

亚纯函数及其微分多项式 IM 分担小函数

王汉杰, 王新利

(上海理工大学理学院, 上海 200093)

摘要: 研究了亚纯函数 f 及其微分多项式分担小函数的唯一性问题, 证明了 f 和 $L(f)$ 分担 $a(z)$ 的 2 个唯一性定理, 改进了已有的一些结论。假设 $f(z)$ 是非常数的亚纯函数, k 为正整数, $a(z)(a(z) \neq 0)$ 是亚纯函数。当 $f-a$ 和 $L(f)-a$ 分担 0 IM, 若满足 $10\delta(0, f) + 8(k+1)\Theta(\infty, f) > 8k+17$, 则 $f \equiv L(f)$ 。

关键词: 亚纯函数; 整函数; 唯一性; 分担值

中图分类号: O 174.52 **文献标志码:** A

Meromorphic Functions Sharing One Small Function IM with Their Differential Polynomials

WANG Hanjie, WANG Xinli

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The uniqueness of meromorphic functions f and their differential polynomials, sharing one small function, was investigated. The uniqueness theorem for f and $L(f)$ sharing $a(z)$ was proved and some previous results were improved. Let $f(z)$ be a non-constant meromorphic function, k be a positive integer, and $a(z)(a(z) \neq 0)$ be a small function of $f(z)$. If $f-a$ and $L(f)-a$ share 0 IM, and $10\delta(0, f) + 8(k+1)\Theta(\infty, f) > 8k+17$, then $f \equiv L(f)$.

Keywords: meromorphic function; entire function; uniqueness; sharing value

1 问题的提出

使用 Nevanlinna 值分布理论中的标准记号^[1-3], 如 $T(r, f)$, $N(r, f)$, $m(r, f)$ 等。用 $S(r, f)$ 表示 $o(T(r, f))(r \rightarrow \infty, r \notin E)$ 型的量, 其中, E 为 $\mathbb{R}^+$ 上的一个线性测度有穷的集合。记亚纯函数 $f(z)$ 的微分多项式为: $L(f) = a_k(z)f^{(k)} + a_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + a_0(z)f$,

其中, $a_i(z)(0 \leq i \leq k)$ 为 f 的小函数, 满足 $T(r, a_i) = S(r, f)(r \rightarrow \infty)$ 。

$f(z)$ 和 $g(z)$ 为 2 个非常数的亚纯函数, 如果 $f(z)-b$ 与 $g(z)-b$ 有相同的零点并且重数相同, 则称 $f(z)$ 和 $g(z)$ 分担 b CM, 其中, $b \in \mathbb{C}$ 。如果 $f(z)-b$ 与 $g(z)-b$ 有相同的零点并且不计重数, 则称 $f(z)$ 和 $g(z)$ 分担 b IM。

收稿日期: 2018-04-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11771090)

第一作者: 王汉杰(1993-), 男, 硕士研究生。研究方向: 复分析。E-mail: whjwxx@126.com

通信作者: 王新利(1975-), 女, 讲师。研究方向: 复分析。E-mail: xlwang@usst.edu.cn

1995 年, 方明亮^[4]引入了几乎分担的概念。

定义 1^[4] $f(z)$ 和 $g(z)$ 为 2 个非常数的亚纯函数, 其中, $b \in \mathbb{C}$ 。 $N(r, b)$ 表示相应的幂指量。记

$$N_{12}(r, b) = N\left(r, \frac{1}{f-b}\right) + N\left(r, \frac{1}{g-b}\right) - 2N(r, b)$$

a. 定义 $n(r, b)$ 表示 $f(z) - b = 0$ 与 $g(z) - b = 0$ 在圆 $|z| \leq r$ 内公共点的个数 (计重数), 若 $N_{12}(r, b) \leq S(r, f) + S(r, g)$, 则称 $f(z)$ 与 $g(z)$ 几乎分担 b CM。显然, CM 分担一定是几乎 CM 分担。

b. 定义 $\bar{n}(r, b)$ 表示 $f(z) - b = 0$ 与 $g(z) - b = 0$ 在圆 $|z| \leq r$ 内公共点的个数 (不计重数), $\bar{N}(r, b)$ 表示相应的幂指量。记

$$\bar{N}_{12}(r, b) = \bar{N}\left(r, \frac{1}{f-b}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{g-b}\right) - 2\bar{N}(r, b)$$

若 $\bar{N}_{12}(r, b) \leq S(r, f) + S(r, g)$, 则称 $f(z)$ 与 $g(z)$ 几乎分担 b IM。显然, IM 分担一定是几乎 IM 分担。

1977 年, 仪洪勋等^[1]证明了定理 1。

定理 1^[5] 设 $f(z)$ 是非常数整函数, 如果 f 和 f' CM 分担 2 个判别的有穷复数, 那么, $f = f'$ 。

1996 年, Brück^[6]提出了著名的猜想定理 2。

定理 2^[6] 设 $f(z)$ 是非常数整函数, 如果 $\rho_1(f) < \infty$, $\rho_1(f)$ (表示 $f(z)$ 的超级) 不为整数, 且 f 和 f' 分担有限值 a CM, 则 $\frac{f'-a}{f-a} \equiv c$, 其中, c 为非零的常数。

1998 年, Gundersen 等^[7]研究了有穷级的情况, 改进了定理 2, 证明了定理 3。

定理 3^[7] 设 $f(z)$ 是有穷级的非常数整函数, 如果 f 和 f' 分担有限值 a CM, 则得 $\frac{f'-a}{f-a} \equiv c$, 其中, c 为非零的常数。

由此考虑: 一方面, 将有穷级的限制条件去掉, 是否有类似结论; 另一方面, 将分担有限值推广到分担小函数, 定理 3 的结论是否成立。

2003 年, Yu^[8]回答这一问题, 证明了定理 4 和定理 5。

定理 4^[8] 设 $f(z)$ 为非常数整函数, $k \geq 1$, k 为正整数, $a(z)(a(z) \neq 0)$ 是开平面上的亚纯函数, $T(r, a) = S(r, f)(r \rightarrow \infty)$, 如果 $f - a$ 和 $f^{(k)} - a$ 分担 0 CM, 若满足 $\delta(0, f) > \frac{3}{4}$, 则 $f \equiv f^{(k)}$ 。

定理 5^[8] 设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数, $k \geq 1$, k 为正整数, $a(z)(a(z) \neq 0)$ 是开平面上的亚纯函数, $T(r, a) = S(r, f)(r \rightarrow \infty)$, f 和 a 没有公共极点, 如果 $f - a$ 和 $f^{(k)} - a$ 分担 0 CM, 若满足 $4\delta(0, f) + 2(8+k)\Theta(\infty, f) > 19 + 2k$, 则 $f \equiv f^{(k)}$ 。

2006 年, 刘礼培等^[9]将定理 4 和定理 5 中的 $f^{(k)}$ 推广为 $L(f)$, 将定理 4 中的“ f 和 a 没有公共极点”这个条件去掉, 并减弱了亏量条件, 进一步改进了定理 4 和定理 5, 证明了定理 6 和定理 7。

定理 6^[9] 设 $f(z)$ 为非常数整函数, k 为正整数, $L(f)$ 为 f 的微分多项式, $a(z)(a(z) \neq 0)$ 是开平面上的亚纯函数, $T(r, a) = S(r, f)(r \rightarrow \infty)$, 如果 $f - a$ 和 $L(f) - a$ 分担 0 CM, 若满足 $\delta(0, f) > \frac{1}{2}$, 则 $f \equiv L(f)$ 。

定理 7^[9] 设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数, k 为正整数, $L(f)$ 为 f 的微分多项式, $a(z)(a(z) \neq 0)$ 是开平面上的亚纯函数, $T(r, a) = S(r, f)(r \rightarrow \infty)$, $L(f)$ 和 a 没有同级的极点, 如果 $f - a$ 和 $L(f) - a$ 分担 0 CM, 若满足 $2\delta(0, f) + 4\Theta(\infty, f) > 5$, 则 $f \equiv L(f)$ 。

在此基础上, 本文考虑将定理 6 和定理 7 中的 CM 分担弱化为 IM 分担, 将定理 7 中的“ $L(f)$ 和 a 没有同级的极点”去掉, 从而得到了定理 8 和定理 9。

定理 8 设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数, k 为正整数, $L(f)$ 为 f 的微分多项式, $a(z)(a(z) \neq 0)$ 是开平面上的亚纯函数, $T(r, a) = S(r, f)(r \rightarrow \infty)$, 如果 $f - a$ 和 $L(f) - a$ 分担 0 IM, 若满足 $10\delta(0, f) + 8(k+1)\Theta(\infty, f) > 8k + 17$, 则 $f \equiv L(f)$ 。

定理 9 设 $f(z)$ 为非常数整函数, k 为正整数, $L(f)$ 为 f 的微分多项式, $a(z)(a(z) \neq 0)$ 是开平面上的亚纯函数, $T(r, a) = S(r, f)(r \rightarrow \infty)$, 如果 $f - a$ 和 $L(f) - a$ 分担 0 IM, 若满足 $\delta(0, f) > \frac{9}{10}$, 则 $f \equiv L(f)$ 。

2 一些引理

引理 1^[1] 假设 $f_j(z)(j = 1, 2, \dots, n)$ 为线性无关的亚纯函数, 满足 $\sum_{j=1}^n f_j \equiv 1$, 则对于 $1 \leq j \leq n$, 可得

$$T(r, f_j) \leq \sum_{k=1}^n N\left(r, \frac{1}{f_k}\right) + N(r, f_j) + N(r, D) - \sum_{k=1}^n N(r, f_k) - N\left(r, \frac{1}{D}\right) + S(r)$$

其中, D 为 Wronskian 行列式 $W(f_1, f_2, \dots, f_n)$, $S(r) = o(T_0(r))(r \rightarrow \infty, r \notin E)$ 且 $T_0(r) = \max_{1 \leq k \leq n} \{T(r, f_k)\}$, E 为 $\mathbb{R}^+$ 上的一个线性测度有穷的集合。

引理 2 设 $f(z)$ 是开平面上的亚纯函数, k 为正

整数, $L(f)$ 为 f 的微分多项式, 则有

$$N\left(r, \frac{1}{L(f)}\right) \leq T(r, L(f)) - T(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f)$$

证明 由于

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{1}{f}\right) &\leq m\left(r, \frac{L(f)}{f}\right) + m\left(r, \frac{1}{L(f)}\right) + \\ S(r, f) &\leq m\left(r, \frac{1}{L(f)}\right) + S(r, f) \end{aligned}$$

故

$$T(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq T(r, L(f)) - N\left(r, \frac{1}{L(f)}\right) + S(r, f)$$

所以,

$$N\left(r, \frac{1}{L(f)}\right) \leq T(r, L(f)) - T(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f)$$

引理 3^[3] 设 $f(z)$ 是开平面上的亚纯函数, $L(f)$ 为 f 的微分多项式, k 为正整数, 则有

$$T(r, L(f)) \leq T(r, f) + k\bar{N}(r, f) + S(r, f)$$

引理 4 设 $f(z)$ 是开平面上的亚纯函数, k 为正整数, $L(f)$ 为 f 的微分多项式, $a(z)(a(z) \neq 0)$ 是开平面上的亚纯函数, $T(r, a) = S(r, f)(r \rightarrow \infty)$, 如果 $f-a$ 和 $L(f)-a$ 分担 0 IM, 则有

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \leq k\bar{N}(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f)$$

证明 令 $F = \frac{f}{a}, G = \frac{L(f)}{a}$, 故 $F-1 = \frac{f-a}{a}, G-1 = \frac{L(f)-a}{a}$.

又由 $f-a$ 和 $L(f)-a$ 分担 0 IM, 所以, F 和 G 几乎分担 1 IM, 因此,

$$\begin{aligned} \bar{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) &\leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{F-1}\right) + S(r, f) \leq \\ \bar{N}\left(r, \frac{1}{\frac{G}{F}-1}\right) &+ S(r, f) \leq T\left(r, \frac{G}{F}\right) + S(r, f) \leq \\ N\left(r, \frac{G}{F}\right) + m\left(r, \frac{G}{F}\right) &+ S(r, f) \leq N\left(r, \frac{L(f)}{f}\right) + \\ m\left(r, \frac{L(f)}{f}\right) &+ S(r, f) \leq k\bar{N}(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f) \end{aligned}$$

3 定理 8 的证明

现证明定理 8.

证明 假设 $f \neq L(f)$, 令

$$H = \frac{L(f)-a}{f-a} \quad (1)$$

现分 2 种情形讨论.

情形 1 $H=c$ (c 为常数), 显然, $c \neq 1$, 则 $L(f)-cf = a(1-c)$, 故 $\frac{L(f)}{a} - \frac{cf}{a} = 1-c$, 由第二基本定理及引理 2 可得,

$$\begin{aligned} T(r, L(f)) &\leq T\left(r, \frac{L(f)}{a}\right) + S(r, f) \leq \\ \bar{N}\left(r, \frac{a}{L(f)}\right) &+ \bar{N}\left(r, \frac{a}{f}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{L(f)}{a}\right) + S(r, f) \leq \\ T(r, L(f)) - T(r, f) &+ 2N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}(r, f) + S(r, f) \end{aligned}$$

故 $T(r, f) \leq 2N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}(r, f) + S(r, f)$, 因此, 有 $2\delta(0, f) + \Theta(\infty, f) < 2$, 这与条件 $10\delta(0, f) + 8(k+1) \cdot \Theta(\infty, f) > 8k+17$ 矛盾.

情形 2 $H \neq c$ (c 为常数), 由式 (1) 可得, $\frac{L(f)}{a} - \frac{Hf}{a} + H \equiv 1$.

令

$$f_1 = \frac{L(f)}{a}, f_2 = -\frac{Hf}{a}, f_3 = H$$

则有 $\sum_{j=1}^3 f_j \equiv 1$. 下面再分 2 种情形讨论.

情形 2.1 f_1, f_2, f_3 线性无关, 则由引理 1 可得,

$$\begin{aligned} T(r, L(f)) &\leq T\left(r, \frac{L(f)}{a}\right) + S(r, f) \leq \\ \sum_{k=1}^3 N\left(r, \frac{1}{f_k}\right) &+ N(r, f_1) + N(r, D) - \\ \sum_{k=1}^3 N(r, f_k) &- N\left(r, \frac{1}{D}\right) + S(r) \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} N(r, D) &\leq N\left(r, \left(\frac{Hf}{a}\right)'' H' - H'' \left(\frac{Hf}{a}\right)'\right) \leq \\ N\left(r, \left(\frac{Hf}{a}\right)''\right) &+ N(r, H') \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} N(r, D) - N\left(r, \left(\frac{Hf}{a}\right)'\right) &- N(r, H) \leq N\left(r, \left(\frac{Hf}{a}\right)''\right) + N(r, H') - \\ N\left(r, \left(\frac{Hf}{a}\right)'\right) &- N(r, H) \leq 2\bar{N}\left(r, \left(\frac{Hf}{a}\right)'\right) + 2\bar{N}(r, H) \end{aligned} \quad (3)$$

由引理 4 可得,

$$\begin{aligned} \bar{N}(r, H) &\leq \bar{N}(r, f) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + S(r, f) \leq \\ (k+1)\bar{N}(r, f) &+ N\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f) \end{aligned} \quad (4)$$

由第二基本定理、引理 2 和引理 3 可得,

$$\begin{aligned}
N\left(r, \frac{1}{H}\right) &\leq N\left(r, \frac{1}{L(f)-a}\right) \leq \bar{N}(r, L(f)-a) + \\
&\bar{N}\left(r, \frac{1}{L(f)-a}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{L(f)}\right) + S(r, f) \leq \\
&\bar{N}(r, f) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{L(f)}\right) + S(r, f) \leq \\
(2k+1)\bar{N}(r, f) + 2N\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f) &\quad (5)
\end{aligned}$$

由式(2)和式(3)可得,

$$\begin{aligned}
T(r, L(f)) &\leq N\left(r, \frac{1}{L(f)}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \\
2N\left(r, \frac{1}{H}\right) + 4\bar{N}(r, H) + 2\bar{N}(r, f) + S(r, f) &\quad (6)
\end{aligned}$$

将引理2代入式(6)可得,

$$\begin{aligned}
T(r, f) &\leq 2N\left(r, \frac{1}{f}\right) + 2N\left(r, \frac{1}{H}\right) + \\
4\bar{N}(r, H) + 2\bar{N}(r, f) + S(r, f) &\quad (7)
\end{aligned}$$

从而, 由式(4)和式(7)可得,

$$T(r, f) \leq 10N\left(r, \frac{1}{f}\right) + 8(k+1)N\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f)$$

这与条件 $10\delta(0, f) + 8(k+1)\Theta(\infty, f) > 8k+17$ 矛盾。

情形 2.2 f_1, f_2, f_3 线性相关。即存在 3 个不全为零的数 t_1, t_2, t_3 , 使得

$$t_1 f_1 + t_2 f_2 + t_3 f_3 \equiv 0 \quad (8)$$

若 $t_1 = 0$, 则 $t_2 \neq 0$ 或 $t_3 \neq 0$, 不妨设 $t_2 \neq 0$, 由式(1)和式(8)可得, $H\left(t_2 \frac{f}{a} - t_3\right) = 0$, 因为, $H \neq c$ (c 为常数), 从而有 $f = \frac{at_3}{t_2}$, 所以, $T(r, f) = T\left(r, \frac{at_3}{t_2}\right) = S(r, f)$, 矛盾, 故 $t_1 \neq 0$ 。

由式(1)和式(8)可得,

$$(t_2 - t_1) \frac{Hf}{a} + (t_1 - t_3)H = t_1 \quad (9)$$

再区分 3 种情况。

情形 2.2.1 当 $t_2 - t_1 \neq 0$, $t_1 - t_3 \neq 0$ 时, 有 $\frac{(t_1 - t_2)f}{t_1} + \frac{1}{H} = \frac{t_1 - t_3}{t_1}$ 。

由第二基本定理和式(4)可得,

$$\begin{aligned}
T(r, f) &\leq T\left(r, \frac{f}{a}\right) + S(r, f) \leq \bar{N}\left(r, \frac{a}{f}\right) + \bar{N}(r, H) + \\
\bar{N}\left(r, \frac{f}{a}\right) + S(r, f) &\leq 2N\left(r, \frac{1}{f}\right) + (k+2)\bar{N}(r, f) + S(r, f)
\end{aligned}$$

这与条件 $10\delta(0, f) + 8(k+1)\Theta(\infty, f) > 8k+17$ 矛盾。

情形 2.2.2 当 $t_2 - t_1 = 0$, $t_1 - t_3 \neq 0$ 时, $H =$

$\frac{t_1}{t_1 - t_3}$ 与 $H \neq c$ (c 为常数) 矛盾。

情形 2.2.3 当 $t_2 - t_1 \neq 0$, $t_1 - t_3 = 0$ 时, $fH = \frac{at_1}{t_2 - t_1}$ 。所以,

$$\frac{L(f)}{a} + H + \frac{t_1}{t_1 - t_2} = 1$$

从而,

$$\frac{L(f)}{a} + H = \frac{t_2}{t_2 - t_1}$$

若 $t_2 \neq 0$, 则

$$\begin{aligned}
T(r, L(f)) &\leq T\left(r, \frac{L(f)}{a}\right) + S(r, f) \leq \bar{N}\left(r, \frac{a}{L(f)}\right) + \\
\bar{N}\left(r, \frac{1}{H}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{L(f)}{a}\right) + S(r, f) &\leq T(r, L(f)) - \\
T(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}(r, f) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{H}\right) + S(r, f)
\end{aligned}$$

所以,

$$T(r, f) \leq 2N\left(r, \frac{1}{f}\right) + (k+1)\bar{N}(r, f) + S(r, f)$$

这与条件 $10\delta(0, f) + 8(k+1)\Theta(\infty, f) > 8k+17$ 矛盾。

因此, $t_2 = 0$, 于是 $L(f) + aH = 0$ 且 $fH = -a$, 所以, $fL(f) = a^2$ 。

因为,

$$\begin{aligned}
N\left(r, \frac{1}{f}\right) &\leq N\left(r, \frac{1}{fL(f)}\right) \\
2m\left(r, \frac{1}{f}\right) &= m\left(r, \frac{1}{f^2}\right) \leq m\left(r, \frac{fL(f)}{f^2}\right) + \\
m\left(r, \frac{1}{fL(f)}\right) &= S(r, f) + m\left(r, \frac{1}{fL(f)}\right)
\end{aligned}$$

因此, 有

$$T(r, f) \leq T\left(r, \frac{1}{f \cdot L(f)}\right) + S(r, f)$$

所以, 可得

$$T(r, f) \leq T\left(r, \frac{1}{f \cdot L(f)}\right) + S(r, f)$$

矛盾。因此, 假设不成立, 即 $f \equiv L(f)$ 。定理8证毕。

4 定理9的证明

当 $f(z)$ 为非常数整函数, 显然, $\Theta(\infty, f) = 1$, 由定理8的证明可得, 若 $f-a$ 和 $L(f)-a$ 分担 0 IM, $\delta(0, f) > \frac{9}{10}$, $f \equiv L(f)$ 。定理9证毕。

(下转第166页)

- problem with time windows[J]. *Neurocomputing*, 2012, 98: 101–107.
- [6] 张勇. 基于改进蚁群算法物流配送路径优化的研究[J]. *控制工程*, 2015, 22(2): 252–256.
- [7] 何小锋, 马良. 带时间窗车辆路径问题的量子蚁群算法[J]. *系统工程理论与实践*, 2013, 33(5): 1255–1261.
- [8] 刘云, 张惠珍. 多目标带时间窗的车辆路径问题的单亲遗传混合蚁群算法[J]. *公路交通科技*, 2016, 33(6): 95–100, 106.
- [9] 王超, 穆东. 基于模拟退火算法求解 VRSPDTW 问题[J]. *系统仿真学报*, 2014, 26(11): 2618–2623.
- [10] MARINAKIS Y, MARINAKI M, DOUNIAS G. A hybrid particle swarm optimization algorithm for the vehicle routing problem[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2010, 23(4): 463–472.
- [11] 徐杰, 黄德先. 基于混合粒子群算法的多目标车辆路径研究[J]. *计算机集成制造系统*, 2007, 13(3): 573–579, 584.
- [12] 温惠英, 孙博. 基于离散粒子群算法的协同车辆路径问题[J]. *公路交通科技*, 2011, 28(1): 149–153.
- [13] YANG X S. A new metaheuristic bat-inspired algorithm[M]//GONZÁLEZ J R, PELTA D A, CRUZ C, et al. *Nature Inspired Cooperative Strategies for Optimization* (NICSO 2010). Berlin Heidelberg: Springer, 2010: 65–74.
- [14] LIN J H, CHOU C W, YANG C H, et al. A chaotic levy flight bat algorithm for parameter estimation in nonlinear dynamic biological systems[J]. *Computer and Information Technology*, 2012, 2(2): 56–63.
- [15] NAKAMURA R Y M, PEREIRA L A M, COSTA K A, et al. BBA: a binary bat algorithm for feature selection[C]//*Proceedings of the 2012 25th SIBGRAPI Conference on Graphics, Patterns and Images*. Ouro Preto, Brazil: IEEE, 2012: 291–297.
- [16] 刘长平, 叶春明. 具有混沌搜索策略的蝙蝠优化算法及性能仿真[J]. *系统仿真学报*, 2013, 25(6): 1183–1188, 1195.
- [17] 马祥丽, 张惠珍, 马良. 蝙蝠算法在物流配送车辆路径优化问题中的应用[J]. *数学的实践与认识*, 2015, 45(24): 80–86.
- [18] 殷亚, 张惠珍. 易腐生鲜货品车辆路径问题的改进混合蝙蝠算法[J]. *计算机应用*, 2017, 37(12): 3602–3607.
- [19] FEO T A, RESENDE M G C. Greedy randomized adaptive search procedures[J]. *Journal of Global Optimization*, 1995, 6(2): 109–133.

(编辑: 丁红艺)



(上接第 159 页)

参考文献:

- [1] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1995.
- [2] HAYMAN W K. *Meromorphic functions*[M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.
- [3] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.
- [4] 方明亮. 涉及微分多项式的亚纯函数的唯一性[J]. *数学进展*, 1995, 24(3): 244–249.
- [5] RUBEL L A, YANG C C. Values shared by an entire function and its derivative[M]//BUCKHOLTZ J D, SUFFRIDGE T J. *Complex Analysis*. Berlin: Springer Verlag, 1977: 101–103.
- [6] BRÜCK R. On entire functions which share one value CM with their first derivative[J]. *Results in Mathematics*, 1996, 30(1/2): 21–24.
- [7] GUNDERSEN G G, YANG L Z. Entire functions that share one value with one or two of their derivative[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1998, 223(1): 88–95.
- [8] YU K W. On entire and meromorphic functions that share small functions with their derivatives[J]. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 2003, 4(1): 21.
- [9] 刘礼培, 袁建军. 亚纯函数与其微分多项式分担小函数的唯一性[J]. *西南师范大学学报 (自然科学版)*, 2006, 31(6): 11–14.

(编辑: 石 瑛)