

一类具有非线性传染率的 SIS 传染病 接种模型的研究

周艳丽¹, 濮桂萍²

(1. 上海健康医学院 文理教学部, 上海 201318; 2. 上海健康医学院 健康信息技术与管理学院, 上海 201318)

摘要: 研究了一类具有非线性传染率的 SIS 传染病接种模型的全局稳定的动力学行为, 找到了疾病存在与否的阈值——基本再生数 R_0 。当 $R_0 \leq 1$ 时, 疾病消逝; 当 $R_0 > 1$ 时, 疾病流行。同时, 利用 Lyapunov-LaSalle 不变集原理, 证明了无病平衡点和地方病平衡点的全局渐近稳定性。

关键词: SIS 传染病模型; 接种; 非线性传染率; 全局稳定

中图分类号: O 175.8 **文献标志码:** A

SIS Epidemic Model with Vaccination and Nonlinear Incidence Rate

ZHOU Yanli¹, PU Guiping²

(1. College of Arts and Science, Shanghai University of Medicine and Health Sciences, Shanghai 201318, China; 2. Faculty of Information Technology and Management, Shanghai University of Medicine and Health Sciences, Shanghai 201318, China)

Abstract: The global stability of a SIS epidemic model with vaccination and nonlinear incidence rate was investigated. The threshold of epidemic equilibriums-basic reproduction, the number R_0 was provided, which determines the extinction or prevalence of the disease. If $R_0 \leq 1$, the disease gradually disappears. If $R_0 > 1$, the infection persists in its existence and the disease becomes a local disease. The global asymptotical stabilities of the disease-free equilibrium point and endemic equilibrium point were proved by using the Lyapunov-LaSalle invariant set theory.

Keywords: SIS epidemic model; vaccination; nonlinear incidence rate; global stability

1 问题的提出

在以往经典的传染病模型研究中, 常用的传染率多为双线型传染率和标准型传染率。然而, 在现实世界中, 由于传染病传播方式和传播途径

的复杂性, 很难准确地表述发生率、接触率以及疾病潜伏期的人数等因素之间的因果关系。非线性传染率能更精确地揭示传染病的传播机理。另外, 时滞在传染病的传播过程中也是不可忽视的, 它可用来描述患者对疾病的感染期、恢复者

收稿日期: 2018-05-08

基金项目: 上海市教师专业发展工程 (A1-2601-18-311006); 上海健康医学院教学改革专项基金资助项目 (B1-0200-19-309121, B1-0200-19-309120); 上海市高等教育学会课题 (GJEL1890)

第一作者: 周艳丽 (1976-), 女, 副教授。研究方向: 生物数学。E-mail: zhouyanli_math@163.com

对疾病的免疫期、疾病的潜伏期等。为了控制疾病传播,接种疫苗已经成为消除传染病的一个重要策略,因此,研究具有接种的传染病模型已成为传染病学中重要的研究内容。接种疫苗可以使接种者获得永久的免疫力或暂时性的免疫力。暂时性免疫期的长度可以影响疾病发生发展的状况,许多学者研究了具有疫苗接种的传染病模型^[1-4]。因此,传染病模型利用非线性时滞方程来描述更符合实际,能更精准地为预防和控制疾病传播提供有效的防御策略。有关具有非线性传染率和时滞的模型的研究已经取得了很多成果^[5-9]。

为了更好地解释传染病传播机理,本文将在文献[10]的基础上,将文献[10]中的双线型传染率改为一般性的非线性传染率。模型为

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A(1-q) - \beta f(I)S - (\mu + p)S + \gamma I + [qA + pS(t-\tau)]e^{-\mu\tau} \\ \frac{dI}{dt} = \beta f(I)S - (\mu + \gamma)I \\ \frac{dV}{dt} = (qA + pS) - [qA + pS(t-\tau)]e^{-\mu\tau} - \mu V \end{cases} \quad (1)$$
$$S(t) + I(t) + V(t) = N(t)$$

式中: $N(t)$ 表示 t 时刻的总人口; $S = S(t)$ 表示 t 时刻没有被疾病感染但有可能被感染的人数; $I = I(t)$ 表示 t 时刻已被疾病感染的人数; $V = V(t)$ 表示 t 时刻已被接种的人数; 且 $\frac{dN(t)}{dt} = A - \mu N(t)$, 则 $N(t) \rightarrow \frac{A}{\mu} (t \rightarrow \infty)$; 假设没接种者都是易感者, A 表示人口常数输入率, $A > 0$; q 表示接种者的比例, $0 \leq q \leq 1$; p 表示易感者被接种率, $p \geq 0$; μ 表示自然死亡率, $\mu > 0$; γ 表示疾病恢复率, $\gamma > 0$; β 表示易感者和感染者之间的传染率, $\beta > 0$; τ 表示接种免疫期, $\tau \geq 0$ 。

式(1)中的函数 $f(I) \in C^2$, 满足性质^[9]:
(H) $f(I)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续可导, $\frac{f(I)}{I}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 且 $f(0) = 0, f'(0) > 0$ 。

显然, $f(I)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是 Lipschitz 连续且对所有的 $I > 0$, 有 $0 < f(I) \leq f'(0)I$ 成立。

2 模型研究

考虑到模型(1)的实际情况, 假设模型(1)的初始条件为

$$(S(\omega), I(\omega), V(\omega)) = (\varphi_1(\omega), \varphi_2(\omega), \varphi_3(\omega)) \in C([- \tau, 0], \mathbb{R}_+^3),$$
$$\varphi_1(0) \geq 0, \varphi_2(0) \geq 0, \varphi_3(0) \geq 0 \quad (2)$$

初始函数 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T$ 是巴拿赫空间 $C = C([- \tau, 0], \mathbb{R}_+^3)$ 上的连续函数。由文献[11]可知, 模型(1)存在唯一满足初始条件的解。

定义模型(1)的可行域为 $D = \left\{ (S, I, V) \in \mathbb{R}^3 : S \geq 0, I \geq 0, V \geq 0, S + I + V \leq \frac{A}{\mu} \right\}$

关于可行域 D 的不变性有引理 1。

引理 1 若 $(S(\omega), I(\omega), V(\omega)) \in D (\omega \in [- \tau, 0])$, 则模型(1)的解 $(S(t), I(t), V(t)) (t \geq 0)$ 位于 D 内, 即可行域 D 是模型(1)的正不变集。

由于模型所描述的对象为人口模型, 所以, 证明所有的变量均为正是非常重要的。即对于任意初值 $S(0) = S_0 > 0, I(0) = I_0 > 0, V(0) = V_0 > 0$, 当 $t > 0$ 时, 模型(1)的所有解 $S(t), I(t), V(t)$ 均为正。利用 Li 和 Kuang 在文献[12]中的方法得到证明。

定理 1 设模型(1)的初值为 $S(0) = S_0 > 0, I(0) = I_0 > 0, V(0) = V_0 > 0$, 并且满足 $S(\theta) = S_0(\theta) \geq 0, \theta \in [- \tau, 0]$, 则对所有的 $t > 0$, 模型(1)的解 $(S(t), I(t), V(t))$ 均为正解。

证明 反证法。假设存在时间 t_1 , 使得 $S(t_1)I(t_1) = 0$ 。令 $I(t_1) = 0$, 则当 $t \in [0, t_1]$ 时, 有 $S(t) \geq 0$ 。由 $f(I)$ 的性质定义:

$$m = \min_{0 \leq t \leq t_1} \left\{ \beta \frac{f(I)S}{I} - (\mu + \gamma) \right\}$$

结合模型(1)的第 2 个方程, 可得

$$\frac{dI}{dt} \geq mI, \quad t \in [0, t_1]$$

故 $I(t_1) \geq I(0)e^{mt_1} > 0$, 这与 $I(t_1) = 0$ 矛盾。因此, 对所有的 $t > 0$, 有 $I(t) > 0$ 。

利用同样的方法可证 $S(t) > 0 (t > 0)$ 。若不真, 则同样存在时间 t_1 , 使得 $S(t_1)I(t_1) = 0$ 。若 $S(t_1) = 0$, 则所有 $t \in [0, t_1]$, 有 $I(t) \geq 0$ 。进一步, 由模型(1)的第 1 个方程可得

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{t=t_1} = A(1-q) - \beta f(I)S(t_1) - (\mu + p)S(t_1) + \gamma I + [qA + pS(t-\tau)]e^{-\mu\tau} > 0$$

若 $S(0) = S_0 > 0$ 且 $S(t_1) = 0$, 则一定有 $\left. \frac{dS}{dt} \right|_{t=t_1} \leq 0$, 这与上式矛盾, 故 $S(t) > 0 (t > 0)$ 。

现证明 $V(t) > 0$, 由模型(1)可得

$$V(t) = qA \int_{t-\tau}^t e^{-\mu s} ds + p \int_{t-\tau}^t e^{-\mu(t-s)} S(s) ds$$

显然, 当 $t > 0$ 时, $V(t) > 0$ 。

在性质(H)成立的条件下, 定义模型(1)的基本再生数

$$R_0 = \frac{\beta f'(0)[A(1-q) + qAe^{-\mu\tau}]}{(\mu + \gamma)[\mu + p(1 - e^{-\mu\tau})]}$$

定理 2 假设性质(H)成立。对于模型(1), 可得:

a. 若 $R_0 \leq 1$, 则有唯一的无病平衡点 $E_0 = (S_0, I_0, V_0)$, 且全局渐近稳定,

$$E_0 = (S_0, I_0, V_0) =$$

$$\left(\frac{A(1-q) + qAe^{-\mu\tau}}{\mu + p(1 - e^{-\mu\tau})}, 0, \frac{(qA + pS_0)(1 - e^{-\mu\tau})}{\mu} \right)$$

b. 若 $R_0 > 1$, 则存在唯一的正平衡点(地方病平衡点) $E_\tau^* = (S_\tau^*, I_\tau^*, V_\tau^*)$, 且全局渐近稳定, 其中, $S_\tau^*, I_\tau^*, V_\tau^*$ 由下面的式子决定:

$$\begin{cases} S_\tau^* = \frac{(\mu + \gamma)I_\tau^*}{\beta f(I_\tau^*)} \\ (qA + pS_\tau^*)(1 - e^{-\mu\tau}) = \mu V_\tau^* \\ A(1-q) - \beta f(I_\tau^*)S_\tau^* - (\mu + p)S_\tau^* + \gamma I_\tau^* + (qA + pS_\tau^*)e^{-\mu\tau} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

证明 a. 显然, 模型(1)有唯一的无病平衡点 $E_0 = (S_0, I_0, V_0) =$

$$\left(\frac{A(1-q) + qAe^{-\mu\tau}}{\mu + p(1 - e^{-\mu\tau})}, 0, \frac{(qA + pS_0)(1 - e^{-\mu\tau})}{\mu} \right)$$

构造 Lyapunov 函数 $W(t) = \frac{1}{2}I^2(t)$, 由 $R_0 \leq 1$ 和性质(H)可得

$$\begin{aligned} \frac{dW(t)}{dt} &\leq (\mu + \gamma)I^2(t) \left(\frac{\beta f'(0)(A(1-q) + qAe^{-\mu\tau})}{(\mu + \gamma)(\mu + p(1 - e^{-\mu\tau}))} - 1 \right) = \\ &(\mu + \gamma)I^2(t)(R_0 - 1) \leq 0 \end{aligned}$$

因此, 当 $R_0 \leq 1$ 时, 对于 $S \geq 0, I \geq 0, V \geq 0$, 都有 $\frac{dW(t)}{dt} \leq 0$ 成立; 且 $\frac{dW(t)}{dt} = 0$ 时, 必有 $S = S_0$ 成立。显然, 此时模型(1)只有 E_0 这一个不动点, 即 E_0 是 $\left\{ (S, I, V) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{dW(t)}{dt} = 0 \right\}$ 中的最大不变集。由 Lyapunov-LaSalle 不变集原理^[9]可知, 对任意的 $\tau \geq 0$, 模型(1)的无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的。证毕。

显然, 当 $R_0 > 1$ 时, 无病平衡点 E_0 是不稳定的。

b. 先证明正平衡点的存在唯一性。由 $\beta f(I)S - (\mu + \gamma)I = 0$, 可得 $S = \frac{(\mu + \gamma)I}{\beta f(I)}$,

$$A(1-q) - \beta f(I)S - (\mu + p)S + \gamma I + (qA + pS)e^{-\mu\tau} = 0$$

进一步化简可得

$$A(1-q) - \mu I - \frac{(\mu + p)(\mu + \gamma)I}{\beta f(I)} + \left(qA + p \frac{(\mu + \gamma)I}{\beta f(I)} \right) e^{-\mu\tau} = 0$$

令

$$H(I) = A(1-q) - \mu I - \frac{(\mu + p)(\mu + \gamma)I}{\beta f(I)} + \left(qA + p \frac{(\mu + \gamma)I}{\beta f(I)} \right) e^{-\mu\tau}$$

则

$$H'(I) = -\mu - [\mu + p(1 - e^{-\mu\tau})] \frac{(\mu + \gamma)}{\beta} \frac{f(I) - If'(I)}{f^2(I)}$$

则 $H'(I) < 0$ 。又

$$\lim_{I \rightarrow \infty} H(I) = \lim_{I \rightarrow \infty} \left(A(1-q) - \mu I - \frac{(\mu + \gamma)}{\beta} (\mu + p(1 - e^{-\mu\tau})) \frac{I}{f(I)} + qAe^{-\mu\tau} \right) < 0$$

由

$$f(I) = f(0) + f'(0)I + \frac{f''(0)}{2!}I^2 + \dots \approx f'(0)I$$

则

$$H(I) = A(1-q) - \mu I - \frac{(\mu + \gamma)(\mu + p(1 - e^{-\mu\tau}))}{\beta} \frac{1}{f'(0)} + qAe^{-\mu\tau}$$

故可得

$$\begin{aligned} H(0) &= A(1-q) - \frac{(\mu + \gamma)(\mu + p(1 - e^{-\mu\tau}))}{\beta f'(0)} + qAe^{-\mu\tau} = \\ &(A(1-q) + qAe^{-\mu\tau}) \left(1 - \frac{(\mu + \gamma)(\mu + p(1 - e^{-\mu\tau}))}{\beta f'(0)(A(1-q) + qAe^{-\mu\tau})} \right) = \\ &(A(1-q) + qAe^{-\mu\tau}) \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) \end{aligned}$$

显然, 当 $R_0 > 1$ 时, $H(0) > 0$ 。因此, 由根的存在性以及函数单调性可知, $H(I)$ 存在唯一的正解, 即说明模型(1)当 $R_0 > 1$ 时存在唯一的正平衡点(地方病平衡点) $E_\tau^* = (S_\tau^*, I_\tau^*, V_\tau^*)$, 其中, $S_\tau^*, I_\tau^*, V_\tau^*$ 满足式(3)。

再证明正平衡点 $E_\tau^* = (S_\tau^*, I_\tau^*, V_\tau^*)$ 具有局部渐近稳定性。

对于模型(1), 当 $R_0 > 1$, 并满足条件:

$$d + \gamma + \alpha > \beta f'(I_\tau^*)S_\tau^*, \quad d + \gamma + p > \beta f'(I_\tau^*)S_\tau^* \quad (4)$$

则正平衡点 $E_\tau^* = (S_\tau^*, I_\tau^*, V_\tau^*)$ 局部渐近稳定。

由于模型(1)的前 2 个方程不含有变量 V , 不失一般性, 这里考虑模型(1)的前 2 个方程在正平衡点处所对应的线性化系统的特征方程:

$$\begin{aligned} &\lambda^2 + [2\mu + p + \gamma - \beta f'(I_\tau^*)S_\tau^* + \beta f(I_\tau^*)]\lambda + \\ &[\mu + p + \beta f(I_\tau^*)][\mu + \gamma - \beta f'(I_\tau^*)S_\tau^*] + \\ &\beta f(I_\tau^*)[\beta f'(I_\tau^*)S_\tau^* - \gamma] - [pe^{-d\tau}\lambda + \\ &pe^{-d\tau}(\mu + \gamma - \beta f'(I_\tau^*)S_\tau^*)]e^{-\lambda\tau} = 0 \end{aligned}$$

为方便起见, 将上式记为

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_0 + [q_1\lambda + q_0]e^{-\lambda\tau} = 0 \tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned} p_1 &= 2\mu + p + \gamma - \beta f'(I_\tau^*)S_\tau^* + \beta f(I_\tau^*) \\ p_0 &= (\mu + p)(\mu + \gamma - \beta f'(I_\tau^*)S_\tau^*) + \beta\mu f(I_\tau^*) \\ q_1 &= -pe^{-\mu\tau} \\ q_0 &= -pe^{-\mu\tau}(\mu + \gamma - \beta f'(I_\tau^*)S_\tau^*) \end{aligned}$$

当 $\tau=0$ 时, 由以上表达式可得

$$\begin{aligned} p_0 + q_0 &= \mu(\mu + \alpha + \gamma - \beta f'(I_\tau^*)S_\tau^*) + \beta\alpha f(I_\tau^*) \\ p_1 + q_1 &= \mu + \beta f(I_\tau^*) + \mu + \gamma - \beta f'(I_\tau^*)S_\tau^* \end{aligned}$$

显然, 当 $\mu + \gamma > \beta f'(I_\tau^*)S_\tau^*$ 时, 有

$$p_0 + q_0 > 0, \quad p_1 + q_1 > 0$$

故当 $\tau=0$ 时, 式(5)所有的根均具有负实部。此时, 正平衡点 $E_0^* = (S_0^*, I_0^*)$ 是局部渐近稳定的。

当 $\tau > 0$ 时, 令 $\lambda = iw (w > 0)$ 是方程(5)的解, 将 $\lambda = iw (w > 0)$ 代入方程(5)并分离实部和虚部,

$$\begin{aligned} w^2 - p_0 &= q_0 \cos(w\tau) + q_1 w \sin(w\tau) \\ p_1 w &= q_0 \sin(w\tau) - q_1 w \cos(w\tau) \end{aligned}$$

对上面两式分别平方然后相加, 可得

$$w^4 + (p_1^2 - 2p_0 - q_1^2)w^2 + p_0^2 - q_0^2 = 0 \tag{6}$$

这里

$$\begin{aligned} p_0 - q_0 &= [\mu + p(1 + e^{-\mu\tau})](\mu + \gamma - \beta f'(I_\tau^*)S_\tau^*) + \beta\mu f(I_\tau^*) \\ p_0 + q_0 &= [\mu + p(1 - e^{-\mu\tau})](\mu + \gamma - \beta f'(I_\tau^*)S_\tau^*) + \beta\mu f(I_\tau^*) \\ p_1^2 - 2p_0 - q_1^2 &= \mu^2 + 2\mu p + \\ &p^2(1 - e^{-2\mu\tau}) + [\mu + \gamma - \beta f'(I_\tau^*)S_\tau^*]^2 + \\ &[\mu + p + \gamma - \beta f'(I_\tau^*)S_\tau^*]\beta f(I_\tau^*) + \beta^2 f^2(I_\tau^*) \end{aligned}$$

显然, 当式(4)中的条件成立时, 一定有

$$p_0^2 - q_0^2 > 0, \quad p_1^2 - 2p_0 - q_1^2 > 0$$

故方程(6)没有正根存在。所以, 对所有的 $\tau \geq 0$, 当满足条件式(4)时, 正平衡点 $E_\tau^* = (S_\tau^*, I_\tau^*, V_\tau^*)$ 具有局部渐近稳定性。

接下来证明正平衡点 $E_\tau^* = (S_\tau^*, I_\tau^*, V_\tau^*)$ 具有全局渐近稳定性。

构造 Lyapunov 函数

$$W_1(t) = \frac{1}{2}(S - S_\tau^* + I - I_\tau^* + V - V_\tau^*)^2$$

则

$$\begin{aligned} \frac{dW_1(t)}{dt} &= (S - S_\tau^* + I - I_\tau^* + V - V_\tau^*) \left(\frac{dS(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dV(t)}{dt} \right) = \\ &(S - S_\tau^* + I - I_\tau^* + V - V_\tau^*)(A - \mu S - \mu I - \mu V) \end{aligned}$$

由式(3)可得

$$\frac{dW_1(t)}{dt} = -\mu(S - S_\tau^* + I - I_\tau^* + V - V_\tau^*)^2 \leq 0$$

因此, 当 $R_0 > 1$ 时, 对于 $S \geq 0, I \geq 0, V \geq 0$, 都有 $\frac{dW_1(t)}{dt} \leq 0$ 成立; 显然, $\left\{ (S, I, V) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{dW_1(t)}{dt} = 0 \right\}$ 中的最大不变集是单点集 E_τ^* 。

由 Lyapunov-LaSalle 不变集原理^[13]可知, $A = \mu(S_\tau^* + I_\tau^* + V_\tau^*)$ 对任意的 $\tau \geq 0$, 模型(1)的地方病平衡点 E_τ^* 是全局渐近稳定的。证毕。

3 数值模拟和结论

利用 Higham^[14]提出的 Milstein 的高阶离散方法, 对模型(1)在初值为 $(S(0), I(0), V(0)) = (3, 3, 3)$ 时进行数值模拟, 其中, $f(I) = \frac{I}{1 + \alpha I}$, 选取参数 $A=2, \beta=1, \gamma=0.5, \mu=0.1, q=0.3, p=0.2, \alpha=0.2$ 。比较图1中不同的 τ 值: 当 τ 较小时, 感染人群的平衡点大于 $\tau=0$ 时所对应的的平衡点; 当 τ 较大时, 感染人群的平衡点小于 $\tau=0$ 时所对应的的平衡点。染病者的平衡点随着 τ 值的增大而变小。

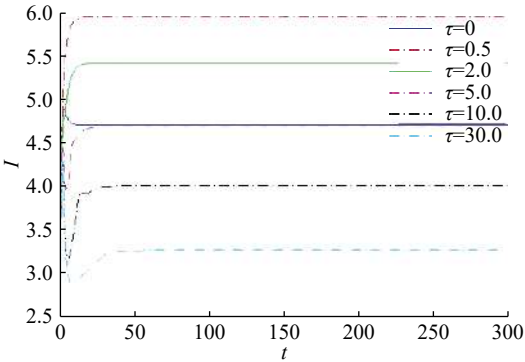


图1 取不同 τ 值时感染人群随时间的变化曲线

Fig.1 Variation of infective population with time for different value of delay τ

本文讨论了一类更符合实际、更复杂的非线性传染率的 SIS 传染病接种模型, 能更好地体现疾病的传播机理, 具有重要的生物学意义, 得到了疾病存在与否的阈值——基本再生数 R_0 。当 $R_0 \leq 1$ 时, 模型(1)存在唯一的无病平衡点 E_0 , 通过构造相应的 Lyapunov 函数, 利用 Lyapunov-LaSalle 不变集原理得到此平衡点是全局渐近稳定的, 即疾

病灭绝; 当 $R_0 > 1$ 时, 模型(1)存在唯一的地方病平衡点 E_τ^* , 且是全局渐近稳定的, 即疾病将持续存在。从以上结论可知, 通过调控接种参数以及其他相关参数, 可以使得模型的阈值 R_0 小于1, 从而达到控制疾病流行的目的。同时, 通过数值模拟直观地观察到感染人群的数量随着 τ 值的变化情况, 这为疾病防控部门有效地预防和控制疾病传播提供了重要的理论依据。

参考文献:

- [1] XU R. Global stability of a delayed epidemic model with latent period and vaccination strategy[J]. [Applied Mathematical Modelling](#), 2012, 36(11): 5293–5300.
- [2] LIU X B, YANG L J. Stability analysis of an SEIQV epidemic model with saturated incidence rate[J]. [Nonlinear Analysis: Real World Applications](#), 2012, 13(6): 2671–2679.
- [3] GAO S J, OUYANG H S, NIETO J J. Mixed vaccination strategy in SIRS epidemic model with seasonal variability on infection[J]. [International Journal of Biomathematics](#), 2011, 4(4): 473–491.
- [4] 刘群, 陈清梅. 具有疫苗接种和暂时性免疫随机延迟的 SIR 传染病模型[J]. 中国科学: 数学, 2016, 46(11): 1745–1756.
- [5] 王拉娣, 李建全. 一类带有非线性传染率的 SEIS 传染病模型的定性分析[J]. [应用数学和力学](#), 2006, 27(5): 591–596.
- [6] 杨洪, 魏俊杰. 一类带有非线性接触率的 SIR 传染病模型的稳定性[J]. 高校应用数学学报, 2014, 29(1): 11–16.
- [7] 杨亚莉, 李建全, 刘万萌, 等. 一类具有分布时滞和非线性发生率的媒介传染病模型的全局稳定性[J]. [应用数学和力学](#), 2013, 34(12): 1291–1299.
- [8] 周艳丽, 张卫国. 一类具有非单调传染率的 SEIRS 时滞传染病模型的全局稳定性[J]. 上海理工大学学报, 2014, 36(2): 103–109.
- [9] TENG Z H, WANG L. Persistence and extinction for a class of stochastic SIS epidemic models with nonlinear incidence rate[J]. [Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications](#), 2016, 451: 507–518.
- [10] LI J Q, MA Z E. Global analysis of SIS epidemic models with variable total population size[J]. [Mathematical and Computer Modelling](#), 2004, 39(11/12): 1231–1242.
- [11] HALE J K, LUNEL S M V. Introduction to functional differential equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [12] LI B T, KUANG Y. Simple food chain in a chemostat with distinct removal rates[J]. [Journal of Mathematical Analysis and Applications](#), 2000, 242(1): 75–92.
- [13] 马知恩, 周义仓. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [14] HIGHAM D J. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations[J]. [SIAM Review](#), 2001, 43(3): 525–546.

(编辑: 石 瑛)