

基于相位恢复的二维图像彩色再现

孟春丽, 王海凤, 刘韵杰, 曾大奎

(上海理工大学 光电信息与计算机工程学院, 上海 200093)

摘要: 携带物体信息的衍射光波中包含了振幅和相位信息, 现有相机只能记录光强信息, 振幅信息在光束传播过程中抗噪能力差, 易丢失, 因而相位信息的恢复有着重要的意义。利用光强传输方程和基于 Gerchberg-Saxton (GS) 的角谱迭代算法, 研究了二维图像的相位信息恢复问题。首先利用两幅二维图像, 分别模拟像面位置光波复振幅的振幅信息和相位信息。然后利用角谱传递函数计算了光路中两个离焦面位置的复振幅分布。将三面光强分布直接代入光强传输方程, 因多次近似只能得到粗略的相位分布, 将其作为基于 GS 角谱迭代算法中的初始相位可加快收敛速度, 得到更精确的相位分布, 相位误差均方根值低至 10^{-8} 。最后, 结合图像的 RGB 通道, 通过角谱传递函数和计算所得相位, 利用三面光强分布, 实现了像面附近的彩色图像再现。

关键词: 相位恢复; 角谱迭代; 光强传输方程; 彩色图像恢复

中图分类号: O 438.2

文献标志码: A

Reconstruction of Two Dimensional Color Images Based on Phase Retrieval

MENG Chunli, WANG Haifeng, LIU Yunjie, ZENG Dakui

(School of Optical-Electrical and Computer Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The light waves diffracted from objects contain the amplitude and phase information. The light intensity information can be recorded easily by current cameras, however, the amplitude information has the worse ability to resist noise and is easily to lose in the process of beam propagation, so the recovery of phase information is of great significance. Through the transport of intensity equation and the angular spectrum iteration algorithm based on Gerchberg-Saxton (GS), the retrieval of phase information in two-dimensional images was studied. Firstly, two images were used to simulate the amplitude and phase information of the light wave at the position of the imaging plane. Then the complex amplitude distribution on two defocused planes in the imaging optical path were calculated taking advantage of the angular spectrum transfer function. The light intensities of three different parallel planes can only get rough phase by the transport of intensity equation due to the multiple approximations. The rough result were then used as the initial phase values in the GS angular spectrum

收稿日期: 2018-02-22

基金项目: 国家重点基础研究发展计划 (2015CB352001); 上海市科学委员会科研计划 (15140502600)

第一作者: 孟春丽(1991-), 女, 硕士研究生。研究方向: 光场成像。E-mail: 1352472904@qq.com

通信作者: 王海凤(1971-), 男, 教授。研究方向: 超分辨成像、纵向偏振。E-mail: hfwangx@yahoo.com

iterative algorithm to speed up the convergence of iteration and finally obtain the more accurate phase distribution. The root mean square of the phase error in iteration is as low as 10^{-8} in the Matlab simulation. By applying the method to three different colors and then combining them together, the phase and intensity of color images on any planes can be obtained by only detecting the intensities on three different planes.

Keywords: *phase retrieval; angular spectrum iteration; transport of intensity equation; color images reconstruction*

光线被物体反射，载有物体信息的光波包含了振幅信息和相位信息，与振幅平方成正比的光强可通过图像传感器记录，如 CCD(charge coupled device) 或 CMOS (complementary metal oxide semiconductor)，即物光衍射波的振幅信息可轻易获得，却无法采集相应光束的相位信息。相位信息描述了强度分量的偏离程度，所以在光场衍射计算中，如若缺失了相位信息，光强信息的传递就得不到预期结果，所以获取光的相位信息尤为重要。

相位恢复方法有干涉和非干涉检测两种，其中干涉检测相位主要有全息术^[1]和剪切干涉法^[2]。而干涉对空间和时间相干性和干涉条纹的分辨率要求较高，投影介质不稳定、激光成像的噪声控制困难等原因难以得到高分辨率的显示，此外复杂的结构系统都使其应用发展不及非干涉检测方法。非干涉检测方法主要包括迭代法、光强传输方程法(transport of intensity equation, TIE)^[3]。迭代方法基于 GS(Gerchberg-Saxton) 算法^[4]等，后续修正发展出许多相关迭代算法。其中，混合输入输出法和杨国桢-顾本源算法^[5]应用最广，该方法通过测得几面光强的限制使误差减小，但初始值选取随意，迭代时间长。通过测量数个轴向光强面并利用 TIE 解得相位的方法应用简单，各种求解方式主要有格林函数^[6]、泽尼克多项式^[7]，以及傅里叶变换方法^[8]，其中傅里叶变换方法效果较好，但因计算的多次近似导致其恢复所得相位精度不高。结合 TIE 法和迭代法，将由 TIE 解得的相位作为迭代法的初始相位，这样既可加快收敛速度，又可提高 TIE 算法的精度。

本文采用快速傅里叶变换方法求解 TIE 方程，将复杂的微分方程转换成代数方程，灵活快速，更适于 Matlab 编程处理。利用近场衍射模拟的光强截面，将 TIE 计算所得初始相位和模拟光

强分布代入基于 GS 迭代的角谱传递算法中进行循环迭代。这样结合二者优点的混合迭代算法^[9]一方面避免了迭代中初始相位选择的随机性带来收敛慢的缺点，另一方面提高了 TIE 算法的精度问题，得到较高精度的相位恢复效果。对于记录位置的光强分布，通过计算相位和角谱传递函数，结合图像的 RGB(红(R)、绿(G)、蓝(B))通道，可获得像面附近任意位置的彩色图像光强分布。

1 算法原理

全息方法可以记录衍射波的相位分布，但干涉法恢复相位要求物光和参考光具备较高的相干性，而且实验仪器精密复杂，因此对成像环境要求很高。非干涉恢复相位方法有 TIE 方法、迭代法以及相空间法^[10]，其中相空间法计算冗余量大，使用度不高。考虑到 TIE 和迭代方法各自的缺陷，结合 TIE 方程和优化加速的 GS 迭代算法可以提高相位恢复精度和加快收敛速度。

1.1 光强传输方程

光强传输方程 TIE 最早由 Teague^[3]提出，描述的是光场成像过程中，衍射波传播方向的光强轴向梯度与垂轴方向相位分布间的关系。求解 TIE 的方法中，快速傅里叶变换方法可以简单有效地恢复相位，但所得相位图精度不高。在求解 TIE 过程中，可利用角谱传递函数，模拟物光衍射波在像面 I_b 附近的成像光强分布 I_a 和 I_c 。图 1 为成像面附近的三面光强分布，与像面间距分别为 Δz_1 , Δz_2 ，三面光强的复振幅分布可分别表示为

$$U_a = A_1(x, y, z_1) \exp[j(k_x x + k_y y + k_z z_1 + \varphi_1)] \quad (1)$$

$$U_b = A_2(x, y, z_2) \exp[j(k_x x + k_y y + k_z z_2)] \quad (2)$$

$$U_c = A_3(x, y, z_3) \exp[j(k_x x + k_y y + k_z z_3 + \varphi_2)] \quad (3)$$

式中： U_a , U_b , U_c 分别为负离焦面、成像面、正离焦面的光场复振幅； A_1 , A_2 , A_3 为对应面的振

幅分布; k_x, k_y, k_z 分别为光矢量 $\mathbf{k}$ 在 x, y, z 方向的分量; z 为光场传播方向, 即光轴坐标; x, y 为垂直于光轴的平面坐标; z_1, z_2, z_3 分别对应 I_a, I_b, I_c 光强面在 z 轴的位置; j 为虚数单位, $j^2=-1$; φ_1, φ_2 为离焦面相对于像面的位相变量。

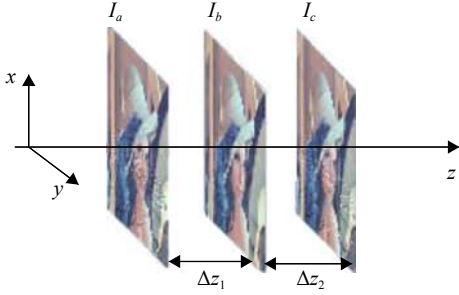


图1 光场衍射中的三面光强分布

Fig.1 Intensity distribution on three planes along optical axis

利用光强传输方程(4), 设等式右边除负号外的算式为 T , 根据亥姆霍兹定理^[1]将等式左边矢量场分解为标量函数的梯度和矢量函数的旋度之和, 见式(5)。其中, $\psi(r)$ 与 $\tilde{A}(r)$ 都是辅助函数, 引用 Teague 近似, 忽略式(5)的旋度项, 得到 $\nabla \cdot (I \nabla P) = \nabla^2 \psi(r) = -T$, ∇ 为梯度算子。对式(4)两边进行快速傅里叶变换 fft , 由傅氏变换的微分性质(6)^[12], $f^{(n)}$ 表示函数 f 的 n 阶导数, 解得 $\psi(r)$ 的值, 见式(7), ifft 表示快速傅里叶逆变换。由式(5)可知 $\nabla P = I^{-1} \nabla \psi(r)$, 再次利用傅氏变换的微分性质, 求解 $\nabla^2 P = \nabla [I^{-1} \nabla \psi(r)]$, 最终可得到光强传输方程的解, 如式(8)所示^[3]。

$$\nabla \cdot (I \nabla P) = -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\partial I}{\partial z} \quad (4)$$

$$I \nabla P = \nabla \psi(r) + \nabla \times \tilde{A}(r) \quad (5)$$

$$\text{fft}(f^{(n)}) = (-jk)^n \text{fft}(f) \quad (6)$$

$$\psi(r) = \text{ifft}\{k^{-2} \text{fft}\{T\}\} \quad (7)$$

$$P = \text{ifft}\{k^{-2} [k_x \text{fft}\{I^{-1} \text{ifft}\{k_x k^{-2} \text{fft}\{T\}\}\} + k_y \text{fft}\{I^{-1} \text{ifft}\{k_y k^{-2} \text{fft}\{T\}\}\}]\} \quad (8)$$

式中: P 为相位分布; I 为光场强度; $\frac{2\pi}{\lambda}$ 表示波数, λ 为波长。 $|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$; k_x, k_y 分别为 x, y 方向的空间角频率, $k_x = k \cos \alpha = 2\pi f_x, k_y = k \cos \beta = 2\pi f_y$; f_x, f_y 分别为 x, y 方向的空间频率; $\cos \alpha, \cos \beta$ 分别为波矢量在 x, y 轴的方向余弦。对于式(4)右侧, 利用差分 $\frac{I(z+\Delta z) - I(z)}{\Delta z}$ 描述光强在光轴方向的变化率 $\frac{\partial I}{\partial z}$, Δz 表示光强面在 z 轴的位移量。结合

上述三面光强分布, 估算得到 $\nabla \cdot (I_b \nabla P_b) = -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{I_a - I_c}{\Delta z_1 + \Delta z_2}$ 。

1.2 混合迭代算法

在离焦距离较小时, TIE 方法的恢复效果较好, 而角谱迭代算法应用范围更广, 尤其对大离焦以及高频信息方面更有优势^[13]。为解决迭代方法收敛慢的问题, 将 TIE 计算出来的相位轮廓作为角谱迭代方法的初始相位, 这样结合二者的优势, 弥补彼此的缺陷, 得到更优的算法, 使恢复相位的范围更大, 效果更好。

将上述 TIE 计算所得的 b 面相位作为初始相位 P_b , 结合模拟的 b 面振幅 A_b , 作为初始迭代面的复振幅 U_b 代入迭代, 利用快速傅里叶变换转换到频域进行处理^[14], 将其频谱乘以 b, c 面间距离 Δz_2 对应的角谱传递函数, 再进行傅里叶逆变换即可得 c 面的复振幅分布。通过对其求相位角以及记录所得的 c 面振幅 A_c , 重新构成 c 面的复振幅 U_c 。对其在频域中进行角谱逆向传递, 方法同第一步一致, 如此每步用记录所得的振幅替代传播后计算所得的振幅加以校正。由此, 衍射波传播过程记录的 3 个面形成一个循环, 在传播到每一面时, 用该面记录所得的振幅 $A_i (i=a, b, c)$ 结合计算的光场传播到该处的相位 $P_i (i=a, b, c)$ 组成复振幅, 这样可以校正光场角谱衍射迭代中的偏差, 将实验测量数据的空间关联性更好地代入迭代运算中, 从而得到恢复细节更好的 b 面相位 P_b 。角谱传递函数的表达式如式(9)所示^[15]。

$$H = \exp\left\{j \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z \left[1 - \frac{\lambda^2}{2} (f_x^2 + f_y^2)\right]\right\} \quad (9)$$

式中: $f_x = \frac{m_x}{L_x}, f_y = \frac{m_y}{L_y}$; m_x, m_y 分别为 x, y 方向的空间频率采样系数; L_x, L_y 分别为 x, y 方向的采样区间长度。此外, 采用均方根形式对迭代算法的相位恢复结果进行评价, 见式(10)。

$$RMS_P = \sqrt{\frac{\sum \sum (P_k - P_{k-1})^2}{\sum \sum (P_{k-1})^2}} \quad (10)$$

式中: RMS_P 表示相位的均方根误差; P_k 是迭代当次的相位分布, P_{k-1} 是上次迭代的相位分布。

2 仿真及结果分析

在 Matlab 仿真时, 结合光束的复振幅表达式

式(式(1)~(3)), 利用图 2 所示的光强图和相位图模拟像面的复振幅分布, 根据角谱传递函数式(9), 通过光场衍射可得到像面附近的复振幅分布, 即可获得模拟的三面光强分布, 如图 3 所示。这三面将用作混合迭代方法中的振幅校正部分以及恢复后的对比。取仿真图像的红色通道进行说明, 首先将模拟得到的 3 个光强分布面代入光强传输方程, 计算得到模拟中间面的相位分布轮廓, 如图 4(a)所示。从图中可知由该方法计算所得的相位分布相较于原模拟相位, 其高频部分恢复结果较差, 将该结果作为 GS 迭代算法的初始相位, 经过角谱迭代算法, 可得到更加精细的相位恢复图, 如图 4(b)所示。利用式(2)~(10)计算角谱迭代算法恢复相位的均方根误差为 10^{-7} , 而混合迭代算法恢复相位的均方根误差达到 10^{-8} 。由图 4(c)可知混合迭代算法相较角谱迭代算法不仅恢复相位精度更高, 且收敛更快。利用中间模拟面的光强分布和恢复的对应面的相位分布, 可以重建邻近两面的光强分布, 如图 5 所示。为了将恢复结果与图 3 所示的对应模拟面进行一般性比较, 对第一面的模拟和重建二维图进行了差分比较, 截取模拟和再现图二维数组的第 256 行数据, 如图 6(a)和(b)所示。直观上二者很相近, 所

以取其差值, 得到误差为 10^{-4} , 见图 6(c), 由此说明了重建光强分布的精确性。仿真中两幅模拟图像的像素分辨率均为 512×512 , x, y 方向的采样区间长度均为 5 mm。



图 2 模拟光强和相位的二维图像

Fig.2 Two dimensional images simulating intensity and phase informations



图 3 红色通道光强分布模拟

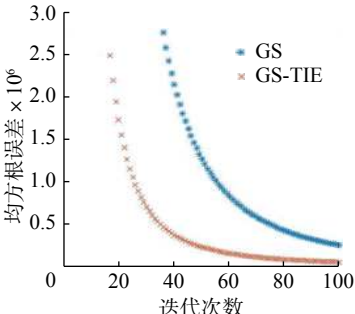
Fig.3 Simulation of the intensity distribution of the red channel



(a) TIE方法恢复的相位分布



(b) 混合迭代算法获得的相位分布



(c) 恢复相位的均方根误差

图 4 分别通过 TIE 和 GS-TIE 算法得到的相位分布以及恢复相位的均方根误差

Fig.4 Retrieved phase distribution by TIE and GS-TIE methods respectively as well as its root-mean-square error



图 5 利用混合迭代算法重建的红色通道的光强分布

Fig.5 Reconstruction of the intensity distribution in red channel by the hybrid iterative algorithm

上面阐述了红色通道的相位恢复及光强再现, 通过叠加红、蓝、绿三通道恢复的光强结果, 得到了彩色二维图在像面附近光强分布的彩色再现。图 7 为彩色光强图及与其左右相距 1 mm 的另外两面的彩色光强分布。通过将彩色模拟光强图分为 RGB 三色进行恢复再现, 将三通道的光强重建图混合叠加得到对应于模拟位置的彩

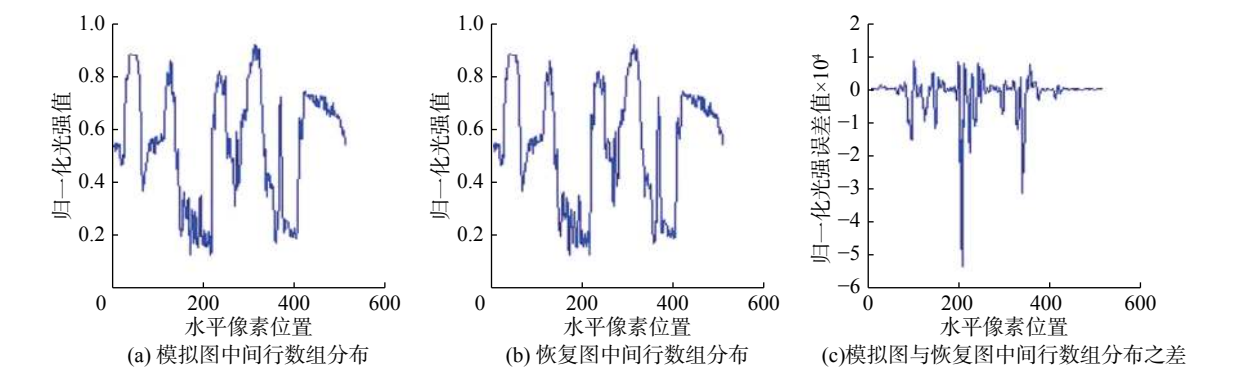


图 6 对应红色通道第一面的模拟图与恢复图数组的中间行分布及对应数组行分布之差

Fig.6 Middle row of intensity distribution arrays at first plane in the red channel of simulated and retrieved images as well as the difference between them



图 7 彩色光强分布的像面附近模拟

Fig.7 Simulation of color intensity distribution near the image plane



图 8 彩色光强分布再现

Fig.8 Reconstruction of color intensity distribution

色像面再现, 如图 8 所示。将重建的彩色光强图与图 7 所示的模拟彩色光强图进行差分来分析恢复结果的优良性。首先, 分别对模拟与重建的第一面彩色光强图求取灰度, 然后抽取两幅二

维图的第 256 行数据, 分别如图 9(a)和(b)所示, 最后对两幅图进行差分, 误差结果为 10^{-4} , 如图 9(c)所示, 由此说明了重建彩色光强分布的优良性。

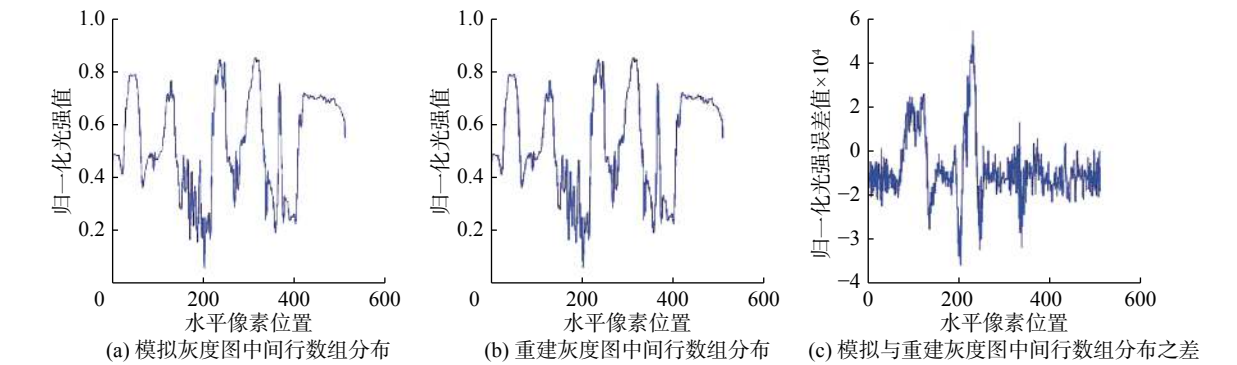


图 9 对应于第一面处模拟与重建的彩色光强分布的灰度图数组的中间行分布及对应数组行分布之差

Fig.9 Middle row of intensity distribution arrays at first plane in the gray-scale map of simulated and retrieved color intensity distribution as well as the difference between them

3 结 论

结合非干涉方法恢复相位中的光强传输方程和迭代算法, 提高了恢复相位的精度。通过 Matlab 仿真了二维图像在光场成像面附近的衍射, 利用衍射的仿真结果计算得到模拟相位图的轮廓, 并将其作为角谱迭代算法的初始值。经过

循环迭代中每个面的光强校准后, 得到精确的相位分布, 其相位误差均方根值低至 10^{-8} 。最后, 将恢复再现的三面光强分布图进行叠加得到了彩色光强分布图的再现。

参考文献:

[1] 于美文. 光全息学及其应用[M]. 北京: 北京理工大学出

版社, 1996.

[2] DEUTSCH B, HILLENBRAND R, NOVOTNY L. Near-field amplitude and phase recovery using phase-shifting interferometry[J]. *Optics Express*, 2008, 16(2): 494–501.

[3] TEAGUE M R. Deterministic phase retrieval: a Green's function solution[J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1983, 73(11): 1434–1441.

[4] GERCHBERG R W, SAXTON W O. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures[J]. *Optik*, 1972, 35(2): 237–250.

[5] YANG G Z, GU B Y, DONG B Z. Theory of the amplitude-phase retrieval in any linear transform system and its applications[J]. *International Journal of Modern Physics B*, 1993, 7(18): 3153–3224.

[6] WOODS S C, GREENAWAY A H. Wave-front sensing by use of a Green's function solution to the intensity transport equation[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2003, 20(3): 508–512.

[7] GUREYEV T E, ROBERTS A, NUGENT K A. Phase retrieval with the transport-of-intensity equation: matrix solution with use of Zernike polynomials[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1995, 12(9): 1932–1941.

[8] ZUO C, CHEN Q, HUANG L, et al. Phase discrepancy analysis and compensation for fast Fourier transform based solution of the transport of intensity equation[J]. *Optics Express*, 2014, 22(14): 17172–17186.

[9] 郭俊虎. 相干光光强恢复相位的方法研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2011.

[10] 吴海燕. 非干涉光场的相位恢复算法研究[D]. 合肥: 安徽大学, 2012.

[11] 肖峻. 亥姆霍兹定理在求解静电场边值问题中的应用[J]. *电气电子教学学报*, 2006, 28(4): 55–57.

[12] 唐荣安, 洪学仁, 徐红萍, 等. 傅里叶变换基本性质的物理诠释[J]. *物理与工程*, 2016, 26(2): 51–53.

[13] 郭怡明, 张方, 宋强, 等. 一种混合迭代算法在大离焦距离 TIE 相位恢复中的应用[J]. *光学学报*, 2016, 36(9): 0912001.

[14] 黄利新, 姚新, 蔡冬梅, 等. 一种快速高精度的相位恢复迭代法[J]. *中国激光*, 2010, 37(5): 1218–1221.

[15] 李俊昌. 衍射计算及数字全息[M]. 北京: 科学出版社, 2014: 26–32.

(编辑: 丁红艺)

(上接第 107 页)

[10] MORRIS J R. Complete mapping of the anisotropic free energy of the crystal-melt interface in Al[J]. *Physical Review B*, 2002, 66(14): 144104.

[11] HOHLFELD J, WELLERSHOFF S S, GÜDDE J, et al. Electron and lattice dynamics following optical excitation of metals[J]. *Chemical Physics*, 2000, 251(1/3): 237–258.

[12] WANG N Y, ROKHLIN S I, FARSON D F. Ultrafast laser melting of Au nanoparticles: atomistic simulations[J]. *Journal of Nanoparticle Research*, 2011, 13(10): 4491–4509.

[13] RUAN C Y, MUROOKA Y, RAMAN R K, et al. Dynamics of size-selected gold nanoparticles studied by ultrafast electron nanocrystallography[J]. *Nano Letters*, 7(5): 1290–1296.

(编辑: 石 瑛)