

组合 KdV-Burgers 方程扭状孤波解的渐近稳定性

邓升尔, 张卫国

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 对组合 KdV-Burgers 方程单调递减扭状孤波解的渐近稳定性进行了研究。首先推导出该扭状孤波解的一阶、二阶导数的估计, 然后再利用 L^2 能量估计方法和 Young 不等式, 解决了方程中非线性项难以估计的问题, 证明了该单调递减扭状孤波解在 H^1 中是渐近稳定的。进一步利用 L^2 估计方法和 Gagliardo-Nirenberg 不等式, 得到了扰动 ψ 在 L^2 与 L^∞ 范数意义下的衰减速率分别为 $(1+t)^{-1/2}$ 和 $(1+t)^{-1/4}$ 。

关键词: 组合 KdV-Burgers 方程; 渐近稳定性; 先验估计; 衰减速率

中图分类号: O 175.21 **文献标志码:** A

Asymptotic Stability of Kink Profile Wave Solutions of the Compound KdV-Burgers Equation

DENG Shenger, ZHANG Weiguo

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The asymptotic stability of monotone decreasing kink profile solitary wave solutions of the compound KdV-Burgers equation was studied. The estimate of the first-order and second-order derivatives of monotone decreasing kink profile solitary wave solutions was obtained and the difficulties caused by nonlinear terms in the compound KdV-Burgers equation in the estimation were overcome by using the L^2 energy estimate method and Young's inequality. It is proved that the monotone decreasing kink profile solitary wave solution is asymptotically stable in H^1 . Moreover, the decay rates of ψ in the sense of L^2 and L^∞ norm respectively are $(1+t)^{-1/2}$ and $(1+t)^{-1/4}$ by using the L^2 estimate method and Gagliardo-Nirenberg inequality.

Keywords: compound KdV-Burgers equation; asymptotic stability; priori estimate; decay rate

1 问题的提出

组合 KdV-Burgers 方程

$$u_t + g(u)_x + ru_{xx} + \beta u_{xxx} = 0, \quad b > 0, r \leq 0, \beta > 0 \quad (1)$$

是非线性研究领域重要的模型方程, 在等离子体物理、量子场理论以及固态物理中有着广泛的应用^[1-6]。其中, $g(u) = \frac{a}{2}u^2 + \frac{b}{3}u^3$, a, b 是非线性项系

收稿日期: 2018-06-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11471215)

第一作者: 邓升尔 (1992-), 男, 硕士研究生。研究方向: 非线性发展方程。E-mail: shenger6209@foxmail.com

通信作者: 张卫国 (1957-), 男, 教授。研究方向: 非线性发展方程。E-mail: zwgzwm@126.com

数。当 a, b, r 给定一些值时, 方程(1)可以改写成其他著名的非线性方程。例如, 当 $a \neq 0, b = 0, r \neq 0$, 方程(1)即为人们熟知的 KdV-Burgers 方程

$$u_t + auu_x + ru_{xx} + \beta u_{xxx} = 0 \quad (2)$$

方程(2)可作为许多具有某种耗散作用的实际问题的控制方程, 如粘性液体中的浅水波、弹性管内液体的流动和波动、等离子体中的磁声波等。当方程(2)中 $b = 0, r = 0$, 则为著名的 KdV 方程

$$u_t + auu_x + \beta u_{xxx} = 0$$

文献[7-10]研究了方程(1)孤波解的求解问题, 在文献[7]中求出了方程(1)的扭状孤波解; 文献[8-9]分别运用齐次平衡法和直接法与假设法的一种结合得到了方程(1)的精确解; 随后, 文献[10]应用 Liapunov 稳定性分析法证明了广义组合 KdV-Burgers 方程的扭状孤波解是线性稳定的, 并得到了孤波解线性稳定的条件。文献[11]研究了组合 KdV-Burgers 方程(1)行波解与耗散系数 α 的关系, 找到了 2 个临界值, $\lambda_0 = -2\beta\sqrt{b(3x_3^2 + p)}$, $\lambda_1 = -2\beta\sqrt{b(3x_1^2 + p)}$, $x_1 < x_2 < x_3$, 分别为 $x^3 + px + q = 0$ 的 3 个实根, $\bar{b} = \frac{b}{3\beta}$, $p = -\frac{12vb + 3a^2}{4b^2}$, $q = \frac{a^3 + 6abv - 12b^2c}{4b^3}$, 并给出了引理 1。

引理 1 假设波速 v 与积分常数 c 满足 $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ 和 $a^2 + 4vb > 0$ 时, 有:

- a. 当 $r \leq \lambda_0$ 时, 方程(1)有单调递减的扭状孤波解; 当 $\lambda_0 < r < 0$ 时, 有振荡行波解, 且 $U(\xi)$ 满足 $u(-\infty) = x_3 - \frac{a}{2b}$, $u(+\infty) = x_2 - \frac{a}{2b}$ 。
- b. 当 $r \leq \lambda_1$ 时, 方程(1)有单调递增的扭状孤波解; 当 $\lambda_1 < r < 0$ 时, 有振荡行波解, 且 $U(\xi)$ 满足 $u(-\infty) = x_1 - \frac{a}{2b}$, $u(+\infty) = x_2 - \frac{a}{2b}$ 。
- c. 当 $\lambda_0 < r < \lambda_1$ 时, 方程(1)既有单调递增的扭状孤波解, 满足 $u(-\infty) = x_1 - \frac{a}{2b}$, $u(+\infty) = x_2 - \frac{a}{2b}$, 又有振荡行波解, 满足 $u(-\infty) = x_3 - \frac{a}{2b}$, $u(+\infty) = x_2 - \frac{a}{2b}$ 。

文献[11]利用平面动力系统的理论和方法研究了方程(1)的行波解。对于引理 1 中涉及的方程(1)的衰减振荡解, 文献[11]利用解轨线在相图中的演化关系、假设待定法, 求出了方程(1)衰减振荡解的近似解, 进一步得到了近似解与真解间的误差估计, 证明了误差是以指数形式速降的无穷小量。对于引理 1 中方程(1)所具有的波形函数为单调

的行波解(也可称为扭状孤波解), 目前尚未发现对它的稳定性研究的文献发表。本文研究当 $\alpha \leq \lambda_0$ 时方程所有的单调递减行波解的渐近稳定性。

2 方程(1)单调递减扭状孤波解的基本性质

假定 $U(\xi)$ 是引理 1 中所述的方程(1)在 $r \leq \lambda_0$ (令 $r = -\alpha$, $\alpha \geq 0$)情形单调递减的行波解(或称扭状孤波解), 记

$$U(\xi) \rightarrow u_{\pm}, \quad \xi \rightarrow \pm\infty$$

$$\text{则 } u_- = x_3 - \frac{a}{2b}, \quad u_+ = x_2 - \frac{a}{2b}.$$

将 $u(t, x) = U(\xi) - \frac{a}{2b}$, $\xi = x - ct$, 代入方程(1), 则 $U(\xi)$ 满足

$$-cU_{\xi} - \alpha U_{\xi\xi} + \beta U_{\xi\xi\xi} + g(U)_{\xi} = 0 \quad (3)$$

将式(3)对 ξ 积分, 化为

$$\begin{aligned} -\alpha U_{\xi} + \beta U_{\xi\xi} &= cU - g(U) + a \\ a &= -cu_{\pm} + g(u_{\pm}) \end{aligned}$$

性质 1 假设 $U(\xi)$ 是单调递减行波解, c 是波速, 那么, Rankine-Hugoniot 条件成立:

$$c(u_+ - u_-) = g(u_+) - g(u_-)$$

性质 2 假设 $U(\xi)$ 是单调递减行波解, c 是波速, 那么, 满足 Lax-shock 条件:

$$g'(u_+) < c < g'(u_-)$$

性质 3 假设 $U(\xi)$ 是方程(2)的行波解, $U(\xi)$ 是单调递减的, 并且 $u_{\pm}$ 是单调行波解的渐近值, 有 $U(\xi) \rightarrow u_{\pm}$, $\xi \rightarrow \pm\infty$ 。则存在常数 C , 使得对于任意的 $\xi \in R$ 时, 有

$$|U_{\xi}|, |U_{\xi\xi}| \leq C|u_- - u_+|$$

证明 因为, $U(\xi)$ 是单调递减的, 所以, $U_{\xi} \leq 0$, $u_+ < u_-$ 且 $U - u_+ > 0$ 。将式(3)对 ξ 在 $(\xi, +\infty)$ 进行积分, 可得

$$0 - \alpha U_{\xi} + \beta U_{\xi\xi} = g(U) - g(u_+) - c(U - u_+) \quad (4)$$

利用积分中值定理, 将式(4)化为

$$\begin{aligned} -\alpha U_{\xi} + \beta U_{\xi\xi} &= g'(\theta(U - u_+))(U - u_+) - c(U - u_+) = \\ &= (g'(\theta(U - u_+)) - c)(U - u_+), \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

a. 当 $g'(\theta(U - u_+)) > c$ 时, 有

$$-\alpha U_{\xi} + \beta U_{\xi\xi} > 0$$

$$-c(U - u_+) \leq -\alpha U_{\xi} + \beta U_{\xi\xi} \leq g(U) - g(u_+)$$

故存在常数 C , 满足

$$-C|u_- - u_+| \leq -\alpha U_{\xi} + \beta U_{\xi\xi} \leq C|u_- - u_+| \quad (5)$$

将式(5)两边同乘以 $e^{-\frac{\alpha}{\beta}\xi}$, 有

$$\begin{aligned} -Ce^{-\frac{\alpha}{\beta}\xi}|u_- - u_+| &\leq \beta \frac{d}{d\xi}(e^{-\frac{\alpha}{\beta}\xi}U_\xi) \leq \\ Ce^{-\frac{\alpha}{\beta}\xi}|u_- - u_+| \end{aligned} \quad (6)$$

将式(6)对 ξ 在 $(\xi, +\infty)$ 上积分, 可得

$$|U_\xi| \leq C|u_- - u_+|$$

b. 当 $g'(\theta(U - u_+)) < c$ 时, 有

$$\begin{aligned} -\alpha U_\xi + \beta U_{\xi\xi} &< 0 \\ -c(U - u_+) &\leq -\alpha U_\xi + \beta U_{\xi\xi} \leq U - u_+ \end{aligned}$$

故存在常数 C , 满足

$$-C|u_- - u_+| \leq -\alpha U_\xi + \beta U_{\xi\xi} \leq C|u_- - u_+| \quad (7)$$

将式(7)两边同乘以 $e^{-\frac{r}{\beta}\xi}$, 有

$$\begin{aligned} -Ce^{-\frac{r}{\beta}\xi}|u_- - u_+| &\leq \beta \frac{d}{d\xi}(e^{-\frac{r}{\beta}\xi}U_\xi) \leq \\ Ce^{-\frac{r}{\beta}\xi}|u_- - u_+| \end{aligned} \quad (8)$$

将式(8)对 ξ 在 $(\xi, +\infty)$ 上积分, 可得

$$|U_\xi| \leq C|u_- - u_+| \quad (9)$$

同理, 利用微分中值定理以及式(9), 可得

$$|U_{\xi\xi}| \leq C|u_- - u_+|$$

故性质3得证。

3 单调递减扭状孤波解的渐近稳定性定理

考虑方程(1)的初值问题, 初值条件为

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (10)$$

这里 u_0 是有界可测函数, 满足

$$u_0(x) \rightarrow u_\pm, \quad x \rightarrow \pm\infty$$

设 U 为行波解, 假定

$$u_0 - U \in H^1 \quad (11)$$

并且对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{cases} \Phi_0(x) = \int_{-\infty}^x (u_0 - U)(y)dy \\ \Phi_0 \in L^2 \end{cases} \quad (12)$$

由条件式(11)和式(12)可知,

$$\Phi_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u_0 - U)(y)dy = 0$$

定理1 (渐近稳定性定理) 设 $U(\xi)(\xi = x - ct)$ 是方程(1)在 $r \leq \lambda_0$ 情形单调递减的扭状孤波解, 初值 u_0 满足式(11)和式(12), 记

$$N_0 = \|u_0 - U\|_{H^1} + \|\Phi_0\|_{H^2}$$

则存在与 $u_\pm$ 无关的常数 δ_1 和 $\gamma_1(\gamma_1 \leq |u_- - u_+|)$, 使得当 $|u_- - u_+| \leq \delta_1$ 和 $N_0 \leq \gamma_1$ 时, 方程(1)带有初值 $u_0(x)$

的初值问题的解 $u(t, x)$ 是全局唯一存在的, 且有

$$u - U \in C^0(0, \infty; H^1) \cap L^2(0, \infty; H^2) \quad (13)$$

进一步, 该解以最大范数的形式趋近于行波解

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) - U(x - ct)| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty \quad (14)$$

定理1的证明可以分为两部分: 第一部分是证明解的整体存在性; 第二部分则是证明解的渐近稳定性。

将 $u(t, x) = U(\xi) + \psi(t, \xi), \xi = x - ct$ 代入方程(1), 则 $\psi(t, \xi)$ 满足

$$\psi_t - c\psi_\xi - \alpha\psi_{\xi\xi} + \beta\psi_{\xi\xi\xi} + (g(U + \psi) - g(U))_\xi = 0 \quad (15)$$

$$\psi(0, \xi) = \psi_0(\xi) = (u_0 - U)(\xi) \quad (16)$$

于是, 问题(14)就化为证明 $\limsup_{t \rightarrow 0, x \in \mathbb{R}} |\psi(t, \xi)| \rightarrow 0$ 。

令 $\psi = \Phi_\xi$, 代入式(15), 则式(15)化为

$$\begin{aligned} \Phi_{t\xi} - c\Phi_{\xi\xi} - \alpha\Phi_{\xi\xi\xi} + \\ \beta\Phi_{\xi\xi\xi\xi} + (g(U + \Phi_\xi) - g(U))_\xi = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

将式(17)对 ξ 进行积分, 并令积分常数为0, 则式(17)可化为

$$\begin{aligned} \Phi_t - c\Phi_\xi - \alpha\Phi_{\xi\xi} + \beta\Phi_{\xi\xi\xi} + \\ (g(U + \Phi_\xi) - g(U)) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

将式(18)线性化, 则式(18)化为

$$\Phi_t - c\Phi_\xi - \alpha\Phi_{\xi\xi} + \beta\Phi_{\xi\xi\xi} + g'(U)\Phi_\xi = F(U, \Phi_\xi) \quad (19)$$

其中,

$$F(U, \Phi_\xi) = -(g(U + \Phi_\xi) - g(U)) + g'(U)\Phi_\xi$$

而原初值 $\psi_0(\xi)$ (式(16))就随之化为

$$\Phi(0, \xi) = \Phi_0(\xi) \quad (20)$$

定义初值问题式(18)和式(20)的解空间为

$$X(0, T) = \{\Phi \in L^\infty(0, T; H^2), \Phi_\xi \in L^2(0, T; H^2)\}$$

于是, 有定理2。

定理2 假设 $\Phi_0 \in H^2$, 则存在与 $u_\pm$ 无关的常数 $\delta_2, \gamma_2(\gamma_2 \leq |u_- - u_+|)$ 和 C_1 , 使得当 $|u_- - u_+| \leq \delta_2$ 和 $N_0 = \|\Phi_0\|_{H^2} + \|\psi_0\|_{H^1} \leq \gamma_2$ 时, 初值问题式(18)和式(20)的解 Φ 在 $X(0, \infty)$ 中是全局唯一存在的, 且对 $\forall t \in [0, \infty)$, 满足

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{H^2}^2 + \|\psi\|_{H^1}^2 + \\ \int_0^t \left(\left\| \sqrt{|U_\xi|} \Phi \right\|^2 + \|\Phi_\xi\|^2 + \|\psi_\xi\|^2 + \|\psi_{\xi\xi}\|^2 \right) d\tau \leq \\ C_1 N_0^2 \end{aligned} \quad (21)$$

其中, ψ 由式(15)所定义, ψ_0 为其初值。

实际上, 定理2中的 ψ 是初值问题式(15)和式(16)的全局解, 其解空间是定理1中 $C^0(0, \infty; H^1) \cap L^2(0, \infty; H^2)$ 。故当定理2得证时, 方程(1)带有初

值式 (10) 的初值问题存在唯一全局解，则定理 1 的第一部分得证。

对于定理 2 的证明也可以分为两个部分：第一部分证明初值问题式 (18) 和式 (20) 解的局部存在性；第二部分证明解的全局存在性。对于初值问题式 (18) 和式 (20) 解的局部存在性的证明，可运用 Galerkin 方法按标准方式进行证明，可参考文献 [12-13] 等。本文省略证明而给出定理 3。

定理 3 (局部存在性) 假设 $\Phi_0 \in H^2$ 且 $\|\Phi_0\|_{H^1} \leq \gamma_0/2$ ，则存在正常数 $T_0(\gamma_0)$ ，使得初值问题式 (18) 和式 (20) 有唯一解 $\Phi \in X(0, T_0)$ ，满足

$$\|\Phi\|_{H^2}^2 \leq K \|\Phi_0\|_{H^2}^2 \tag{22}$$

对于定理 2 中的初值问题式 (18) 和式 (20) 的全局存在性及不等式 (21)，需要在局部解存在的基础上给出一致先验估计。

引理 2 (Young 不等式 [14]) a. 令 $a > 0, b > 0$ ，且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1, q < +\infty$ ，则有下列不等式成立：

$$ab \leq \theta a^p + C(\theta) b^q$$

其中， θ 是大于零的任意常数，且 $C(\theta) = \frac{1}{q}(\theta p)^{-\frac{q}{p}}$ 。

b. 如果 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1, q < +\infty$ ，且满足 $u \in L^p, v \in L^q$ ，那么，

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \frac{1}{p} \|u(x)\|_p^p + \frac{1}{q} \|v(x)\|_q^q$$

命题 1 (先验估计) 假设 $\Phi \in X(0, T), T > 0$ ，是初值问题式 (18) 和式 (20) 的解。令

$$N(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} \{\|\Phi(\tau)\|_{H^2} + \|\psi(\tau)\|_{H^1}\}$$

其中， $t \in [0, T]$ ，则存在与 $u_{\pm}$ 无关的常数 $\delta_3, \gamma_3 (\gamma_3 \leq |u_- - u_+|)$ 和正常数 C_2 ，使得当 $|u_- - u_+| \leq \delta_3$ 和 $N_0(t) \leq \gamma_3$ 时，下面估计式对 $t \in [0, T]$ 成立：

$$N^2(t) + \int_0^t \left(\left\| \sqrt{|U_{\xi}|} \Phi \right\|^2 + \|\Phi_{\xi}\|^2 + \|\psi_{\xi}\|^2 + \|\psi_{\xi\xi}\|^2 \right) d\tau \leq C_2 N_0^2 \tag{23}$$

证明 通过对 Φ 进行低阶和高阶估计来证明式 (23) 成立。

a. 低阶先验估计。
首先，用 Φ 乘以式 (19)，则式 (19) 化为 $\Phi \Phi_t - c \Phi \Phi_{\xi} - \alpha \Phi \Phi_{\xi\xi} + \beta \Phi \Phi_{\xi\xi\xi} + g'(U) \Phi \Phi_{\xi} = \Phi F(U, \Phi_{\xi})$ (24)
由于

$$\begin{aligned} &\Phi \Phi_t = \frac{1}{2} (\Phi^2)_t \\ &- c \Phi \Phi_{\xi} = - \frac{c}{2} (\Phi^2)_{\xi} \\ &- \alpha \Phi \Phi_{\xi\xi} + \beta \Phi \Phi_{\xi\xi\xi} = \Phi (-\alpha \Phi_{\xi} + \beta \Phi_{\xi\xi})_{\xi} = \\ &\quad \left[\Phi (-\alpha \Phi_{\xi} + \beta \Phi_{\xi\xi}) \right]_{\xi} - \Phi_{\xi} (-\alpha \Phi_{\xi} + \beta \Phi_{\xi\xi}) = \\ &\quad \left[-\alpha \Phi \Phi_{\xi} + \beta \Phi \Phi_{\xi\xi} - \frac{\beta}{2} \Phi_{\xi}^2 \right]_{\xi} + \alpha (\Phi_{\xi})^2 \\ &g'(U) \Phi \Phi_{\xi} = \frac{1}{2} (g'(U) \Phi^2)_{\xi} - \frac{1}{2} g''(U) U_{\xi} \Phi^2 \end{aligned}$$

故式 (24) 可写为

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2} \Phi^2 \right)_t + \alpha \Phi_{\xi}^2 - \frac{1}{2} g''(U) U_{\xi} \Phi^2 + \\ &\quad \{Q_1\}_{\xi} = \Phi F(U, \Phi_{\xi}) \end{aligned} \tag{25}$$

其中，
 $Q_1 = -\alpha \Phi \Phi_{\xi} + \beta \Phi \Phi_{\xi\xi} - \frac{\beta}{2} \Phi_{\xi}^2 - \frac{c}{2} \Phi^2 + \frac{1}{2} g'(U) \Phi^2$

又 $r \leq \lambda_0$ ，即 $\alpha \geq -\lambda_0$ ，代入式 (25) 中左边第 2 项，可得 $r \Phi_{\xi}^2 \geq -\lambda_0 \Phi_{\xi}^2$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} (\Phi^2)_t - \lambda_0 \Phi_{\xi}^2 - \frac{1}{2} g''(U) U_{\xi} \Phi^2 + \\ &\quad \{Q_1\}_{\xi} \leq \Phi F(U, \Phi_{\xi}) \end{aligned} \tag{26}$$

将式 (26) 分别对 t 和 ξ 积分，则式 (26) 可化为 $\frac{1}{2} \|\Phi\|^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(-\lambda_0 \Phi_{\xi}^2 - \frac{1}{2} g''(U) U_{\xi} \Phi^2 \right) d\xi d\tau \leq \frac{1}{2} \|\Phi_0\|^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi F(U, \Phi_{\xi}) d\xi d\tau$

即

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|\Phi\|^2 + \int_0^t \left(|\lambda_0| \|\Phi_{\xi}\|^2 + \left| \frac{1}{2} g''(U) \right| \left\| \sqrt{|U_{\xi}|} \Phi \right\|^2 \right) d\tau \leq \\ &\quad \frac{1}{2} \|\Phi_0\|^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |\Phi F(U, \Phi_{\xi})| d\xi d\tau \end{aligned} \tag{27}$$

由此推知，存在 C_1 ，使得 $\|\Phi\|^2 + \int_0^t \left(\left\| \sqrt{|U_{\xi}|} \Phi \right\|^2 + \|\Phi_{\xi}\|^2 \right) d\tau \leq C_1 \left\{ \|\Phi_0\|^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |\Phi F(U, \Phi_{\xi})| d\xi d\tau \right\}$

b. 高阶先验估计。
将式 (15) 线性化，有 $\psi_t - c \psi_{\xi} - \alpha \psi_{\xi\xi} + \beta \psi_{\xi\xi\xi} + g''(U) U_{\xi} \psi + f'(U) \psi_{\xi} = F_{\xi}$ (28)
令 $G = F_{\xi}$ ，其中，
 $G = [g'(U) - g'(U + \psi)] U_{\xi} - [g'(U + \psi) - g'(U)] \psi_{\xi} + g''(U) U_{\xi} \psi$

(a) 用 ψ 乘以式(28), 有

$$\psi\psi_t - c\psi\psi_\xi - \alpha\psi\psi_{\xi\xi} + \beta\psi\psi_{\xi\xi\xi} + g''(U)U_\xi\psi^2 + g'(U)\psi\psi_\xi = \psi G \quad (29)$$

类似于对式(24)的分析, 则式(29)可改写为

$$\frac{1}{2}(\psi^2)_t + \alpha\psi_\xi^2 + \frac{1}{2}g''(U)U_\xi\psi^2 + \{Q_2\}_\xi = \psi G \quad (30)$$

其中,

$$Q_2 = -\alpha\psi\psi_\xi + \beta\psi\psi_{\xi\xi} - \frac{1}{2}\beta\psi_\xi^2 - \frac{c}{2}\psi^2 + \frac{1}{2}g'(U)\psi^2$$

又由 $\alpha \geq -\lambda_0$, 代入式(30), 可得

$$\frac{1}{2}(\psi^2)_t - \lambda_0\psi_\xi^2 + \{Q_2\}_\xi \leq \psi G - \frac{1}{2}g''(U)U_\xi\psi^2 \quad (31)$$

将式(31)分别对 t 和 ξ 积分, 则有

$$\frac{1}{2}\|\psi\|^2 + \int_0^t \|\lambda_0\|\|\psi_\xi\|^2 d\tau \leq \frac{1}{2}\|\psi_0\|^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left| \psi G - \frac{1}{2}g''(U)U_\xi\psi^2 \right| d\xi d\tau \quad (32)$$

(b) 将式(28)对 ξ 求导, 可得

$$\psi_{t\xi} - c\psi_{\xi\xi} - \alpha\psi_{\xi\xi\xi} + \beta\psi_{\xi\xi\xi\xi} + g'(U)_{\xi\xi}\psi + 2g'(U)_\xi\psi_\xi + g'(U)\psi_{\xi\xi} = G_\xi \quad (33)$$

用 ψ_ξ 乘以式(33), 可得

$$\psi_\xi\psi_{t\xi} - c\psi_\xi\psi_{\xi\xi} - \alpha\psi_\xi\psi_{\xi\xi\xi} + \beta\psi_\xi\psi_{\xi\xi\xi\xi} + g'(U)_{\xi\xi}\psi\psi_\xi + 2g'(U)_\xi\psi_\xi^2 + g'(U)\psi_\xi\psi_{\xi\xi} = \psi_\xi G_\xi \quad (34)$$

$$\frac{1}{2}\|\Phi\|^2 + \frac{1}{2}\|\psi\|^2 + \frac{1}{2}\|\psi_\xi\|^2 + \int_0^t \left(\frac{1}{2}g''(U) \left\| \sqrt{|U_\xi|}\Phi \right\|^2 + \|\lambda_0\|\|\Phi_\xi\|^2 + \|\lambda_0\|\|\psi_\xi\|^2 + \|\lambda_0\|\|\psi_{\xi\xi}\|^2 \right) d\tau \leq \frac{1}{2}\|\Phi_0\|^2 + \frac{1}{2}\|\psi_0\|^2 + \frac{1}{2}\|\psi_{0\xi}\|^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\left| \frac{1}{2}g''(U)U_\xi\psi^2 \right| + \left| \frac{3}{2}g''(U)U_\xi\psi_\xi^2 \right| + |g'(U)_{\xi\xi}\psi\psi_\xi| + |\Phi F(U, \Phi_\xi)| + |\psi G| + |\psi_\xi G_\xi| \right) d\xi d\tau$$

进而存在常数 C_2 , 使得

$$\|\Phi\|^2 + \|\psi\|^2 + \|\psi_\xi\|^2 + \int_0^t \left(\left\| \sqrt{|U_\xi|}\Phi \right\|^2 + \|\Phi_\xi\|^2 + \|\psi_\xi\|^2 + \|\psi_{\xi\xi}\|^2 \right) d\tau \leq C_2 \left\{ \|\Phi_0\|^2 + \|\psi_0\|^2 + \|\psi_{0\xi}\|^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(|g''(U)U_\xi\psi^2| + |g''(U)U_\xi\psi_\xi^2| + |g'(U)_{\xi\xi}\psi\psi_\xi| + |\Phi F(U, \Phi_\xi)| + |\psi G| + |\psi_\xi G_\xi| \right) d\xi d\tau \right\} \quad (38)$$

注意到式(38)右端第4项, 利用 Young 不等式, 有

$$\int_{\mathbb{R}} g''(U)U_\xi\psi^2 d\xi \leq \eta(g''(U))^2\|\psi\|^2 + C(\eta)U_\xi^2\|\psi\|^2 \quad (39)$$

其中, η 是一充分小的常数。又由 $U(\xi)$ 具有性质3, 有 $U_\xi^2 \leq C|u_- - u_+|^2$ (由于 C 为一常数, 平方后仍为一常数, 所以, 这里仍记为 C , 以下相同), 所以, 不等式(39)中不等号右边两项可由不等式(38)左端的第4项控制。

同理, 对式(38)中的 $\int_{\mathbb{R}} g''(U)U_\xi\psi_\xi^2 d\xi$ 和 $\int_{\mathbb{R}} g'(U)_{\xi\xi}\psi\psi_\xi d\xi$, 运用 Young 不等式, 可以推出这

同理, 类似于对式(24)的分析, 则式(34)可改写为

$$\frac{1}{2}(\psi_\xi^2)_t + \alpha\psi_\xi^2 + \{Q_3\}_\xi = -\frac{3}{2}g''(U)U_\xi\psi_\xi^2 - g'(U)_{\xi\xi}\psi\psi_\xi + \psi_\xi G_\xi \quad (35)$$

其中,

$$Q_3 = -\frac{c}{2}\psi_\xi^2 - \alpha\psi_\xi\psi_{\xi\xi} + \beta\psi_\xi\psi_{\xi\xi\xi} - \frac{\beta}{2}\psi_{\xi\xi}^2 + \frac{1}{2}g'(U)\psi_\xi^2$$

又式(35)左边第2项有 $\alpha\psi_\xi^2 \geq -\lambda_0\psi_{\xi\xi}^2$, 代入式(35), 可得

$$\frac{1}{2}(\psi_\xi^2)_t - \lambda_0\psi_{\xi\xi}^2 + \{Q_3\}_\xi \leq -\frac{3}{2}g''(U)U_\xi\psi_\xi^2 - g'(U)_{\xi\xi}\psi\psi_\xi + \psi_\xi G_\xi \quad (36)$$

将式(36)分别对 t 和 ξ 积分, 有

$$\frac{1}{2}\|\psi_\xi\|^2 + \int_0^t \|\lambda_0\|\|\psi_{\xi\xi}\|^2 d\tau \leq \frac{1}{2}\|\psi_{0\xi}\|^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(-\frac{3}{2}g''(U)U_\xi\psi_\xi^2 - g'(U)_{\xi\xi}\psi\psi_\xi + \psi_\xi G_\xi \right) d\xi d\tau \quad (37)$$

再将式(27), 式(32), 式(37)这3式相加, 有

两项均可由不等式(38)左端的第4项控制。从而存在常数 C_3 , 使得

$$\|\Phi\|^2 + \|\psi\|^2 + \|\psi_\xi\|^2 + \int_0^t \left(\left\| \sqrt{|U_\xi|}\Phi \right\|^2 + \|\Phi_\xi\|^2 + \|\psi_\xi\|^2 + \|\psi_{\xi\xi}\|^2 \right) d\tau \leq C_3 \left\{ \|\Phi_0\|^2 + \|\psi_0\|^2 + \|\psi_{0\xi}\|^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (|\Phi F(U, \Phi_\xi)| + |\psi G| + |\psi_\xi G_\xi|) d\xi d\tau \right\} \quad (40)$$

又因为,

$$F(U, \Phi_\xi) = -(g(U + \Phi_\xi) - g(U)) - g'(U)\Phi_\xi = -\{g'(U + \theta\Phi_\xi)\Phi_\xi - g'(U)\Phi_\xi\}$$

$$\begin{aligned} G = F_{\xi} = & -\{g'(U + \Phi_{\xi})(U_{\xi} + \Phi_{\xi\xi}) - \\ & g'(U)U_{\xi} - g'(U)\Phi_{\xi\xi} - g''(U)U_{\xi}\Phi_{\xi}\} = \\ & -\{g''(U + \theta\Phi_{\xi})U_{\xi}\Phi_{\xi} + g''(U + \theta\Phi_{\xi})\Phi_{\xi}\Phi_{\xi\xi} - \\ & g''(U)U_{\xi}\Phi_{\xi}\} \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \Phi F(U, \Phi_{\xi}) d\xi = & \int_{\mathbb{R}} (g'(U + \theta\Phi_{\xi}) - g'(U)) \Phi \Phi_{\xi} d\xi = \\ \int_{\mathbb{R}} & ((g'(U + \theta\Phi_{\xi}) - g'(U)) \Phi^2)_{\xi} - (g'(U + \theta\Phi_{\xi}) - \\ & g'(U))' \Phi^2 d\xi = - \int_{\mathbb{R}} (g''(U + \theta\Phi_{\xi}) - g''(U)) U_{\xi} \Phi^2 d\xi \end{aligned}$$

利用 Young 不等式, 可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} & |g''(U + \theta\Phi_{\xi}) - g''(U)) U_{\xi} \Phi^2| d\xi \leq \\ & \eta_0 (g''(U + \theta\Phi_{\xi}) - g''(U))^2 \|\Phi\|^2 + C(\eta_0) U_{\xi}^2 \|\Phi\|^2 \end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi F(U, \Phi_{\xi}) d\xi \leq \eta_0 (g''(U + \theta\Phi_{\xi}) - g''(U))^2 \|\Phi\|^2 +$$

$$C(\eta_0) U_{\xi}^2 \|\Phi\|^2 \leq C_4 |u_- - u_+|^2 \|\Phi\|^2$$

同样, 利用 Young 不等式, 可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} & |g''(U + \theta\Phi_{\xi}) U_{\xi} \psi \Phi_{\xi}| d\xi \leq \\ & \eta_1 (g''(U + \theta\Phi_{\xi}))^2 \|\psi\|^2 + C(\eta_1) U_{\xi}^2 \|\Phi_{\xi}\|^2 \end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}} |g''(U + \theta\Phi_{\xi}) \psi \Phi_{\xi} \Phi_{\xi\xi}| d\xi \leq$$

$$\begin{aligned} C_5 N(t) \int_{\mathbb{R}} & g''(U + \theta\Phi_{\xi}) \Phi_{\xi} \Phi_{\xi\xi} d\xi \leq \\ C_5 N(t) & (\eta_2 \|\Phi_{\xi}\|^2 + C(\eta_2) (g''(U + \theta\Phi_{\xi}))^2 \|\Phi_{\xi\xi}\|^2) \end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}} |-g''(U) U_{\xi} \psi \Phi_{\xi}| d\xi \leq \eta_3 (g''(U))^2 \|\psi\|^2 + C(\eta_3) U_{\xi}^2 \|\Phi_{\xi}\|^2$$

所以,

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi G| d\xi \leq C_6 N(t) (\|\psi\|^2 + \|\psi_{\xi}\|^2) + |u_- - u_+|^2 \|\psi\|^2 \quad (41)$$

同理, 类似于对 $\int_{\mathbb{R}} \Phi F(U, \Phi_{\xi}) d\xi$ 和 $\int_{\mathbb{R}} \psi G d\xi$ 的分析, 可得

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_{\xi} G_{\xi}| d\xi \leq C_7 N(t) \|\psi_{\xi}\|^2 + |u_- - u_+|^2 \|\psi_{\xi\xi}\|^2 \quad (42)$$

从而

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} & (|\Phi F(U, \Phi_{\xi})| + |\psi G| + |\psi_{\xi} G_{\xi}|) d\xi d\tau \leq \\ C_8 N(t) & \int_0^t (\|\psi\|^2 + \|\psi_{\xi}\|^2) d\tau + \\ C_9 |u_- - u_+|^2 & \int_0^t (\|\Phi\|^2 + \|\psi\|^2 + \|\psi_{\xi\xi}\|^2) d\tau \quad (43) \end{aligned}$$

由于在局部存在的时间区间内, 式(22)成立, 可得

$$\begin{aligned} N(t) \leq & \sup_{0 \leq \tau \leq T} \{K \|\Phi_0(\tau)\|_{H^2}^2 + K \|\Phi_{0\xi}(\tau)\|_{H^1}^2\} = \\ K \sup_{0 \leq \tau \leq T} & \{\|\Phi_0(\tau)\|_{H^2}^2 + \|\psi_0(\tau)\|_{H^1}^2\} = K N_0^2(t) \end{aligned}$$

故存在 δ_3 和 γ_3 , 当 $|u_- - u_+| \leq \delta_3$ 和 $N_0(t) \leq \gamma_3$ 时。式(43)右端积分式可被不等式(40)左端相应积分项所控制。于是, 可得命题 1。

现证明定理 1

证明 a. 因为, 命题 1 成立, 由定理 3 可知, $\Phi \in X(0, T_0)$, 将 $\Phi(0, T_0)$ 作为问题式(18)和式(20)的初值, 由定理 3 和命题 1 可知, 存在充分小的 T_1 , 使得问题式(18)和式(20)存在唯一解 $\Phi \in X(0, T_0 + T_1)$, 再将以上步骤反复进行, 最后就可将局部解延拓到整个时间 $T \geq 0$ 。那么, 可知存在唯一全局解

$$\Phi \in X(0, \infty) = \{\Phi \in C^0(0, \infty; H^2), \Phi_{\xi} \in L^2(0, \infty; H^2)\}$$

由此可知:

(a) $\Phi_{\xi} \in L^2(0, \infty; H^2)$, 即 $\psi \in L^2(0, \infty; H^2)$; (b) $\Phi \in C^0(0, \infty; H^2)$, 所以, 可知 $\Phi_{\xi} \in C^0(0, \infty; H^1)$, 即 $\psi \in C^0(0, \infty; H^1)$ 。

据(a)和(b)可以推知

$$\psi \in C^0(0, \infty; H^1) \cap L^2(0, \infty; H^2)$$

即

$$u - U \in C^0(0, \infty; H^1) \cap L^2(0, \infty; H^2)$$

故式(13)得证。

b. 由式(23)可知, $\|\psi\|_{H^1}$ 关于 t 连续, $\int_0^{+\infty} \|\psi\|_{H^2}^2 dt$ 存在, 且根据式(23)可推知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\psi(t)\|_{H^2}^2 = 0 \quad (44)$$

式(44)意味着对任意的 $t > 0$, 有

$$\int_0^t \|\psi\|_{H^2}^2 d\tau \leq C_2 N_0^2$$

由于被积函数非负, 可知 $\|\psi\|_{H^2}^2$ 关于 t 在 $[0, \infty)$ 上可积, 即有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\psi(t)\|_{H^2}^2 = 0 \quad (45)$$

根据不等式^[15]

$$\|f\|_{L^\infty(R^n)} \leq C \|f\|_{H^{\frac{n}{2}}(R^n)}$$

可得

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi| \leq C \|\psi\|_{H^2}$$

由此, 根据式(45)即可推得

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi| \rightarrow 0, \text{ 当 } t \rightarrow \infty$$

故定理 1 得证。

4 方程(1)单调递减扭状孤波解扰动的衰减估计

前面已经证明了方程(1)单调递减行波解 $U(\xi)$ 是渐近稳定的, 即在满足定理1条件下, 方程(1)单调递减扭状孤波解 $U(\xi)$ 的扰动 $\psi(t, \xi)$ 当 $t \rightarrow \infty$ 时是衰减于零的。现进一步研究扰动 $\psi(t, \xi)$ 的衰减率问题。

引理3 (Gagliardo-Nirenberg 不等式^[16]) 假设 $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $D^m u \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p, q < \infty$, 则对任意 $j(0 \leq j < m)$, 有

$$\|D^j u\|_r \leq C \|u\|_p^{1-\lambda} \|D^m u\|_q^\lambda$$

其中,

$$\frac{1}{r} - \frac{j}{n} = \lambda \left(\frac{1}{q} - \frac{m}{n} \right) + (1-\lambda) \frac{1}{p}, \quad \frac{j}{m} \leq \lambda \leq 1$$

当 $m - \frac{n}{q} = j$, $1 < q < \infty$ 时, $\lambda \neq 1$ 。

定理4 假设 $U(\xi)(\xi = x - ct)$ 是方程(1)如定理1所设的扭状孤波解, 初值 u_0 满足式(11)和式(12), 则存在1个与 t 无关的正常数 C_{11} , 使得

$$(1+t) \|\Phi_\xi\|^2 + \int_0^t \left((1+\tau) \|\Phi_\xi\|^2 + (1+\tau) \|\Phi_{\xi\xi}\|^2 \right) d\tau \leq C_{11} \sigma_0^2 \quad (46)$$

成立。其中, $\sigma_0 = |u_- - u_+|$ 是一个充分小的数, 且式(46)中 Φ_ξ , $\Phi_{\xi\xi}$ 如前所设, 以下相同。

证明 将式(19)对 ξ 求导一次, 有

$$\begin{aligned} & \Phi_{t\xi} - c\Phi_{\xi\xi} - \alpha\Phi_{\xi\xi\xi} + \beta\Phi_{\xi\xi\xi\xi} + \\ & (g'(U)\Phi_\xi)_\xi = F_\xi(U, \Phi_\xi) \end{aligned} \quad (47)$$

在式(47)两边同乘以 $(1+t)\Phi_\xi$, 有

$$\begin{aligned} & (1+t)\Phi_\xi\Phi_{t\xi} - c(1+t)\Phi_\xi\Phi_{\xi\xi} - \alpha(1+t)\Phi_\xi\Phi_{\xi\xi\xi} + \\ & \beta(1+t)\Phi_\xi\Phi_{\xi\xi\xi\xi} + (1+t)\Phi_\xi(g'(U)\Phi_\xi)_\xi = \\ & (1+t)\Phi_\xi F_\xi(U, \Phi_\xi) \end{aligned} \quad (48)$$

由于

$$\begin{aligned} & (1+t)\Phi_\xi\Phi_{t\xi} = \left(\frac{1}{2}(1+t)\Phi_\xi^2 \right)_t - \frac{1}{2}\Phi_\xi^2 - c(1+t)\Phi_\xi\Phi_{\xi\xi} = \\ & \left(\frac{c}{2}(1+t)\Phi_\xi^2 \right)_\xi - \alpha(1+t)\Phi_\xi\Phi_{\xi\xi\xi} + \beta(1+t)\Phi_\xi\Phi_{\xi\xi\xi\xi} = \\ & (1+t)\Phi_\xi(-\alpha\Phi_{\xi\xi\xi} + \beta\Phi_{\xi\xi\xi\xi})_\xi = [(1+t)\Phi_\xi(-\alpha\Phi_{\xi\xi\xi} + \beta\Phi_{\xi\xi\xi\xi})]_\xi - \\ & (1+t)\Phi_\xi(-\alpha\Phi_{\xi\xi\xi} + \beta\Phi_{\xi\xi\xi\xi}) = \\ & [(1+t)\Phi_\xi(-\alpha\Phi_{\xi\xi\xi} + \beta\Phi_{\xi\xi\xi\xi})]_\xi - \alpha(1+t)\Phi_\xi\Phi_{\xi\xi\xi} - \\ & \frac{\beta}{2}(1+t)(\Phi_{\xi\xi}^2)_\xi = \left\{ (1+t)\Phi_\xi(-\alpha\Phi_{\xi\xi\xi} + \beta\Phi_{\xi\xi\xi\xi}) - \right. \\ & \left. \frac{\beta}{2}(1+t)\Phi_{\xi\xi}^2 \right\}_\xi + \alpha(1+t)\Phi_{\xi\xi}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (1+t)\Phi_\xi(g'(U)\Phi_\xi)_\xi = [(1+t)\Phi_\xi g'(U)\Phi_\xi]_\xi - \\ & (1+t)\Phi_{\xi\xi}g'(U)(1+t)g''(U)U_\xi\Phi_\xi^2 + \\ & \{(1+t)\Phi_\xi^2 g'(U)\}_\xi \end{aligned}$$

故式(48)可写为

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}(1+t)\Phi_\xi^2 \right)_t + \alpha(1+t)\Phi_{\xi\xi}^2 + \frac{1}{2}(1+t)g''(U)U_\xi\Phi_\xi^2 + \\ & \{Q_4\}_\xi = \frac{1}{2}\Phi_\xi^2 + (1+t)\Phi_\xi F_\xi(U, \Phi_\xi) \end{aligned} \quad (49)$$

其中,

$$\begin{aligned} Q_4 = & \frac{c}{2}(1+t)\Phi_\xi^2 + (1+t)\Phi_\xi(-\alpha\Phi_{\xi\xi\xi} + \beta\Phi_{\xi\xi\xi\xi}) - \\ & \frac{\beta}{2}(1+t)\Phi_{\xi\xi}^2 + (1+t)\Phi_\xi^2 g'(U) \end{aligned}$$

又由式(49)左边第2项, 有

$$\alpha(1+t)\Phi_{\xi\xi}^2 \geq -\lambda_0(1+t)\Phi_{\xi\xi}^2 \quad (50)$$

将式(50)代入式(49)中, 有

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}(1+t)\Phi_\xi^2 \right)_t - \lambda_0(1+t)\Phi_{\xi\xi}^2 + \frac{1}{2}(1+t)g''(U)U_\xi\Phi_\xi^2 + \\ & \{Q_4\}_\xi \leq \frac{1}{2}\Phi_\xi^2 + (1+t)\Phi_\xi F_\xi(U, \Phi_\xi) \end{aligned} \quad (51)$$

将式(51)分别对 t 和 ξ 积分, 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(1+t)\|\Phi_\xi\|^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\lambda_0(1+\tau)\Phi_{\xi\xi}^2 + \right. \\ & \left. \left| \frac{1}{2}(1+\tau)g''(U)U_\xi\Phi_\xi^2 \right| \right) d\xi d\tau \frac{1}{2}\|\Phi_{0\xi}\|^2 + \\ & \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\left| \frac{1}{2}\Phi_\xi^2 \right| + |(1+\tau)\Phi_\xi F_\xi(U, \Phi_\xi)| \right) d\xi d\tau \end{aligned}$$

故存在常数 C_{10} , 有

$$\begin{aligned} & (1+t)\|\Phi_\xi\|^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} ((1+\tau)\Phi_{\xi\xi}^2 + (1+\tau)\Phi_\xi^2) d\xi d\tau \leq \\ & C_{10} \left\{ \|\Phi_{0\xi}\|^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (\Phi_\xi^2 + (1+\tau)\Phi_\xi F_\xi(U, \Phi_\xi)) d\xi d\tau \right\} \end{aligned} \quad (52)$$

又由式(23)可知

$$\int_0^t \|\Phi_\xi\|^2 d\tau \leq C_2 N_0^2 \leq C_2 |u_- - u_+|^2$$

注意到式(52)中,

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (1+\tau)\Phi_\xi F_\xi(U, \Phi_\xi) d\xi d\tau = \\ & \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (1+\tau)\psi G(U, \Phi_\xi) d\xi d\tau \end{aligned}$$

类似于对式(41)与式(43)的分析, 有

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (1+\tau)\psi G(U, \Phi_\xi) d\xi d\tau \leq \\ & \int_0^t (1+\tau)(C_6 N(t)(\|\psi\|^2 + \|\psi_\xi\|^2) + |u_- - u_+|^2 \|\psi\|^2) d\tau \leq \\ & \int_0^t (1+\tau)(C_6 N_0^2(\|\psi\|^2 + \|\psi_\xi\|^2) + |u_- - u_+|^2 \|\psi\|^2) d\tau \leq \\ & \sigma_1^2 \int_0^t (1+\tau)(\|\psi\|^2 + \|\psi_\xi\|^2) d\tau \end{aligned}$$

其中, $\sigma_1 = C|u_- - u_+| = C\sigma_0$ 。从而不等式(52)右端

积分项可由左端相应积分项控制, 则存在常数

C_{11} , 可将式(52)改写为

$$(1+t)\|\Phi_{\xi}\|^2 + \int_0^t \left((1+\tau)\|\Phi_{\xi}\|^2 + (1+\tau)\|\Phi_{\xi\xi}\|^2 \right) d\tau \leq C_{11}\sigma_0^2 \quad (53)$$

故定理4得证。

定理5 假设 $U(\xi)(\xi = x - ct)$ 是方程(1)如定理1所设的扭状孤波解, 初值 u_0 满足式(11)和式(12), 则存在1个与 t 无关的正常数 C_{12} , 使得

$$(1+t)^2\|\Phi_{\xi\xi}\|^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left((1+\tau)^2\Phi_{\xi\xi}^2 + (1+\tau)^2\Phi_{\xi\xi\xi}^2 \right) d\xi d\tau \leq C_{12}\sigma_0^2$$

成立, 其中, $\sigma_0 = |u_- - u_+|$ 是1个充分小的数。

证明 将式(19)对 ξ 求二阶导数, 有

$$\Phi_{i\xi\xi} - c\Phi_{\xi\xi\xi} - \alpha\Phi_{\xi\xi\xi\xi} + \beta\Phi_{\xi\xi\xi\xi\xi} + (g'(U)\Phi_{\xi})_{\xi\xi} = F_{\xi\xi}(U, \Phi_{\xi}) \quad (54)$$

在式(54)两边同时乘以 $(1+t)^2\Phi_{\xi\xi}$, 有

$$(1+t)^2\Phi_{\xi\xi}\Phi_{i\xi\xi} - c(1+t)^2\Phi_{\xi\xi}\Phi_{\xi\xi\xi} - \alpha(1+t)^2\Phi_{\xi\xi}\Phi_{\xi\xi\xi\xi} + \beta(1+t)^2\Phi_{\xi\xi}\Phi_{\xi\xi\xi\xi\xi} + (1+t)^2\Phi_{\xi\xi}(g'(U)\Phi_{\xi})_{\xi\xi} = (1+t)^2\Phi_{\xi\xi}F_{\xi\xi}(U, \Phi_{\xi}) \quad (55)$$

类似于对式(48)的分析, 式(55)可改写为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}((1+t)^2\Phi_{\xi\xi}^2)_t + \alpha(1+t)^2\Phi_{\xi\xi\xi}^2 + \\ & \frac{1}{2}(1+t)^2g''(U)U_{\xi}\Phi_{\xi\xi}^2 + \{Q_5\}_{\xi} = \\ & (1+t)\Phi_{\xi\xi}^2 + (1+t)^2g''(U)U_{\xi}\Phi_{\xi}\Phi_{\xi\xi\xi} + \\ & (1+t)^2\Phi_{\xi\xi}F_{\xi\xi}(U, \Phi_{\xi}) \end{aligned} \quad (56)$$

其中,

$$\begin{aligned} Q_5 = & \frac{c}{2}(1+t)^2\Phi_{\xi\xi}^2 + (1+t)^2\Phi_{\xi\xi}(-\alpha\Phi_{\xi\xi\xi} + \beta\Phi_{\xi\xi\xi\xi}) - \\ & \frac{\beta}{2}(1+t)^2\Phi_{\xi\xi\xi}^2 + (1+t)^2\Phi_{\xi\xi}(g''(U)U_{\xi}\Phi_{\xi} + g'(U)\Phi_{\xi\xi}) \end{aligned}$$

又由式(56)左边第2项, 有

$$\alpha(1+t)^2\Phi_{\xi\xi\xi}^2 \geq -\lambda_0(1+t)^2\Phi_{\xi\xi\xi}^2 \quad (57)$$

将式(57)代入式(56)中, 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}((1+t)^2\Phi_{\xi\xi}^2)_t - \lambda_0(1+t)^2\Phi_{\xi\xi\xi}^2 + \\ & \frac{1}{2}(1+t)^2g''(U)U_{\xi}\Phi_{\xi\xi}^2 + \{Q_5\}_{\xi} \leq \\ & (1+t)\Phi_{\xi\xi}^2 + (1+t)^2g''(U)U_{\xi}\Phi_{\xi}\Phi_{\xi\xi\xi} + \\ & (1+t)^2\Phi_{\xi\xi}F_{\xi\xi}(U, \Phi_{\xi}) \end{aligned} \quad (58)$$

将式(58)分别对 t 和 ξ 积分, 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(1+t)^2\|\Phi_{\xi\xi}\|^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\lambda_0(1+\tau)^2\Phi_{\xi\xi\xi}^2 + \right. \\ & \left. \frac{1}{2}(1+\tau)^2g''(U)U_{\xi}\Phi_{\xi\xi}^2 \right) d\xi d\tau \frac{1}{2}\|\Phi_{0\xi\xi}\|^2 + \\ & \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(|(1+\tau)\Phi_{\xi\xi}^2| + |(1+\tau)^2g''(U)U_{\xi}\Phi_{\xi}\Phi_{\xi\xi\xi}| + \right. \\ & \left. |(1+\tau)^2\Phi_{\xi\xi}F_{\xi\xi}(U, \Phi_{\xi})| \right) d\xi d\tau \end{aligned} \quad (59)$$

由式(53)可知

$$\int_0^t (1+\tau)\|\Phi_{\xi\xi}\|^2 d\tau \leq C_{11}\sigma_0^2 \quad (60)$$

注意到不等式(59)右端第3项, 运用Young不等式, 有

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g''(U)U_{\xi}\Phi_{\xi}\Phi_{\xi\xi\xi} d\xi d\tau \leq \\ & \int_0^t \left(\eta(g''(U))^2\|\Phi_{\xi}\|^2 + C(\eta)U_{\xi}^2\|\Phi_{\xi\xi\xi}\|^2 \right) d\tau \end{aligned}$$

其中, η 是1个充分小的数, 且 U_{ξ}^2 满足性质3。又由式(23), 有

$$\int_0^t (\|\Phi_{\xi}\|^2 + \|\psi_{\xi\xi}\|^2) d\tau \leq C_2N_0^2$$

从而,

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g''(U)U_{\xi}\Phi_{\xi}\Phi_{\xi\xi\xi} d\xi d\tau \leq \\ & \int_0^t \left(\eta(g''(U))^2\|\Phi_{\xi}\|^2 + C(\eta)U_{\xi}^2\|\Phi_{\xi\xi\xi}\|^2 \right) d\tau \leq C_2N_0^2 \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (1+\tau)^2\Phi_{\xi\xi}F_{\xi\xi}(U, \Phi_{\xi}) d\xi d\tau = \\ & \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (1+\tau)^2\psi_{\xi}G_{\xi}(U, \Phi_{\xi}) d\xi d\tau \end{aligned}$$

根据式(42), 有

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (1+\tau)^2\psi_{\xi}G_{\xi}(U, \Phi_{\xi}) d\xi d\tau \leq \\ & \int_0^t (1+\tau)^2(C_7N(t)\|\psi_{\xi}\|^2 + |u_- - u_+|^2\|\psi_{\xi\xi}\|^2) d\tau \leq \\ & \sigma_2^2 \int_0^t (1+\tau)^2(C_7N_0^2\|\psi_{\xi}\|^2 + |u_- - u_+|^2\|\psi_{\xi\xi}\|^2) d\tau \leq \\ & \sigma_2^2 \int_0^t (1+\tau)^2(\|\psi_{\xi}\|^2 + \|\psi_{\xi\xi}\|^2) d\tau \end{aligned} \quad (61)$$

其中, $\sigma_2 = C\sigma_0$, 从而不等式(60)右端积分项可由式(59)左端相应积分项控制, 则存在常数 C_{12} , 可将式(59)改写为

$$\begin{aligned} & (1+t)^2\|\Phi_{\xi\xi}\|^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} ((1+\tau)^2\Phi_{\xi\xi}^2 + C_{12}\sigma_0^2 \\ & (1+\tau)^2\Phi_{\xi\xi\xi}^2) d\xi d\tau \leq C_{12}\sigma_0^2 \end{aligned} \quad (62)$$

故定理5得证。

由式(53)可知

$$(1+t)\|\Phi_{\xi}\|^2 \leq C_{11}\sigma_0^2 \quad (63)$$

又由式(61), 有

$$(1+t)^2 \|\Phi_{\xi\xi}\|^2 \leq C_{12} \sigma_0^2 \quad (64)$$

由式(62)和式(63), 有

$$(1+t)^k \|D^k \Phi(\cdot, t)\|^2 \leq C_{1k} \sigma_0^2, k=1, 2 \quad (65)$$

因此, 可得 Φ 的 $k(k=1, 2)$ 阶导数在 L^2 范数意义下的衰减速度为

$$\|D^k \Phi(\cdot, t)\|_{L^2} \leq C_{1k} \sigma_0 (1+t)^{-\frac{k}{2}}, k=1, 2 \quad (66)$$

再由 Gagliardo-Nirenberg 不等式, 得到 ψ 在 L^∞ 范数意义下的衰减速度为

$$\begin{aligned} \|\Phi_\xi(\cdot, t)\|_{L^\infty} &\leq C_{13} \|\Phi_\xi(\cdot, t)\|_{L^2}^{1-\frac{1}{4}} \|D^2 \Phi_\xi(\cdot, t)\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \leq \\ &C \sigma_0 (1+t)^{-\frac{1}{4}} \end{aligned} \quad (67)$$

又 $\psi = \Phi_\xi$, 则方程(1)单调递减扭状孤波解的扰动 $\psi(t, \xi)$ 在 L^2 与 L^∞ 范数意义下当 $t \rightarrow \infty$ 时分别是以 $(1+t)^{-1/2}$ 和 $(1+t)^{-1/4}$ 的速率衰减到零。

5 结 论

a. 组合 KdV-Burgers 方程(1)在耗散 $r \leq \lambda_0$ 时的单调递减扭状孤波解是渐近稳定的。

b. 组合 KdV-Burgers 方程(1)单调递减扭状孤波解的扰动在 L^2 与 L^∞ 范数意义下的衰减速率分别为 $(1+t)^{-1/2}$ 和 $(1+t)^{-1/4}$ 。

参考文献:

- [1] NARAYANAMURTI V, VARMA C M. Nonlinear propagation of heat pulses in solids[J]. *Physical Review Letters*, 1970, 25(16): 1105–1108.
- [2] TAPPERT F D, VARMA C M. Asymptotic theory of self-trapping of heat pulses in solids[J]. *Physical Review Letters*, 1970, 25(16): 1108–1111.
- [3] KIMIYAKI K, YOSHI H I. A modified Korteweg de Vries equation for ion acoustic waves[J]. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1974, 37(6): 1631–1636.
- [4] WADATI M. Wave propagation in nonlinear lattice. I [J]. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1975, 38(3): 673–686.

- [5] DEY B. Domain wall solutions of KdV like equations with higher order nonlinearity[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1999, 19(1): L9–L12.
- [6] RAADU M A, CHANTEUR G. Formation of double layers: shocklike solutions of an mKdV-equation[J]. *Physica Scripta*, 1986, 33(3): 240–245.
- [7] ZHANG W G. A brief introduction to the members (mathematics) of academia sinica newly elected in 1995[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 1996, 16(3): 241–248.
- [8] WANG M L. Exact solutions for a compound KdV-Burgers equation[J]. *Physics Letters A*, 1996, 213(5/6): 279–287.
- [9] SHANG Y D. Exact and explicit solutions to the compound KdV-Burgers equation[J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 2000, 17(4): 99–102.
- [10] ZHANG W G, DONG C Y, FAN E G. Conditional stability of solitary-wave solutions for generalized compound KdV equation and generalized compound KdV-Burgers equation[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2006, 46(6): 1091–1100.
- [11] ZHANG W G, ZHAO Y, TENG X Y. Approximate damped oscillatory solutions for compound KdV-Burgers equation and their error estimates[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 2012, 28(2): 305–324.
- [12] BELYTSCHKO T, LU Y Y, GU L. Element-free Galerkin methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37(2): 229–256.
- [13] GUO B L. The global solutions for a class of generalized KdV equations[J]. *Acta Mathematica Sinica*, 1982, 25(6): 641–656.
- [14] DIAZ J B, METCALF F T. An analytic proof of Young's inequality[J]. *American Mathematical Monthly*, 1970, 77: 603–609.
- [15] EVANS L C. Partial differential equations[M]. 2nd ed. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010.
- [16] EVANS L C. Partial differential equations and Monge-Kantorovich mass transfer[J]. *Current Developments in Mathematics*, 1997, 1997(1): 65–126.

(编辑: 石 瑛)