第 41 卷　第 4 期　　上 海 理 工 大 学 学 报　J. University of Shanghai for Science and Technology　　Vol. 41　No. 4　2019

文章编号:1007－6735(2019)04－0313－08　　DOI: 10.13255/j.cnki.jusst.2019.04.002

五次长短波共振方程初值问题解的存在性

王贝贝，　张卫国

（上海理工大学 理学院，上海 200093）

摘要：研究了五次长短波共振方程初值问题解的存在性。首先利用压缩映射原理证明了局部解的存在性，然后通过建立局部解具能量守恒性质，并利用先验估计方法，证明了具有高次非线性项的长短波共振方程的局部解可以延拓到整个定义域，最终证明了全局解的存在性。

关键词：压缩映射原理；先验估计；能量守恒

中图分类号：O 175.2　　**文献标志码：**A

Existence of Solutions for the Initial Value Problems of a Five-Time Long-Short Wave Resonance Equation

WANG Beibei，　ZHANG Weiguo

(*College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China*)

Abstract: The existence of the solutions to the initial value problem of a five-time long-short wave resonance equation was focused. First, the existence of the local solution was proved by using the compression mapping theorem. Then, the local solution with energy conservation properties was established and the prior estimation method was used to, It was also proved that the local solution of high-order nonlinear terms in the five-time long-short wave resonance equation can be extended to the whole domain. Finally, the existence of the global solution was testified.

Keywords: *compression mapping theorem*; *a prior estimate*; *energy conservation*

1　问题的提出

Djordjevic 等[1] 在研究二维的毛细管重力波时，发现了描述长波和短波之间相互作用的演化方程

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} = \gamma uv \\ v_t + \beta\left(|u|^2\right)_x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

该方程还出现在内波、Rossby 波及等离子体波等许多物理问题中[2]。

文献[3-4]分别用逆散射方法和先验估计方法证明了方程(1)初值问题整体解的存在性. 文献[5]研究了方程(1)的 n 孤子解。

在文献[6]中，Benney 建立了长波与短波相互作用的一般理论，提出了长波与短波相互作用的模型方程

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} = uv + \gamma|u|^2 u \\ v_t = \left(|u|^2\right)_x \end{cases} \tag{2}$$

收稿日期: 2018−09−27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目（11471215）

第一作者: 王贝贝(1992−)，女，硕士研究生．研究方向：非线性偏微分方程的理论与应用．E-mail：wbbmath@163.com

通信作者: 张卫国(1957−)，男，教授．研究方向：非线性系统的理论与应用．E-mail：zwgzwm@126.com

式中：γ为常数；u是复函数，表示长波；v是实函数，表示短波；$|u|$是u的模长。

文献[7]证明了方程(2)初值问题全局解的存在性。

1988 年，Oikawa 等[8]研究了双层流体中长波和短波在彼此分界面角度上的传播和共振作用，导出了(2+1)维长短波方程组，并将长短波方程拓展到高维空间，文献[9−14]分别研究了高维长短波方程及其推广形式解的存在唯一性。

还有学者研究了方程(2)在(1+1)维的推广形式，例如，文献[15]研究了广义 LS 型方程

$$\begin{cases} iu_t+u_{xx}-uv+\gamma q(|u|^2)u=0 \\ v_t+\left(|u|^2\right)_x=\delta u+\gamma f(|u|^2) \end{cases} \quad (3)$$

的周期初值和初值问题。

2010 年，Shang[16]研究了广义长短波方程

$$\begin{cases} iu_t+u_{xx}=uv+\gamma(|u|^2)u+\delta|u|^4u \\ v_t=\left(|u|^2\right)_x \end{cases} \quad (4)$$

的孤波解和若干特殊形式的周期解。

由于文献[15]中要求式(3)的$q(s)\leqslant c_1s^{2-\alpha}+D_1$，且$\alpha>0$。而方程(4)中包含了非线性项$\delta|u|^4u$，故该问题未被文献[15]研究。作者也尚未见到其他文献研究过方程(4)的初值问题。本文研究方程(4)初值问题解的存在唯一性。

定义泛函空间

$$\begin{cases} X_3^T=\{f:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbf{C}|f\in\left([0,T];H^{5/2}(\mathbb{R})\right), \\ \mathrm{D}_x^kf\in L^\infty\left(\mathbb{R};L^2[0,T]\right)(k=1,2,3), \\ \mathrm{D}_x^{p-2q}\mathrm{D}_t^qf\in L^\infty\left(\mathbb{R};L^2[0,T]\right)(2\leqslant p\leqslant 3,q=[p/2])\} \end{cases} \quad (5)$$

式中：D_x，D_t 分别为关于x和t的偏微分。

定义空间X_3^T中元素的范数为

$$\|f\|_{X_3^T}=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|f(t)\|_{H^{5/2}}+\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\sum_{k=1}^{3}\int_0^T|(\mathrm{D}_x^kf)(x,t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}+\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\sum_{2\leqslant p\leqslant 3,q=[p/2]}\int_0^T|(\mathrm{D}_x^{p-2q}\mathrm{D}_t^q)f(x,t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

方程(4)初值问题的初值条件为

$$u(0,x)=u_0(x),\quad x\in\mathbb{R}$$
$$v(0,x)=v_0(x),\quad x\in\mathbb{R}$$

本文的主要结果可以归结为定理 1。

定理 1 对任意的$(u_0,v_0)\in H^{5/2}(\mathbb{R})\times H^2(\mathbb{R})$，只要$\|u_0\|_{L^2}$足够小，方程(4)存在唯一的解$(u,v)\in C([0,T];H^{5/2})\times C\left([0,T];H^2\right)$，且对任意的$T>0$，有$u\in X_3^T$。

设s是实数, 则 Sobolev 空间$H^s(\mathbb{R}^n)$为

$$H^s(\mathbb{R}^n)=\{f\in L^2(\mathbb{R}^n)\,|\left(1+|\xi|^2\right)^{s/2}\hat{f}(\xi)\in L^2(\mathbb{R}^2)\}$$

设$f\in H^s(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f\|_{H^s}=(2\pi)^{-n/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^2\right)^s|\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\right)^{1/2}$$

当s 是整数时,

$$\|f\|_{H^s}^2=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{|\alpha|\leqslant s}C_\alpha|\xi^\alpha\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{|\alpha|\leqslant s}C_\alpha|\mathrm{D}^\alpha f|^2\mathrm{d}x$$

式中，所有的系数C_α均为正数。

统一将$L^\infty(0,T;X)$ 空间元素的范数记为$\|\cdot\|_{L_T^\infty(X)}$。定义

$$U(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(\partial^2/\partial x^2)}=\mathcal{F}^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\xi^2}\mathcal{F},\quad t\in\mathbb{R}$$

式中：$\mathcal{F}$，$\mathcal{F}^{-1}$分别为傅里叶变换和逆傅里叶变换。

2 局部解的存在性

现利用压缩映射定理证明方程(4)在局部定义域上有解.

定理 2 设$(u_0,v_0)\in H^{5/2}\times H^2(\mathbb{R})$，存在$T_0>0$，$0\leqslant T\leqslant T_0$和唯一的泛函对$(u,v)\in C\left([0,T];H^{5/2}\right)\times C\left([0,T];H^2\right)$满足方程(4)，且$u\in X_3^T$.

为证明定理 2，需要用到下面的引理 1～6。

引理 1[17] 对任意的$u_0\in L^2(\mathbb{R})$，有

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\mathrm{D}_x^{1/2}U(t)u_0|^2\mathrm{d}t\right)\leqslant C\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u_0(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

这里，$\mathrm{D}_x^{1/2}=\mathcal{F}^{-1}|\xi|^{1/2}\mathcal{F}$.

引理 2[18] 对任意的$f\in L^1\left(\mathbb{R};L^2(0,T)\right)$，有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathrm{D}_x^{1/2}\int_0^tU(t-s)f(s,x)\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\leqslant C\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T|f(t,x)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\mathrm{d}x$$

引理 3[18] 对任意的$f\in L^1\left(\mathbb{R};L^2(0,T)\right)$，有

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T\left|\mathrm{D}_x\int_0^tU(t-s)f(s,\cdot)\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\leqslant C\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T|f(t,x)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\mathrm{d}x$$

引理 4[7] 对任意的$f,g,h\in X_3^T$，有

$$\int_0^T\left\|\int_0^tf(s)g_x(s)\mathrm{d}sh(t)\right\|_{L^2}\mathrm{d}t\leqslant CT^{3/2}\|f\|_{X_3^T}\|g\|_{X_3^T}\|h\|_{X_3^T}$$

引理 5[7] 对任意的$f,g,h\in X_3^T$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^T\left|\mathrm{D}_x\left(\int_0^t f(s)g_x(s)\mathrm{d}sh(t)\right)\right|^2\mathrm{d}t\right]^{1/2}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$T\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T|g_{xx}|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\|f\|_{L_T^\infty(L^2)}\|h\|_{L_T^\infty(L^2)}+$$
$$2CT^{3/2}\|f\|_{L_T^\infty(H^1)}\|g\|_{L_T^\infty(H^1)}\|h\|_{L_T^\infty(H^1)}\leqslant$$
$$C(T)\|f\|_{X_3^T}\|g\|_{X_3^T}\|h\|_{X_3^T}$$

引理 6　对任意的$f,g,h\in X_3^T$, 有
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^T\left|\mathrm{D}_{xx}\left(\int_0^t f(s,x)g_x(s,x)\mathrm{d}sh(t,x)\right)\right|^2\mathrm{d}t\right]^{1/2}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C(T)\|f\|_{X_3^T}\|g\|_{X_3^T}\|h\|_{X_3^T}$$
其中，$T\to 0$时，$C(T)\to 0.$

证明　运用 Cauchy 不等式和 Holder 不等式，可得
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^T\left|\mathrm{D}_{xx}\left(\int_0^t f(s,x)g_x(s,x)\mathrm{d}sh(t,x)\right)\right|^2\mathrm{d}t\right]^{1/2}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^T\left|\int_0^t(2f_xg_{xx})\mathrm{d}sh\right|^2\mathrm{d}t\right]^{1/2}\mathrm{d}x+$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^T\left|\int_0^t(fg_{xxx})\mathrm{d}sh\right|^2\mathrm{d}t\right]^{1/2}\mathrm{d}x+$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^T\left|\int_0^t(f_{xx}g_x)\mathrm{d}sh\right|^2\mathrm{d}t\right]^{1/2}\mathrm{d}x+$$
$$2\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^T\left|\int_0^t(fg_{xx})\mathrm{d}sh_x\right|^2\mathrm{d}t\right]^{1/2}\mathrm{d}x+$$
$$2\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^T\left|\int_0^t(f_xg_x)\mathrm{d}sh_x\right|^2\mathrm{d}t\right]^{1/2}\mathrm{d}x+$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^T\left|\int_0^t fg_x\mathrm{d}sh_{xx}\right|^2\mathrm{d}t\right]^{1/2}\mathrm{d}x \tag{6}$$

估计方程(6)不等式右边的第 1 项为
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^T\left|\left(\int_0^t 2f_x(s,x)g_{xx}(s,x)\right)\mathrm{d}sh(t,x)\right|^2\mathrm{d}t\right]^{1/2}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\int_0^T 2f_x(s,x)g_{xx}(s,x)\mathrm{d}s\right)^2\int_0^T|h|^2\mathrm{d}t\right]^{1/2}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$2\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T|g_{xx}|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^T|f_x|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x\right)^{1/2}\cdot$$
$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^T|h|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x\right)^{1/2}\leqslant$$
$$2T\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T|g_{xx}|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\|f\|_{L_T^\infty(H^1)}\|h\|_{L_T^\infty(L^2)}\leqslant$$
$$C_1(T)\|f\|_{X_3^T}\|g\|_{X_3^T}\|h\|_{X_3^T}$$

同样地，可得式(6)余下的 5 项分别可以被$C_i(T)\|f\|_{X_3^T}\|g\|_{X_3^T}\|h\|_{X_3^T}$控制，其中，$T\to 0$ 时，$C_i(T)\to 0$，$C(T)\geqslant 6\max\{C_i(T)\}, i=1,2,3,4,5,6.$

将方程(4)的第 2 式代入到第 1 式，并结合初值条件$u(0,x)=u_0(x),x\in\mathbb{R}$，可得
$$u(t)=U(t)u_0-\mathrm{i}\int_0^t U(t-s)F(u(s))\mathrm{d}s \tag{7}$$
其中，
$$F(u(t))=\left[\int_0^t(|u(x,s)|^2)_x\mathrm{d}s\right]u+v_0u+\gamma|u|^2u+\delta|u|^4u \tag{8}$$

现用压缩映射定理
$$B_r^3=\left\{u\in X_3^T\mid\|u\|_{X_3^T}\leqslant r\right\},\quad r>0$$
对$u_0\in H^{5/2}(\mathbb{R}),v_0\in H^2(\mathbb{R})$, 定义算子$\Phi$,
$$(\Phi(\omega))(t)=U(t)u_0-\mathrm{i}\int_0^t U(t-s)F(\omega(s))\mathrm{d}s \tag{9}$$
其中，
$$F(\omega(t))=\left[\int_0^t(|\omega(x,s)|^2)_x\mathrm{d}s\right]\omega+$$
$$v_0\omega+\gamma|\omega|^2\omega+\delta|\omega|^4\omega \tag{10}$$

根据式(5)对空间X_3^T的定义，可得
$$\|\Phi(\omega)(t)\|_{X_3^T}=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\Phi(\omega)(t)\|_{H^{5/2}}+$$
$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T|\mathrm{D}_x\Phi(\omega)(x,t)|^2\mathrm{d}t+\right.$$
$$\left.\int_0^T\left|\mathrm{D}_x^2\Phi(\omega)(x,t)\right|^2\mathrm{d}t+\int_0^T\left|\mathrm{D}_x^3\Phi(\omega)(x,t)\right|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}+$$
$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T|\mathrm{D}_t\Phi(\omega)(x,t)|^2\mathrm{d}t+\right.$$
$$\left.\int_0^T|\mathrm{D}_x\mathrm{D}_t\Phi(\omega)(x,t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} \tag{11}$$

现需要对式(11)中等式右边的每一项作出估计。

首先，对第 1 项的估计为
$$\|\Phi(\omega)(t)\|_{L^2}\leqslant C\|u_0\|_{L^2}+\int_0^t\|F(\omega(s))\|_{L^2}\mathrm{d}s$$
由引理 4 可得
$$\int_0^T\|F(\omega(s))\|_{L^2}\mathrm{d}t\leqslant C\left(T^{3/2}+T\right)\|\omega\|_{X_3^T}^3+$$
$$CT\|v_0\|_{L^\infty}\|\omega\|_{X_3^T}+CT\|\omega\|_{X_3^T}^5 \tag{12}$$
所以，有
$$\|\Phi(\omega)(t)\|_{L^2}\leqslant C\|u_0\|_{L^2}+C\left(T^{3/2}+T\right)\|\omega\|_{X_3^T}^3+$$
$$CT\|v_0\|_{L^\infty}\|\omega\|_{X_3^T}+CT\|\omega\|_{X_3^T}^5 \tag{13}$$

由于当$0\leqslant s<t\leqslant T$时, 有
$$|\omega(t)|^2\leqslant|\omega(s)|^2+\left|\int_s^t\mathrm{D}_\tau|\omega(\tau)|^2\mathrm{d}\tau\right|\leqslant$$
$$|\omega(s)|^2+2\left(\int_0^T|\omega_t|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_0^T|\omega|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} \tag{14}$$
在式(14)中，取$s=0$，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T|\omega|^6\mathrm{d}t\right)^{1/2}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\omega(s)|^4\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^T|\omega|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x\right)^{1/2}+$$
$$CT\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^T|\omega_t|\mathrm{d}t\mathrm{d}x\right)^{1/2}\|\omega\|^2_{L_T^\infty(L^2)}\leqslant$$
$$CT^{1/2}\sup_{-\infty<x<\infty}|\omega(s)|\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\omega(s)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\|\omega\|_{X_3^T}+$$
$$CT\|\omega\|^3_{X_3^T}\leqslant CT^{1/2}\|\omega\|_{X_3^T}+CT\|\omega\|^3_{X_3^T}\tag{15}$$

和

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T|\omega|^{10}\mathrm{d}t\right)^{1/2}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$CT^{1/2}|\omega(s)|^3\|\omega(s)\|_{L^2}\|\omega\|_{X_3^T}+$$
$$CT\sup_{-\infty<x<\infty}\int_0^T|\omega_t|^2\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\omega|^2\left(\int_0^T|\omega|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$CT^{1/2}|\omega(s)|^3\|\omega(s)\|_{L^2}\|\omega\|_{X_3^T}+$$
$$CT\sup_{-\infty<x<\infty}\int_0^T|\omega_t|^2\mathrm{d}t\left(CT^{1/2}\|\omega\|_{X_3^T}+CT\|\omega\|^3_{X_3^T}\right)\leqslant$$
$$CT^{1/2}\|\omega\|_{X_3^T}+CT^{3/2}\|\omega\|^3_{X_3^T}+CT^2\|\omega\|^5_{X_3^T}\tag{16}$$

由式(15)和式(16)可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T|F(\omega(t,x))|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T\left|\left[\int_0^t(|\omega(s,x)|^2)_x\mathrm{d}s\right]\omega+v_0\omega+\right.\right.$$
$$\left.\left.\gamma|\omega|^2\omega+\delta|\omega|^4\omega\right|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$CT\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T|\omega_x|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\|\omega\|^2_{X_3^T}+$$
$$CT^{1/2}\|v_0\|_{L^2}\|\omega\|_{X_3^T}+CT^{1/2}\|\omega\|_{X_3^T}+CT\|\omega\|^3_{X_3^T}+$$
$$CT^{1/2}\|\omega\|_{X_3^T}+CT^{3/2}\|\omega\|^3_{X_3^T}+CT^2\|\omega\|^5_{X_3^T}\leqslant$$
$$C(T)\|\omega\|^3_{X_3^T}+C(T)\|\omega\|^5_{X_3^T}+C(T)\|\omega\|_{X_3^T}\tag{17}$$

结合引理 1, 引理 2 和式(17)，可得

$$\|\mathrm{D}_x^{1/2}\Phi(\omega)(t,x)\|_{L^2}\leqslant C\|u_0\|_{H^{1/2}}+$$
$$C(T)\|\omega\|^3_{X_3^T}+C(T)\|\omega\|^5_{X_3^T}+C(T)\|\omega\|_{X_3^T}\tag{18}$$

由引理 3 和式(17)，可以估计式(11)的第 2 项为

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T|\mathrm{D}_x\Phi(\omega)(x,t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\leqslant\|u_0\|_{H^{1/2}}+$$
$$C(T)\|\omega\|^3_{X_3^T}+C(T)\|\omega\|^5_{X_3^T}+C(T)\|\omega\|_{X_3^T}\tag{19}$$

其中，$T\to0$时，$C(T)\to0$，且$C(T)$依赖于$\|v_0\|_{L^2}$。

估计式(11)余下的项之前,先作出下面的估计。采用与式(15)和式(16)同样的估计方法，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^T\left|\mathrm{D}_x\left(|\omega(t,x)|^2\omega(t,x)\right)\right|^2\mathrm{d}t\right]^{1/2}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$CT^{1/2}\|\omega\|_{X_3^T}+CT\|\omega\|^3_{X_3^T}\tag{20}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^T\left|\mathrm{D}_x\left(|\omega(t,x)|^4\omega(t,x)\right)\right|^2\mathrm{d}t\right]^{1/2}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$CT^{1/2}\|\omega\|_{X_3^T}+CT^{3/2}\|\omega\|^3_{X_3^T}+CT^2\|\omega\|^5_{X_3^T}\tag{21}$$

结合引理 5，式(20)和式(21)，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T|\mathrm{D}_xF(\omega(t,x))|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\left(T+T^{3/2}\right)\|\omega\|_{X_3^T}+CT^{1/2}\|v_0\|_{H^1}\|\omega\|_{X_3^T}+$$
$$CT^{1/2}\|\omega\|_{X_3^T}+C(T+T^{3/2})\|\omega\|^3_{X_3^T}+CT\|\omega\|^5_{X_3^T}\leqslant$$
$$C(T)\left(\|\omega\|_{X_3^T}+\|\omega\|^3_{X_3^T}+\|\omega\|^5_{X_3^T}\right)\tag{22}$$

其中，$C(T)$依赖于$\|v_0\|_{H^1}$,且$T\to0$时，$C(T)\to0$.

由引理 1，引理 2 和式(22)，可估计

$$\|\mathrm{D}_x^{1/2}\mathrm{D}_x\Phi(\omega)(t,x)\|_{L^2}\leqslant$$
$$C\|\mathrm{D}_x\mathrm{D}_x^{1/2}u_0\|_{L^2}+\left\|\mathrm{D}_x^{1/2}\int_0^tU(t-s)\mathrm{D}_xF(\omega(s))\mathrm{d}s\right\|_{L^2}\leqslant$$
$$C\|u_0\|_{H^{3/2}}+C\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T|\mathrm{D}_xF(\omega(t,x))|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\|u_0\|_{H^{3/2}}+C(T)\left(\|\omega\|_{X_3^T}+\|\omega\|^3_{X_3^T}+\|\omega\|^5_{X_3^T}\right)\tag{23}$$

同样地，结合引理 1，引理 3 和式(22)，可得

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T\left|\mathrm{D}_x^2\Phi(\omega)(x,t)\right|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\leqslant$$
$$C\|u_0\|_{H^{3/2}}+C\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T|\mathrm{D}_xF(\omega(t,x))|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\|u_0\|_{H^{3/2}}+C(T)\left(\|\omega\|_{X_3^T}+\|\omega\|^3_{X_3^T}+\|\omega\|^5_{X_3^T}\right)\tag{24}$$

其中，$C(T)$依赖于$\|v_0\|_{H^1}$，且$T\to0$时，$C(T)\to0$。

根据$U(t)$的定义,有

$$\mathrm{i}\,\mathrm{D}_tU(t)f+\mathrm{D}_{xx}U(t)f=0$$

可得

$$\mathrm{D}_tU(t)f=\mathrm{i}\,\mathrm{D}_{xx}U(t)f$$

对式(9)的两边分别关于t微分，可得

$$\mathrm{D}_t\Phi(\omega)(t)=\mathrm{i}\,\mathrm{D}_x^2U(t)u_0+$$
$$\int_0^t\mathrm{D}_x^2U(t-s)F(\omega(s))\mathrm{d}s-\mathrm{i}\,F(\omega(t))\tag{25}$$

由式(24)可得

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T |D_t\Phi(\omega)(x,t)|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T \left|D_x^{1/2}U(t)D_x^{3/2}u_0(x)\right|^2 dt\right)^{1/2}+$$
$$C\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T |D_xF(\omega(t,x))|^2 dt\right)^{1/2}dx+$$
$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T |F(\omega(t))|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant$$
$$C\|u_0\|_{H^{3/2}}+C(T)\left(\|\omega\|_{X_3^T}+\|\omega\|_{X_3^T}^3+\|\omega\|_{X_3^T}^5\right)+$$
$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T |F(\omega(t))|^2 dt\right)^{1/2} \tag{26}$$

对式(26)右边最后一项的估计为

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T |F(\omega(t))|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T \left|\int_0^t |\omega(s,x)||\omega_x(s,x)|ds\,\omega(t,x)\right|^2 dt\right)^{1/2}+$$
$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T |\omega(t,x)|^6 dt\right)^{1/2}+\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T |\omega(t,x)|^{10} dt\right)^{1/2}+$$
$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T |v_0(x)\omega(t,x)|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant$$
$$C\left[\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T |\omega|^2 dt\right)^{1/2}\right]^2 \sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T |\omega_x|^2 dt\right)^{1/2}+$$
$$CT^{1/2}\|\omega\|_{L_T^\infty(H^1)}^3+CT^{1/2}\|\omega\|_{L_T^\infty(H^1)}^5+CT^{1/2}\cdot$$
$$\|v_0\|_{L^\infty}\|\omega\|_{L_T^\infty(H^1)} \leqslant C(T)\left(\|\omega\|_{X_3^T}^5+\|\omega\|_{X_3^T}^3+\|\omega\|_{X_3^T}\right) \tag{27}$$

所以，由式(26)和式(27)可得

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T |D_t\Phi(\omega)(x,t)|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant$$
$$C\|u_0\|_{H^{3/2}}+C(T)\left(\|\omega\|_{X_3^T}^5+\|\omega\|_{X_3^T}^3+\|\omega\|_{X_3^T}\right) \tag{28}$$

最后，用引理 6 可以估计出

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T |D_x^2F(\omega(t,x))|^2 dt\right)^{1/2}dx \leqslant$$
$$C(T)\|\omega\|_{X_3^T}^3+CT^{1/2}\|v_0\|_{H^2}\|\omega\|_{X_3^T}+$$
$$C\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T \left|D_x^2\left(|\omega|^2\omega\right)\right|^2 dt\right)^{1/2}dx+$$
$$C\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T \left|D_x^2\left(|\omega|^4\omega\right)\right|^2 dt\right)^{1/2}dx \tag{29}$$

对式(29)右边第 3 项的估计为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T \left|D_x^2\left(|\omega|^2\omega\right)\right|^2 dt\right)^{1/2}dx \leqslant$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T \left|6|\omega||\omega_x|^2+3|\omega|^2|\omega_{xx}|\right|^2 dt\right)^{1/2}dx \leqslant$$
$$C\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\omega_x|^2\left(\int_0^T |\omega|^2 dt\right)^{1/2}dx+$$
$$C\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\omega|^2\left(\int_0^T |\omega_{xx}|^2 dt\right)^{1/2}dx \leqslant$$
$$CT^{1/2}\|\omega\|_{X_3^T}^3 \tag{30}$$

由式(15)和式(21)可得对式(29)右边最后一项的估计为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T \left|D_x^2\left(|\omega|^4\omega\right)\right|^2 dt\right)^{1/2}dx \leqslant$$
$$C\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T |\omega|^6|\omega_x|^4 dt\right)^{1/2}dx+$$
$$C\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T |\omega|^8|\omega_{xx}|^2 dt\right)^{1/2}dx \leqslant$$
$$CT^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\omega|^2\left(\int_0^T |\omega|^2 dt\right)^{1/2}dx\|\omega\|_{X_3^T}^2+$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\omega|^4\left(\int_0^T |\omega_{xx}|^2 dt\right)^{1/2}dx \leqslant CT^{1/2}\|\omega\|_{X_3^T}+$$
$$C(T+T^{3/2})\|\omega\|_{X_3^T}^3+C(T^{3/2}+T^2)\|\omega\|_{X_3^T}^5 \tag{31}$$

因此，由式(30)和式(31)可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T |D_x^2F(\omega(t,x))|^2 dt\right)^{1/2}dx \leqslant$$
$$C(T)\left(\|\omega\|_{X_3^T}+\|\omega\|_{X_3^T}^3+\|\omega\|_{X_3^T}^5\right) \tag{32}$$

其中，$C(T)$依赖于$\|v_0\|_{H^2}$，且$T\to 0$时，$C(T)\to 0$。

结合引理 1，引理 2 和式(32)，可得

$$\|D_x^{1/2}D_x^2\Phi(\omega)(t,x)\|_{L^2} \leqslant$$
$$C\|u_0\|_{H^{5/2}}+C\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T \left|D_x^2F(\omega(t,x))\right|^2 dt\right)^{1/2}dx \leqslant$$
$$C\|u_0\|_{H^{5/2}}+C(T)\left(\|\omega\|_{X_3^T}+\|\omega\|_{X_3^T}^3+\|\omega\|_{X_3^T}^5\right) \tag{33}$$

由引理 1, 引理 3 和式(32), 可得对式(11)的第 4 项的估计为

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T |D_x^3\Phi(\omega)(x,t)|^2 dt\right)^2 \leqslant$$
$$C\|u_0\|_{H^{5/2}}+C\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T |D_x^2F(\omega(t,x))|^2 dt\right)^{1/2}dx \leqslant$$
$$C\|u_0\|_{H^{5/2}}+C(T)\left(\|\omega\|_{X_3^T}^5+\|\omega\|_{X_3^T}^3+\|\omega\|_{X_3^T}\right) \tag{34}$$

同样地，

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T |D_xD_t\Phi(\omega)(x,t)|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T \left|D_x\left[iD_x^2U(t)u_0+\int_0^t D_x^2U(t-s)\cdot\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.F(\omega(s))ds-iF(\omega(t))\right]\right|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant$$
$$C\|u_0\|_{H^{5/2}}+C\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T |D_x^2F(\omega)|^2 dt\right)^{1/2}dx+$$
$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T |D_xF(\omega)|^2 dt\right)^{1/2} \tag{35}$$

由方程(27), 可得对式(35)的第 3 项的估计为

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T |D_xF(\omega)|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant$$
$$C(T)\|\omega\|_{X_3^T}+C(T)\|\omega\|_{X_3^T}^3+C(T)\|\omega\|_{X_3^T}^5$$

因此，

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T |D_xD_t\Phi(\omega)(x,t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant$$
$$C\|u_0\|_{H^{5/2}}+C(T)\left(\|\omega\|^5_{X_3^T}+\|\omega\|^3_{X_3^T}+\|\omega\|_{X_3^T}\right) \quad (36)$$

结合以上的估计, 可得

$$\|\Phi(\omega)\|_{X_3^T} \leqslant C_7\|u_0\|_{H^{5/2}}+$$
$$C_8(T)\left(\|\omega\|^5_{X_3^T}+\|\omega\|^3_{X_3^T}+\|\omega\|_{X_3^T}\right) \quad (37)$$

其中，$C_8(T)$是常数, 且$T\to 0$时，$C_8(T)\to 0$。

选定r，且有

$$C_7\|u_0\|_{H^{5/2}} \leqslant \frac{r}{2}$$

取足够小的T, 使得

$$C_8(T)\left(\|\omega\|^5_{X_3^T}+\|\omega\|^3_{X_3^T}+\|\omega\|_{X_3^T}\right) < \frac{r}{2}$$

可知

$$\Phi: B_r^3 \to B_r^3$$

Φ是在B_r^3上的一个压缩。采用与估计不等式(37)同样的方法，可得

$$\|\Phi(\omega_1)-\Phi(\omega_2)\|_{X_3^T} \leqslant C_9(T)\left(\|\omega_1\|^4_{X_3^T}+\|\omega_2\|^4_{X_3^T}+\right.$$
$$\left.\|\omega_1\|^2_{X_3^T}+\|\omega_2\|^2_{X_3^T}+1\right)\|\omega_1-\omega_2\|_{X_3^T}$$

让T足够小，满足

$$C_9(T)(2r^4+2r^2+1)<1$$

因此，存在唯一的泛函$u\in X_3^T$，使得$\Phi(u)=u$

3 全局解的存在性

首先证明方程(4)的解的守恒性质和 2 个先验估计结果，然后运用反证法，证明方程(4)初值问题的解在空间X_3^T中的全局存在性。

引理 7 设$u_0\in H^{5/2}(\mathbb{R})$，$u$ 是方程(4)的解，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u(t,x)|^2\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}|u_0(x)|^2\mathrm{d}x \quad (38)$$

证明 对方程(4)的第 1 个式子的两边关于u作内积，可得

$$\mathrm{i}\langle u_t,u\rangle+\langle u_{xx},u\rangle=\langle vu,u\rangle+\langle\gamma|u|^2u,u\rangle+$$
$$\langle\delta|u|^4u,u\rangle \quad (39)$$

可知$\langle u,u\rangle=\int_{\mathbb{R}}\bar{u}u\mathrm{d}x$是实的。取方程(39)的虚部，可得

$$\langle u_t,u\rangle=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2_{L^2}=0 \quad (40)$$

对方程(40)的两边关于t积分，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u(t,x)|^2\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}|u_0(x)|^2\mathrm{d}x$$

引理 8 设(u,v)是方程(4)的解，有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(v(t,x)|u(t,x)|^2+|u_x(t,x)|^2+\frac{\gamma}{2}|u(t,x)|^4+\frac{\delta}{3}|u(t,x)|^6\right)\mathrm{d}x=$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(v_0(t,x)|u_0(t,x)|^2+|u_{0_x}(t,x)|^2+\frac{\gamma}{2}|u_0(t,x)|^4+\frac{\delta}{3}|u_0(t,x)|^6\right)\mathrm{d}x \quad (41)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(v^2(t,x)+2\mathrm{Im}\left(u(t,x)\overline{u_x(t,x)}\right)\right)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\left(v_0^2(t,x)+2\mathrm{Im}\left(u_0(t,x)\overline{u_{0_x}(t,x)}\right)\right)\mathrm{d}x \quad (42)$$

证明 令$\vec{S}=(u,v)$，将方程(4)写成哈密尔顿系统

$$\frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t}=JE'(\vec{S})$$

其中，J是斜对称算子，且有

$$J=\begin{pmatrix}-\mathrm{i} & \\ & 2\dfrac{\partial}{\partial x}\end{pmatrix}$$

$$E'(\vec{S})=\begin{pmatrix}-u_{xx}+uv+\gamma|u|^2u+\delta|u|^4u\\ \dfrac{1}{2}|u|^2\end{pmatrix}$$

可知

$$E(\vec{S})=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(v(t,x)|u(t,x)|^2+|u_x(t,x)|^2+\right.$$
$$\left.\frac{\gamma}{2}|u(t,x)|^4+\frac{\delta}{3}|u(t,x)|^6\right)\mathrm{d}x$$

令$u=u_1+\mathrm{i}u_2$，所以，有

$$\frac{\mathrm{d}E(\vec{S})}{\mathrm{d}t}=\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2}|u|^2\left(|u|^2\right)_x\mathrm{d}x=$$
$$\int_{\mathbb{R}}\left(u_1^2u_2u_{2x}+u_1u_{1x}u_2^2\right)\mathrm{d}x=0 \quad (43)$$

其中，E'是 Frechet 导数。由式(43)可知$E(\vec{S})$是守恒量, 故可得式(41)和式(42)。

引理 9 设 u 是方程(4)初值问题的解, 则有

$$\|u\|_{L_T^\infty(L^2)} \leqslant \|u_0\|_{L^2} \quad (44)$$

且

$$\|u\|_{L_T^\infty(H^1)} \leqslant M_1 \quad (45)$$

其中，M_1是大于零的常数，且仅依赖于$\|u_0\|_{H^1}$和$\|v_0\|_{L^2}$。

证明 由式(41)和式(42)可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u_x|^2\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty}|v|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u|^4\mathrm{d}x\right)^{1/2}+ \frac{|\gamma|}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|u|^4\mathrm{d}x+\frac{|\delta|}{3}\int_{-\infty}^{\infty}|u|^6\mathrm{d}x+C \leqslant C\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u_x|^2\mathrm{d}x\right)^{1/4}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u_0|^2\mathrm{d}x\right)^{3/4}+ C\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u_x|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u_0|^2\mathrm{d}x\right)^{3/2}+ C\frac{|\delta|}{3}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u_x|^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u_0|^2\mathrm{d}x\right)^2+C$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|v|^2\mathrm{d}x \leqslant 2\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u_0|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u_x|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}+C$$

因此，

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u_x|^2\mathrm{d}x \leqslant C\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u_x|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}+ C\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u_x|^2\mathrm{d}x\right)^{1/4}+C\frac{|\delta|}{3}\|u_0\|_{L^2}^4\int_{-\infty}^{\infty}|u_x|^2\mathrm{d}x+C \tag{46}$$

由式(46)可知，只要$C\frac{|\delta|}{3}\|u_0\|_{L^2}^4<1$，可以作出下面的估计：

$$\left(1-C\frac{|\delta|}{3}\|u_0\|_{L^2}^4\right)\int_{-\infty}^{\infty}|u_x|^2\mathrm{d}x \leqslant C\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u_x|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}+C\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u_x|^2\mathrm{d}x\right)^{1/4}+C \leqslant \frac{1-C\frac{|\delta|}{3}\|u_0\|_{L^2}^4}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|u_x|^2\mathrm{d}x+C$$

其中，$\|u_0\|_{L^2}$或δ必须足够小，δ不是小常数时，$\|u_0\|_{L^2}$必须足够小才能满足式(45)。

引理 10　设 u 是方程(4)初值问题的解, 则有

$$\|u_t\|_{L_T^\infty(L^2)} \leqslant M_2 \tag{47}$$

且

$$\|u\|_{L_T^\infty(H^2)} \leqslant M_2 \tag{48}$$

其中，M_2是大于零的常数，且仅依赖于$\|u_0\|_{H^2}$和$\|v_0\|_{L^2}$。

证明　令$\psi=u_t, u\in L_T^\infty(H^3(\mathbb{R}))$，由式(4)可得

$$\mathrm{i}\psi_t+\psi_{xx}=(|u(x,s)|^2)_x u+\left[\int_0^t(|u(x,s)|^2)_x\mathrm{d}s\right]\psi+ v_0(x)\psi+2\gamma|u|^2\psi+\gamma u^2\bar{\psi}+2\delta|u|^2u^2\bar{\psi}+3\delta|u|^4\psi \tag{49}$$

分别对式(49)的两边关于ψ作内积，可得

$$\mathrm{i}\langle\psi_t,\psi\rangle+\langle\psi_{xx},\psi\rangle=\langle(|u(x,s)|^2)_x u,\psi\rangle+ \left\langle\left[\int_0^t(|u(x,s)|^2)_x\mathrm{d}s\right]\psi,\psi\right\rangle+\langle v_0(x)\psi,\psi\rangle+\langle 2\gamma|u|^2\psi,\psi\rangle+ \langle\gamma u^2\bar{\psi},\psi\rangle+\langle 2\delta|u|^2u^2\bar{\psi},\psi\rangle+\langle 3\delta|u|^4\psi,\psi\rangle \tag{50}$$

由于$\langle\psi,\psi\rangle=\int\bar{\psi}\psi dx$是实的，所以，取方程(50)的虚部为

$$2\langle\psi_t,\psi\rangle=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\psi\|_{L^2}^2=2\mathrm{Im}\langle(|u(x,s)|^2)_x u,\psi\rangle+ 2\mathrm{Im}\langle\gamma u^2\bar{\psi},\psi\rangle+2\mathrm{Im}\langle 2\delta|u|^2u\bar{\psi},\psi\rangle \leqslant C\|u\|_{L_T^\infty(H^1)}^3\|\psi\|_{L^2}+C\|u\|_{L_T^\infty(L^2)}^2\|\psi\|_{L^2}^2+C\|u\|_{L_T^\infty(L^2)}^4\|\psi\|_{L^2}^2$$

由 Gronwall 不等式可得

$$\|\psi\|_{L_T^\infty(L^2)} \leqslant M_2$$

另外，由式(4)可得式(48)。

现采用反证法。假设$[0,T_1]$是初值问题(4)的唯一解u的最大时间间隔，即对任意选定的T，需满足$T<T_1$，才能使得初值问题(4)在X_3^T中有唯一的解。对于$p>0$，记

$$|||u|||_p^T=\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{p}|\mathrm{D}_x^k u(t,x)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}+ \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\mathrm{D}_x^{1/2}\mathrm{D}_x^{p-1}u(t)\|_{L^2}$$

参照对方程(11)等式右边各项的估计，可以对$|||u|||_p^T\ (p\leqslant 3)$作出估计，这里只估计$|||u|||_3^T$。用与式(19)，(23)，(24)，(33)，(34)相同的估计方法，可得

$$|||u|||_3^T=\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T|\mathrm{D}_x u(x,t)|^2+|\mathrm{D}_x^2u(t,x)|^2+ |\mathrm{D}_x^3u(t,x)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}+\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\mathrm{D}_x^{1/2}\mathrm{D}_x^2u(t)\|_{L^2} \leqslant \sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T|\mathrm{D}_x u(t,x)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}+\sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T|\mathrm{D}_x^2u(t,x)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}+ \sup_{-\infty<x<\infty}\left(\int_0^T|\mathrm{D}_x^3u(t,x)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}+\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\mathrm{D}_x^{1/2}\mathrm{D}_x u(t)\|_{L^2} \leqslant C\|u_0\|_{H^{5/2}}+CT\|u\|_{L_T^\infty(H^1)}|||u|||_3^T+C(T)\|v_0\|_{H^2}\|u\|_{L_T^\infty(H^2)}+ C(T)\|u\|_{L_T^\infty(H^2)}^3+C(T)\|u\|_{L_T^\infty(H^2)}^5 \leqslant C_{10}\|u_0\|_{H^{5/2}}+C_{11}TM_1^2|||u|||_3^T+ C_{12}(T)\|v_0\|_{H^2}M_2+C_{13}(T)M_2^3+C_{14}(T)M_2^5 \tag{51}$$

由式(51)可得

$$(1-C_{11}TM_1^2)|||u|||_3^T \leqslant C_{10}\|u_0\|_{H^{5/2}}+ C_{12}(T)\|v_0\|_{H^2}M_2+C_{13}(T)M_2^3+C_{14}(T)M_2^5$$

取$\hat{T}>0$，使得

$$\hat{T}=\min\left\{\frac{1}{2C_{11}M_1^2},T_3\right\}$$

可得

$$|||u|||_3^{\hat{T}} \leqslant K_1 \tag{52}$$

其中，K_1和$C_i(T)(T\to 0$时，$C_i(T)\to 0$，$i=11,12,13,14)$是大于零的常数，且仅依赖于$\|u_0\|_{H^{5/2}}$和$\|v_0\|_{H^2}$。

假设$\hat{T}<T_1$，考虑初值问题

$$\mathrm{i}u_t^{(1)} + u_{xx}^{(1)} = \left[\int_0^T \left(\left|u^{(1)}(x,s)\right|^2\right)_x \mathrm{d}s\right] u^{(1)} + v_0 u^{(1)} + \gamma\left|u^{(1)}\right|^2 u^{(1)} + \delta\left|u^{(1)}\right|^4 u^{(1)}$$

其中，初值条件$u^{(1)}(\hat{T},x) = u(\hat{T},x), x \in \mathbf{R}$。

同样地，可估计

$$|||u|||_3^{2\hat{T}} \leqslant K_1^{(1)} \tag{53}$$

其中，$K_1^{(1)}$是仅依赖于K_1和$\|v_0\|_{H^2}$的正常数。

$$u(t,x) = \begin{cases} u(t,x), 0 \leqslant t \leqslant \hat{T} \\ u^{(1)}(t,x), \hat{T} \leqslant t \leqslant 2\hat{T} \end{cases}$$

$$|||u|||_3^{2\hat{T}} \leqslant \max\{K_1, K_1^{(1)}\}$$

令$n \in N^+, n\hat{T} \geqslant T_1$，采用与估计式(52)和式(53)同样的方法，将区间$\hat{T}$逐步延拓到$n\hat{T}$，存在正常数K，使得

$$|||u|||_3^{n\hat{T}} \leqslant K$$

这样就引出了矛盾，故全局解的存在性得到证明。

本文运用压缩映射原理及先验估计，并通过证明所研究的方程的解满足能量守恒定律，克服了方程(4)中具高次非线性项带来的困难，得到了五次的长短波共振方程全局解存在的结果。另外，若将方程式(4)推广成下列形式：

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_t + u_{xx} = uv + \gamma|u|^2 u + \delta|u|^{2m} u \\ v_t = (|u|^2)_x \end{cases} \tag{54}$$

通过对引理 9 的证明过程可知，在式(54)中，当$m > 2$时，不能估计出$\|u\|_{L_T^\infty(H^1)}$被常数控制，故用本文方法难以证明方程(54)初值问题全局解的存在性。

致谢：在本文的研究过程中，得到了汪文军老师很大的帮助，在此表示衷心的感谢！

参考文献：

[1] DJORDJEVIC V D, REDEKOPP L J. On two-dimensional packets of capillary-gravity waves[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1977, 79(4): 703–714.

[2] GRIMSHAW R H J. The modulation of an internal Gravity-wave packet, and the resonance with the mean motion[J]. Studies in Applied Mathematics, 1977, 56(3): 241–266.

[3] MA Y C. The complete solution of the long-wave-short-wave resonance equations[J]. Studies in Applied Mathematics, 1978, 59(3): 201–221.

[4] GUO B L. The global solution for one class of the system of LS nonlinear wave interaction[J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 1987, 7(1): 69–76.

[5] GUO B L, PAN X D. N soliton solution for a class of the system of LS nonlinear wave interaction[J]. Chinese Physics Letters, 1990, 7(6): 241–244.

[6] BENNEY D J. A general theory for interactions between short and long waves[J]. Studies in Applied Mathematics, 1977, 56(1): 81–94.

[7] TSUTSUMI M, HATANO S. Well-posedness of the Cauchy problem for the long wave-short wave resonance equations[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 1994, 22(2): 155–171.

[8] OIKAWA M, OKAMURA M, FUNAKOSHI M. Two-dimensional resonant interaction between long and short waves[J]. Journal of the Physical Society of Japan, 1989, 58(12): 4416–4430.

[9] LAI D W C, CHOW K W. ‘Position’ and ‘dromion’ solutions of the (2+1) dimensional long wave-short wave resonance interaction equations[J]. Journal of the Physical Society of Japan, 1999, 68(6): 1847–1853.

[10] RADHA R, KUMAR C S, LAKSHMANAN M, et al. Periodic and localized solutions of the long wave-short wave resonance interaction equation[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2005, 38(44): 9649–9663.

[11] YUROVA M. Application of dressing method for long wave-short wave resonance interaction equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 2007, 48(5): 053516.

[12] XIN J, GUO B L, HAN Y Q, et al. The global solution of the (2+1)-dimensional long wave-short wave resonance interaction equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 2008, 49(7): 073504.

[13] 卢红, 辛杰. (2+1) 维广义耗散长短波方程的整体解[J]. 鲁东大学学报 (自然科学版), 2010, 26(4): 297–300.

[14] 刘娜, 辛杰. 广义 (2+1) 维分数阶长短波方程的整体解[J]. 鲁东大学学报 (自然科学版), 2016, 32(4): 289–294.

[15] 郭柏灵. 一类广义 LS 型方程组的周期初值和初值问题[J]. 工程数学学报, 1991, 8(1): 47–53.

[16] SHANG Y D. Explicit and exact solutions for a generalized long-short wave resonance equations with strong nonlinear term[J]. Chao, Solitons & Fractals, 2005, 26(2): 527–539.

[17] KENIG C, PONCE G, VEGA L. Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations[J]. Indiana University Mathematics Journal, 1991, 40(1): 33–69.

[18] KENIG C, PONCE G, VEGA L. Small solutions to nonlinear Schrodinger equations[J]. Annales De L Institut Henri Poincare. C: Non Linear Analysis, 1993, 10(3): 255–288.

（编辑：石　瑛）