta_{k,l}, \quad k, l \geq 0 \quad (19)$$

的 Sobolev 正交函数, 则有

$$\varphi_k(x) = R_k(x) - d_{k,1}\varphi_{k-2}(x) - d_{k,2}\varphi_{k-4}(x), \quad k \geq 0 \quad (20)$$

其中, $\varphi_k(x) \equiv 0 (k < 0)$, $\eta_k(x) = 0 (k < 0)$, $d_{k,1} = 0 (k < 2)$, $d_{k,2} = 0 (k < 4)$, 且

因此, 由式(12)和式(6)可得

$$A_\lambda(R_1, \varphi_0) = (R'_1, \varphi'_0) + \lambda(R_1, \varphi_0) = -(R''_1, R_0) = 0$$

即得 $\varphi_1(x) = R_1(x)$ 。类似地, 由

$$A_\lambda(R_2, \varphi_0) = (R'_2, \varphi'_0) + \lambda(R_2, \varphi_0) = -(R''_2, R_0) = -\frac{\pi}{4}$$

$$A_\lambda(R_2, \varphi_1) = (R'_2, \varphi'_1) + \lambda(R_2, \varphi_1) = -(R''_2, R_1) = 0$$

得到 $\varphi_2(x) = R_2(x) - d_{2,1}\varphi_0(x)$, 其中, $d_{2,1} = -\frac{\pi}{4\eta_0}$ 。用

同样的方法可得, 当 $n=3, 4$ 时, 式(20)仍成立, 其中, $d_{3,1} = -\frac{\pi}{2\eta_1}$, $d_{4,1} = -\frac{9\pi}{8\eta_2} - \frac{3\pi d_{2,1}}{16\eta_2}$, $d_{4,2} = \frac{3\pi}{16\eta_0}$ 。

假设当 $0 \leq l \leq k-1$ 且 $k \geq 5$ 时结论成立, 即

$$\varphi_l(x) = R_l(x) - d_{l,1}\varphi_{l-2}(x) - d_{l,2}\varphi_{l-4}(x)$$

现证明当 $k \geq 5$ 时, 有

$$\varphi_k(x) = R_k(x) - d_{k,1}\varphi_{k-2}(x) - d_{k,2}\varphi_{k-4}(x)$$

成立。事实上, 由式(17), (23), (12), (6)以及归纳法假设, 当 $k > l > 0$ 且 $k \geq 5$ 时, 有

$$\begin{aligned} A_\lambda(R_k, \varphi_l) &= (\partial_x R_k, \partial_x \varphi_l) = (\partial_x R_k, \partial_x R_l) - \\ &d_{l,1}(\partial_x R_k, \partial_x \varphi_{l-2}) - d_{l,2}(\partial_x R_k, \partial_x \varphi_{l-4}) = \\ &(\partial_x R_k, \partial_x R_l) - d_{l,1}(\partial_x R_k, \partial_x R_{l-2}) - \\ &(d_{l,1}d_{l-2,1} - d_{l,2})(\partial_x R_k, \partial_x \varphi_{l-4}) + \\ &d_{l,1}d_{l-2,2}(\partial_x R_k, \partial_x \varphi_{l-6}) = \\ &\left(-\frac{\pi}{8}(k-1)^2 - \frac{\pi}{32}(k-1)(k-3)d_{k-2,1}\right)\delta_{k,l+2} + \\ &\frac{\pi}{32}(k-1)(k-3)\delta_{k,l+4}, \end{aligned}$$

从而由式(22)可得, 当 $k \geq 5$ 时,

$$\begin{aligned} d_{k,1} &= \left(-\frac{\pi}{8}(k-1)^2 - \frac{\pi}{32}(k-1)(k-3)d_{k-2,1}\right)\eta_{k-2}^{-1} \\ d_{k,2} &= \frac{\pi}{32}(k-1)(k-3)\eta_{k-4}^{-1} \end{aligned}$$

接下来确定 $\eta_k, k \geq 0$ 。根据式(10)和式(12)可得

$$\begin{aligned} A_\lambda(R_k, R_k) &= (\partial_x R_k, \partial_x R_k) + \lambda(R_k, R_k) = \\ &\frac{1}{16}\pi c_k(3k^2 + 1) - \frac{1}{32}\pi\delta_{k,2} + \frac{1}{2}\lambda\pi c_k \end{aligned}$$

另一方面, 由式(19)和式(20)可得

$$\begin{aligned} A_\lambda(R_k, R_k) &= A_\lambda(\varphi_k + d_{k,1}\varphi_{k-2} + d_{k,2}\varphi_{k-4}, \varphi_k + d_{k,1}\varphi_{k-2} + \\ &d_{k,2}\varphi_{k-4}) = \eta_k + (d_{k,1})^2\eta_{k-2} + (d_{k,2})^2\eta_{k-4} \end{aligned}$$

因此, 有

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{u^{(k+1)}(x) - u^{(k)}(x)}{\tau} - \frac{\partial_x^2 u^{(k+1)}(x) + \partial_x^2 u^{(k)}(x)}{2} + \mu \frac{u^{(k+1)}(x) + u^{(k)}(x)}{2} + \\ &\frac{(u^{(k+1)}(x))^2 + (u^{(k)}(x))^2}{2} = \frac{f^{(k+1)}(x) + f^{(k)}(x)}{2}, \quad x \in \Lambda, \quad k = 0, 1, \dots, M \\ &\lim_{|x| \rightarrow \infty} u^{(k)}(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, M \\ &u^{(0)}(x) = u_0(x), \quad x \in \Lambda \end{aligned} \right. \quad (25)$$

差分格式式(25)的变分形式为寻找 $u^{(k+1)}(x) \in H^1(\Lambda)$, 使得

$$\begin{aligned} A_{\tau,\mu}(u^{(k+1)}, v) &:= \tau(\partial_x u^{(k+1)}, \partial_x v) + \\ &(2 + \tau\mu)(u^{(k+1)}, v) = (g^{(k)}, v), \quad \forall v \in H^1(\Lambda) \end{aligned} \quad (26)$$

其中

$$\begin{aligned} g^{(k)}(x) &= \tau f^{(k+1)}(x) + \tau f^{(k)}(x) + \tau \partial_x^2 u^{(k)}(x) + \\ &(2 - \tau\mu)u^{(k)}(x) - \tau(u^{(k+1)}(x))^2 - \tau(u^{(k)}(x))^2 \end{aligned}$$

变分形式式(26)的 Chebyshev 有理谱格式为寻

$$\begin{aligned} \eta_k &= \frac{1}{16}\pi c_k(3k^2 + 1) - \frac{1}{32}\pi\delta_{k,2} + \frac{1}{2}\lambda\pi c_k - \\ &(d_{k,1})^2\eta_{k-2} - (d_{k,2})^2\eta_{k-4} \end{aligned}$$

这样即得结论式(21)成立。

显然, 有 $\mathcal{P}_N(\Lambda) = \{\varphi_k(x) : 0 \leq k \leq N\}$. 那么, 由式(17)和式(18)以及 $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$ 的正交性可以推出定理1。

定理1 设 $u(x)$ 和 $u_N(x)$ 分别是方程(16)和有理谱格式式(18)的真解和数值解, 那么, $u(x)$ 和 $u_N(x)$ 分别可以展开成基函数 $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$ 的级数形式和级数截断形式, 即

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{k=0}^\infty \hat{u}_k \varphi_k(x), \quad u_N(x) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k \varphi_k(x) \\ \hat{u}_k &= \frac{1}{\eta_k} A_\lambda(u, \varphi_k) = \frac{1}{\eta_k} (f, \varphi_k), \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

2.2 非线性热传导方程边值问题的对角化有理谱方法

考虑非线性热传导方程

$$\left\{ \begin{aligned} &\partial_t u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) + \mu u(x, t) + u^2(x, t) = \\ &\quad f(x, t), \quad x \in \Lambda, \quad t \in (0, T] \\ &\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad t \in [0, T] \\ &u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Lambda \end{aligned} \right. \quad (24)$$

这里, $\mu > 0$ 且 $f(x, t)$ 是已知函数。

建立方程(24)的混合差分-有理谱格式, 其中, 时间方向使用中心差分格式, 空间方向使用对角化 Chebyshev 有理谱格式。

记 τ 为时间步长, $M = \left\lceil \frac{T}{\tau} \right\rceil$, $u^{(k)}(x) = u(x, k\tau)$, $k = 0, 1, 2, \dots, M$. 那么, 方程(24)的时间方向中心差分格式为

找 $u_N^{(k+1)} \in \mathcal{P}_N(\Lambda)$, 使得

$$A_{\tau,\mu}(u_N^{(k+1)}, \phi) = (g_N^{(k)}, \phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{P}_N(\Lambda) \quad (27)$$

其中

$$\begin{aligned} g_N^{(k)}(x) &= \tau f^{(k+1)}(x) + \tau f^{(k)}(x) + \tau \partial_x^2 u_N^{(k)}(x) + \\ &(2 - \tau\mu)u_N^{(k)}(x) - \tau(u_N^{(k+1)}(x))^2 - \tau(u_N^{(k)}(x))^2 \end{aligned}$$

为了获得 Chebyshev 有理谱格式式(27)的对角化逼近格式, 需要构造在 Sobolev 内积 $A_{\tau,\mu}(\cdot, \cdot)$ 下的

正交基函数 $\{\psi_k\}_{k=0}^\infty$ 。采用与引理 2 同样的证明方法, 可得引理 3。

引理 3 设 $\psi_k \in \mathcal{P}_k(\Lambda)$ 是满足 $\psi_k - R_k \in \mathcal{P}_{k-1}(\Lambda)$ 和 $A_{\tau,\mu}(\psi_k, \psi_l) = \gamma_k \delta_{k,l}$, $k, l \geq 0$

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{1}{16} \tau \pi c_k (3k^2 + 1) - \frac{1}{32} \tau \pi \delta_{k,2} + \frac{1}{2} (2 + \tau \mu) \pi c_k - (d_{k,1})^2 \gamma_{k-2} - (d_{k,2})^2 \gamma_{k-4}, \quad k \geq 0 \\ d_{k,1} &= \left(-\frac{\tau \pi}{8} (k-1)^2 (1 + \delta_{k,2}) - \frac{\tau \pi}{32} (k-1)(k-3)(1 + \delta_{k,4}) d_{k-2,1} \right) \gamma_{k-2}^{-1}, \quad k \geq 2 \\ d_{k,2} &= \frac{\tau \pi}{32} (k-1)(k-3)(1 + \delta_{k,4}) \gamma_{k-4}^{-1}, \quad k \geq 4 \end{aligned}$$

定理 2 设 $u_N^{(k+1)}(x)$ 是有理谱格式式 (27) 的解, 那么, 有

$$u_N^{(k+1)}(x) = \sum_{l=0}^N \hat{u}_l^{(k+1)} \psi_l(x), \quad \hat{u}_l^{(k+1)} = \frac{1}{\gamma_l} (g_N^{(k)}, \psi_l), \quad l \geq 0$$

有理谱格式 (27) 是隐式格式, 在实际计算中需要应用迭代法计算解的系数。

3 数值模拟

应用对角化 Chebyshev 有理谱方法求解二阶微分方程 (16) 和 非线性热传导方程 (24), 并验证本文所提方法的快速与高精度特性。

首先, 考察二阶方程 (16) 在 $\lambda = 1$ 时, 针对测试函数具有不同衰减速度时的收敛性。

针对震荡且无穷远处指数衰减的测试函数 $u(x) = e^{-x^2} \sin(2x)$, 图 1 绘制了谱格式式 (18) 取自然对数后的离散 L^2 和 H^1 误差与 N 之间的关系。从图中可以发现, 谱格式式 (18) 具有几何收敛率, 即保持了谱方法的指数收敛优点。 E 为数值误差。

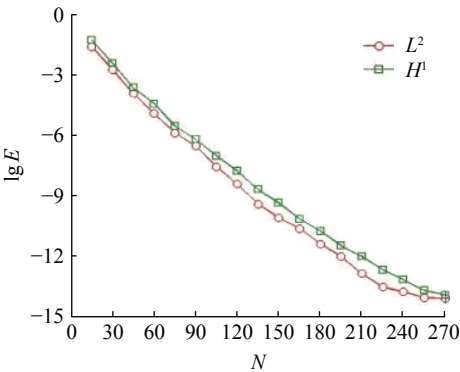


图 1 指数衰减时谱格式 (18) 的误差
Fig.1 Errors of the scheme (18) with exponential decay function

针对震荡且无穷远处代数衰减的测试函数 $u(x) = (x^2 + 1)^{-2} \sin(2x)$, 图 2 绘制了谱格式式 (18) 取自然对数后的离散 L^2 和 H^1 误差与 $\lg_{10} N$ 之间的关

的 Sobolev 正交函数, 则有

$$\psi_k(x) = R_k(x) - d_{k,1} \psi_{k-2}(x) - d_{k,2} \psi_{k-4}(x), \quad k \geq 0$$

其中, $\psi_k(x) \equiv 0 (k < 0)$, $\gamma_k = 0 (k < 0)$, $d_{k,1} = 0 (k < 2)$, $d_{k,2} = 0 (k < 4)$, 且

系。从图中可以发现, 谱格式式 (18) 对衰减速度较慢的测试函数仍然具有代数收敛率。

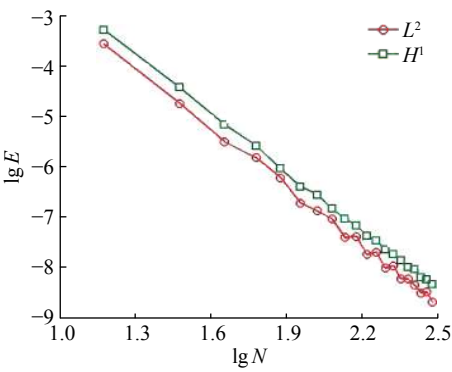


图 2 代数衰减时谱格式 (18) 的误差
Fig.2 Errors of the scheme (18) with algebraic decay function

其次, 考察非线性热传导方程问题 (24) 针对震荡且无穷远处指数衰减的测试函数 $u(x, t) = e^{-x^2} \sin(2x + t)$ 且 $\mu = 1$ 时的收敛性。图 3 绘制了有限差分-有理谱格式式 (27) 在 $\tau = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$ 时的离散 L^2 误差与 N 之间关系。从图 3 中可以发现, 谱格式式 (27) 保持了几何收敛率; 且随着时间步长 τ 的减小, 数值误差也越来越小。图 4 绘制了在时间 $0 \leq t \leq 100$ 取 $\tau = 0.001$ 时的长时间计算的 L^2 误差, 可以发现, 本文所建立的对角化算法具有长时间计算稳定性。

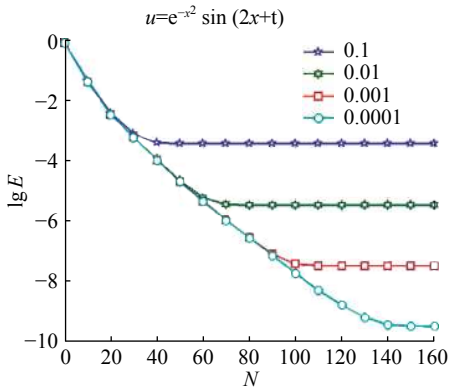


图 3 谱格式 (27) 的 L^2 误差
Fig.3 L^2 errors of the scheme (27)

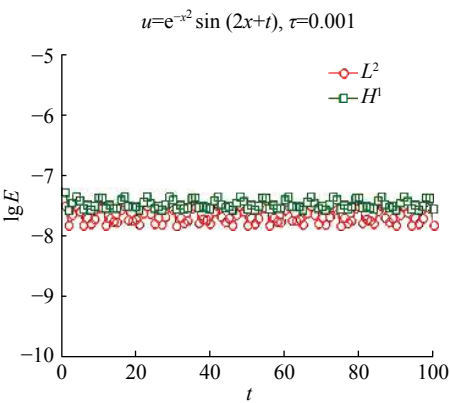


图 4 谱格式 (27) 的长时间稳定性
Fig.4 Long time stability of the scheme (27)

最后, 为了体现对角化 Chebyshev 有理谱方法的最主要优点, 比较新方法与经典 Chebyshev 有理谱方法以及 Hermite 谱方法的刚度矩阵条件数以及

表 1 经典 Chebyshev 有理谱方法 (CRSM) 和 Hermite 谱方法 (HSM) 的条件数
Tab.1 Condition numbers of the classical Chebyshev and Hermite spectral methods

项目	$N=50$	$N=100$	$N=150$	$N=200$	$N=250$	$N=300$
L^∞ 误差	4.835 5e-05	6.226 1e-08	7.573 2e-11	1.246 9e-12	1.291 0e-14	7.430 0e-15
耗时 T/s	2.998 9e-01	3.073 4e-01	3.196 3e-01	3.410 7e-01	3.940 2e-01	4.674 4e-01

表 2 方程 (16) 的对角化 Chebyshev 有理谱方法耗时
Tab.2 Time consumption of the diagonalized Chebyshev rational spectral method for (16)

项目	$N=50$	$N=100$	$N=150$	$N=200$	$N=250$	$N=300$
L^∞ 误差	4.835 5e-05	6.226 1e-08	7.573 2e-11	1.246 9e-12	1.291 0e-14	7.430 0e-15
耗时 T/s	2.998 9e-01	3.073 4e-01	3.196 3e-01	3.410 7e-01	3.940 2e-01	4.674 4e-01

表 3 方程 (16) 的经典 Chebyshev 有理谱方法耗时
Tab.3 Time consumption of the classical Chebyshev rational spectral method for (16)

项目	$N=50$	$N=100$	$N=150$	$N=200$	$N=250$	$N=300$
L^∞ 误差	1.554 3e-05	1.442 1e-08	2.083 9e-11	2.219 3e-13	7.868 7e-15	7.910 3e-15
耗时 T/s	1.593 4e+01	1.593 7e+01	1.594 4e+01	1.596 0e+01	1.598 7e+01	1.603 1e+01

参考文献:

[1] BOYD J P. Chebyshev and Fourier spectral methods[M]. 2nd ed. Mineola: Dover Publications, 2001.

[2] GUO B Y. Spectral methods and their applications[M]. Singapore: World Scientific, 1998.

[3] SHEN J, TANG T, WANG L L. Spectral methods: algorithms, analysis and applications[M]. Berlin: Springer, 2011.

[4] GROSCH C E, ORSZAG S A. Numerical solution of problems in unbounded regions: coordinate transforms[J]. *Journal of Computational Physics*, 1977, 25(3): 273–296.

[5] BOYD J P. Spectral methods using rational basis functions on an infinite interval[J]. *Journal of Computational Physics*, 1987, 69(1): 112–142.

[6] GUO B Y, SHEN J, WANG Z Q. A rational approximation and its applications to differential equations on the half line[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2000, 15(2): 117–147.

(下转第 35 页)

[5] 马达夫, 何翔, 周文台, 等. 新疆高碱煤沾污特性的分析[J]. 发电设备, 2016, 30(1): 7–10.

[6] 何翔, 施鸿飞, 周文台, 等. 添加剂对准东煤结渣和沾污特性影响的研究[J]. 动力工程学报, 2018, 38(9): 689–694.

[7] 乌晓江, 张翔, 陈楠. 高岭土对新疆高碱煤沾污结渣特性的影响研究[J]. 锅炉技术, 2017, 48(2): 5–9.

[8] 强学才, 郭琳, 王洪亮. 制备新型高温受热面防磨涂层的试验研究[J]. 热能动力工程, 2016, 31(5): 76–81.

[9] 王进卿, 袁益超, 池作和, 等. 防结渣复合陶瓷涂层在燃用准东煤锅炉上的应用研究[J]. 动力工程学报, 2017, 37(1): 7–12.

[10] 陈华, 韩志海. 电厂锅炉管的高温腐蚀及金属陶瓷涂层防护[J]. 西安交通大学学报, 1997, 31(3): 86–91.

[11] 王树群, 黄新章. 高 Ni-Cr 合金涂层防护锅炉受热面高温腐蚀的性能研究[J]. 沈阳工程学院学报(自然科学版), 2008, 4(1): 23–26, 31.

[12] 杨荣, 刘家利. 南露天矿煤结渣与沾污特性研究[J]. 热力发电, 2012, 41(10): 31–34.

[13] 周强泰. 锅炉原理[M]. 3 版. 北京: 中国电力出版社, 2013: 160-161.

[14] 杨世铭, 陶文铨. 传热学[M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2006: 478-480.

[15] 景元琢, 周细建, 黄新元, 等. 电站锅炉强化传热管沾污系数试验研究[J]. 锅炉制造, 2005(4): 16–17, 60.

(编辑: 丁红艺)



(上接第 6 页)

[7] WANG Z Q, GUO B Y. Jacobi rational approximation and spectral method for differential equations of degenerate type[J]. Mathematics of Computation, 2008, 77(262): 883–907.

[8] LIU F J, LI H Y, WANG Z Q. Spectral methods using generalized Laguerre functions for second and fourth order problems[J]. Numerical Algorithms, 2017, 75(4): 1005 – 1040.

[9] SHEN J, WANG L L. Fourierization of the Legendre-Galerkin method and a new space-time spectral method[J]. Applied Numerical Mathematics, 2007, 57(5/7): 710–720.

[10] YU X H, ZHAO Y G, WANG Z Q. A diagonalized Legendre rational spectral method for problems on the whole line[J]. Journal of Mathematical Study, 2018(2): 196–213.

(编辑: 石 瑛)