

代数体函数及其线性微分多项式的唯一性

黄尧, 刘晓俊

(上海理工大学理学院, 上海 200093)

摘要: 利用现有的亚纯函数和代数体函数的相关结论, 研究代数体函数的分担值与分支点之间的关系, 得到一个代数体函数与其线性微分多项式具有公共值的唯一性定理, 将关于亚纯函数与其线性微分多项式的一个唯一性定理推广到代数体函数。

关键词: 代数体函数; 线性微分多项式; 分担值; 唯一性

中图分类号: O 174.52 **文献标志码:** A

Uniqueness for Algebroid Function and its Linear Differential Polynomial

HUANG Yao, LIU Xiaojun

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: By using the existing meromorphic functions and the related conclusions about algebroid functions, the relationship between the shared value of algebroid functions and the branch points was studied. The uniqueness theorem as regards an algebroid function and its linear differential polynomial with common values was presented. So, the uniqueness theorem for meromorphic functions and its linear differential polynomial was extended to algebroid functions.

Keywords: algebroid function; linear differential polynomial; shared value; uniqueness

1 问题的提出

代数体函数是由不可约方程

$$\psi(z, W) \equiv A_\nu(z) W^\nu + A_{\nu-1}(z) W^{\nu-1} + \cdots + A_0(z) = 0 \quad (1)$$

确定的 ν 值解析函数, 其中, $A_j(z) (j=0, 1, \cdots, \nu)$ 是关于 z 的全纯函数, 并且没有公共零点。特别地, 如果 $A_j(z) (j=0, 1, \cdots, \nu)$ 都是多项式时, 则 $W(z)$ 是 ν 值代

数函数。本文假设 $A_j(z) (j=0, 1, \cdots, \nu)$ 中至少有一个是超越整函数。当 $\nu=1$ 时, $W(z)$ 为亚纯函数; 当 $\nu \geq 2$ 时, $W(z)$ 为多值函数。显然, ν 值代数体函数是亚纯函数的延伸。

本文中代数体函数 $W(z)$ 的一阶导函数记为 $W'(z)$, k 阶导函数记为 $W^{(k)}(z)$ 及其线性微分多项式函数记为 $L(W)$, $L(W) = c_k W^{(k)} + c_{k-1} W^{(k-1)} + \cdots + c_0 W$,

收稿日期: 2018-06-28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11401381)

第一作者: 黄尧 (1992-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 复分析. E-mail: 297546618@qq.com

通信作者: 刘晓俊 (1982-), 男, 副教授. 研究方向: 复分析. E-mail: xiaojunliu2007@hotmail.com

其中, $c_0, c_1, \dots, c_k$ 为不全为零的有穷复数, 且 $c_k \neq 0$ 。它们都是 ν 值代数体函数, 具体证明参见文献[1]。在本文中若不加其他说明, $W(z)$ 是指在整个复平面 C 上由不可约方程(1)所确定的 ν 值代数体函数。本文所使用的记号和相关结论参见文献[2-5]。

定义 1^[6] 设 $W(z)$ 为 ν 值代数体函数, $z_0 \in C$ 。定义:

$$W^{-1}(a) = \{(w_{\lambda_j}(z), z_0) : (w_{\lambda_j}(z), B(z_0)) \in F(W), w_{\lambda_j}(z_0) = a\}$$

$$W^{-1}(\infty) = \{(w_{\lambda_j}(z), z_0) : (w_{\lambda_j}(z), B(z_0)) \in F(W), w_{\lambda_j}(z_0) = \infty\}$$

其中

$$F(W) = \left\{ (w_{\lambda_j}(z), B(z_0)) : j = 1, 2, \dots, l, \sum_{j=1}^l \lambda_j = \nu, z_0 \in C \right\}$$

则 $W^{-1}(a)$ 被称为 $W(z)$ 的 a 值点, $W^{-1}(\infty)$ 被称为 $W(z)$ 的极点。

定义 2^[6] 设 $W(z)$ 为 ν 值代数体函数, $z_0 \in C$ 。如果 $W^{-1}(z_0) = (L(W))^{-1}(z_0)$, 且对于每一 $(w_{\lambda_j}, z_0) \in W^{-1}(a)$, 有 $\tau(z_0, w_{\lambda_j}(z) = a) = \tau(z_0, L(w_{\lambda_j}) = a)$ 成立, 其中, $\tau(z_0, w_{\lambda_j}(z) = a)$ 表示在 $z = z_0$ 时 $w_{\lambda_j}(z) - a$ 的零点重级, 则称 $W(z)$ 与 $L(W)$ CM 分担 a 。

关于亚纯函数及其线性微分多项式的唯一性问题, 文献[7]证明了定理 1。

定理 1 设 f 为非常数亚纯函数, k 为一正整数, $L(f)$ 为关于 f 的线性微分多项式, $L(f) = c_k f^{(k)} + c_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + c_0 f$, 其中, $c_0, c_1, \dots, c_k$ 为 f 的不恒为 ∞ 的小函数, 且 $c_k \neq 0$, 再设 a_1, a_2, a_3 为 f 的不恒为 ∞ 的小函数, 如果 f 与 $L(f)$ 几乎 CM 分担 a_1, a_2 , 几乎 IM 分担 a_3 , 则 $f \equiv L(f)$ 。

关于代数体函数的唯一性问题, 文献[8-9]分别得到了定理 2 和定理 3。

定理 2 设 $W(z)$ 为 ν 值代数体函数, 设 $a_1, a_2, \dots, a_{2\nu}$ 是 2ν 个判别的有穷复数, 如果 $W(z)$ 与 $W'(z)$ CM 分担 $a_1, a_2, \dots, a_{2\nu}$ 且 IM 分担 ∞ , 则 $W(z) \equiv W'(z)$ 。

定理 3 设 $W(z)$ 为 $\nu (\nu \geq 2)$ 值代数体函数, 设 $a_1, a_2, \dots, a_{2\nu-1}$ 是 $2\nu-1$ 个判别的有穷非零复数, 如果 $W(z)$ 与 $W'(z)$ CM 分担 $0, a_1, a_2, \dots, a_{2\nu-1}$, 如果存在有穷实数 $c, R > 0$, 当 $|z| = r > R$ 时, 有 $|W_j(z)| > c$ ($j = 1, 2, \dots, \nu$) 及 $|W'_j(z)| > c$ ($j = 1, 2, \dots, \nu$), 则 $W(z) \equiv W'(z)$ 。

现结合定理 2 和定理 3, 将定理 1 推广到代数体函数, 得到定理 4。

定理 4 设 $W(z)$ 为 ν 值代数体函数, k 为一正整数, $L(W)$ 为 W 的线性微分多项式, $L(W) = c_k W^{(k)} + c_{k-1} W^{(k-1)} + \dots + c_0 W$, 其中, $c_0, c_1, \dots, c_k$ 为不全为零的有穷复数, 且 $c_k \neq 0$, 再设 $a_1, a_2, \dots, a_{2\nu+1}$ 是 $2\nu+1$ 个互相判别的有穷复数, 如果 $W(z)$ 与 $L(W)$ CM 分担 $a_1, a_2, \dots, a_{2\nu+1}$, 则有:

- a. 当 $\nu \geq 3$ 时, 且 $a_1, a_2, \dots, a_{2\nu+1}$ 是有穷非零复数, 则 $W(z) \equiv L(W)$;
- b. 当 $\nu \geq 4$ 时, 且 $a_1, a_2, \dots, a_{2\nu+1}$ 是包括 0 的有穷复数, 则 $W(z) \equiv L(W)$ 。

2 引理

引理 1 设 $W(z)$ 为 ν 值代数体函数, 设 $a_1, a_2, \dots, a_{2\nu+1}$ 是 $(2\nu+1)$ 个判别的有穷非零复数, 如果 $W(z)$ 与 $L(W)$ CM 分担 $a_1, a_2, \dots, a_{2\nu+1}$, 则

$$\sum_{i=1}^{2\nu+1} N\left(r, \frac{1}{W-a_i}\right) = \sum_{i=1}^{2\nu+1} N\left(r, \frac{1}{L-a_i}\right) N\left(r, \frac{1}{L-W}\right)$$

证明 对任意 $a_i (i = 1, 2, \dots, 2\nu+1)$, 如果 $(w_{\lambda_j}(z), z_0) \in W^{-1}(a_i)$, 则有

$$w_{\lambda_j}(z) = a_i + \sum_{p=u}^{\infty} b_p (z-z_0)^{\frac{p}{\lambda_j}}, b_u \neq 0$$

其中, $b_p (p = u, u+1, u+2, \dots)$ 是有穷复数, 求 k 阶导可得

$$w_{\lambda_j}^{(k)}(z) = \sum_{p=u}^{\infty} b_p \frac{p}{\lambda_j} \frac{p-\lambda_j}{\lambda_j} \dots \frac{p-(k-1)\lambda_j}{\lambda_j} (z-z_0)^{\frac{p-k\lambda_j}{\lambda_j}}, b_u \neq 0$$

$$L(w_{\lambda_j}) = c_k w_{\lambda_j}^{(k)}(z) + c_{k-1} w_{\lambda_j}^{(k-1)}(z) + \dots + c_0 w_{\lambda_j}(z)$$

由 $W(z)$ 与 $L(W)$ CM 分担 a_i 可得

$$L(w_{\lambda_j}) = a_i + \sum_{p=u}^{\infty} d_p (z-z_0)^{\frac{p}{\lambda_j}}, d_u \neq 0$$

其中, $d_p (p = u, u+1, u+2, \dots)$ 是有穷复数。由以上分析可得

$$\begin{aligned} \tau(z_0, L(w_{\lambda_j}) - w_{\lambda_j}(z) = 0) &\geq u = \\ \tau(z_0, w_{\lambda_j}(z) = a_i) &= \tau(z_0, L(w_{\lambda_j}) = a_i) \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2v+1} n\left(r, \frac{1}{W(z)-a_i}\right) &= \sum_{i=1}^{2v+1} \sum_{(w_{\lambda_j(z)}, z_0) \in w^{-1}(a_i), |z_0| < r} \tau(z_0, w_{\lambda_j}(z) = a_i) = \sum_{(w_{\lambda_j(z)}, z_0) \in w^{-1}(a_i), |z_0| < r} \sum_{i=1}^{2v+1} \tau(z_0, w_{\lambda_j}(z) = a_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{2v+1} n\left(r, \frac{1}{L(W)-a_i}\right) = \sum_{i=1}^{2v+1} \sum_{(L(w_{\lambda_j}), z_0) \in (L(w_{\lambda_j}))^{-1}(a_i), |z_0| < r} \tau(z_0, L(w_{\lambda_j}) = a_i) = \\ &= \sum_{(L(w_{\lambda_j}), z_0) \in (L(w_{\lambda_j}))^{-1}(a_i), |z_0| < r} \sum_{i=1}^{2v+1} \tau(z_0, L(w_{\lambda_j}) = a_i) \leq n\left(r, \frac{1}{L(W)-W(z)}\right) \end{aligned}$$

所以,

$$\sum_{i=1}^{2v+1} N\left(r, \frac{1}{W-a_i}\right) = \sum_{i=1}^{2v+1} N\left(r, \frac{1}{L-a_i}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{L-W}\right)$$

证毕。

引理 2^[10] 设 $W(z)$ 为 v 值代数体函数, 设 $a_1, a_2, \dots, a_q$ 是 q 个判别的有穷复数, 则

$$m\left(r, \sum_{i=1}^q \frac{1}{W-a_i}\right) = \sum_{i=1}^q m\left(r, \frac{1}{W-a_i}\right) + O(1)$$

引理 3^[10] 设 $W(z)$ 为 v 值代数体函数, 则

$$N_x(r, W) \leq 2(v-1)T(r, W) + O(1)$$

引理 4^[11-12] 设 $W(z)$ 为 v 值代数体函数, k 为一正整数, $L(W)$ 为 W 的线性微分多项式, $L(W) = c_k W^{(k)} + c_{k-1} W^{(k-1)} + \dots + c_0 W$, 其中, $c_0, c_1, \dots, c_k$ 为不全为零的有穷复数, 且 $c_k \neq 0$, 再设 $a_1, a_2, \dots, a_q$ 是

$$\sum_{i=1}^{2v+1} m\left(r, \frac{1}{W-a_i}\right) = m\left(r, \sum_{i=1}^{2v+1} \frac{1}{W-a_i}\right) + O(1) \leq m\left(r, \frac{1}{W'}\right) + m\left(r, \sum_{i=1}^{2v+1} \frac{W'}{W-a_i}\right) + O(1) \leq T(r, W') + S(r, W) \leq$$

$$m(r, W) + m\left(r, \frac{W'}{W}\right) + N(r, W') + S(r, W) \leq m(r, W) + N(r, L) + S(r, W) \leq T(r, W) + T(r, L) + S(r, W) \quad (3)$$

结合式(2)和式(3), 可得

$$(2v+1)T(r, W) \leq 2T(r, L) + 2T(r, W) + S(r, W)$$

整理上式, 可得

$$(2v-1)T(r, W) \leq 2T(r, L) + S(r, W) \quad (4)$$

由引理 3, 引理 4 和式(2)可得

$$\begin{aligned} (2v-1)T(r, L) &< \sum_{i=1}^{2v+1} \tilde{N}\left(r, \frac{1}{L-a_i}\right) + N_x(r, W) + \\ S(r, L) &\leq N\left(r, \frac{1}{L-W}\right) + N_x(r, W) + S(r, L) \leq \\ T(r, W) + T(r, L) + 2(v-1)T(r, W) + S(r, L) \end{aligned}$$

整理上式, 可得

$q(q \geq 3)$ 个互相判别的复数, 则有

$$(q-2)T(r, L) < \sum_{i=1}^q \tilde{N}\left(r, \frac{1}{L-a_i}\right) + N_x(r, W) + S(r, L)$$

其中, $r \rightarrow \infty$ 且 $r \notin E$, 这里 E 是一个线性测度为有穷的集合。

3 定理 4 的证明

现证明定理 4。

证明 假设 $W(z) \neq L(W)$, 令 $q = 2v+1$ 。

a. 设 $a_1, a_2, \dots, a_{2v+1}$ 为有穷非零复数时, 由引理 1 可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2v+1} N\left(r, \frac{1}{W-a_i}\right) &\leq N\left(r, \frac{1}{L-W}\right) \leq \\ T(r, L-W) + O(1) &\leq T(r, L) + T(r, W) + O(1) \quad (2) \end{aligned}$$

由引理 2 可得

$$(2v-2)T(r, L) \leq (2v-1)T(r, W) + S(r, L) \quad (5)$$

由式(5)可得, $S(r, L) = S(r, W)$ 。因此, 式(5)可变为

$$(2v-2)T(r, L) \leq (2v-1)T(r, W) + S(r, W) \quad (6)$$

再结合式(4)和式(6), 可得

$$\begin{aligned} (2v-1)T(r, W) + (2v-2)T(r, L) &\leq \\ (2v-1)T(r, W) + 2T(r, L) + S(r, W) \end{aligned}$$

从而有

$$(2v-4)T(r, L) \leq S(r, W), v \geq 3$$

矛盾。

b. 设 $a_1, a_2, \dots, a_{2v+1}$ 中有一个为 0, 设 $a_{2v+1} = 0$ 。

由引理 1 可得

$$\sum_{i=1}^{2v+1} N\left(r, \frac{1}{W-a_i}\right) = \sum_{i=1}^{2v} N\left(r, \frac{1}{W-a_i}\right) + N\left(r, \frac{1}{W}\right) \leqslant$$

$$N\left(r, \frac{1}{L-W}\right) + N\left(r, \frac{1}{L}\right) \leqslant T(r, L-W) + N\left(r, \frac{1}{L}\right) +$$

$$O(1) \leqslant T(r, L) + T(r, W) + T\left(r, \frac{1}{L}\right) + O(1) \leqslant$$

$$2T(r, L) + T(r, W) + O(1) \quad (7)$$

结合式(3)和式(7), 可得

$$(2v+1)T(r, W) \leqslant 3T(r, L) + 2T(r, W) + S(r, W)$$

整理上式, 可得

$$(2v-1)T(r, W) \leqslant 3T(r, L) + S(r, W) \quad (8)$$

另一方面, 类似于式(5)的证明, 有

$$(2v-1)T(r, L) < \sum_{i=1}^{2v} \bar{N}\left(r, \frac{1}{L-a_i}\right) + N\left(r, \frac{1}{L}\right) + N_x(r, W) +$$

$$S(r, L) \leqslant N\left(r, \frac{1}{L-W}\right) + N\left(r, \frac{1}{L}\right) + N_x(r, W) + S(r, L) \leqslant$$

$$T(r, W) + 2T(r, L) + 2(v-1)T(r, W) + S(r, L)$$

整理上式, 可得

$$(2v-3)T(r, L) \leqslant (2v-1)T(r, W) + S(r, L) \quad (9)$$

由式(9)可得, $S(r, L) = S(r, W)$ 。因此, 式(9)可变为

$$(2v-3)T(r, L) \leqslant (2v-1)T(r, W) + S(r, W) \quad (10)$$

再结合式(8)和式(10), 可得

$$(2v-1)T(r, W) + (2v-3)T(r, L) \leqslant$$

$$3T(r, L) + (2v-1)T(r, W) + S(r, W)$$

从而有

$$(2v-6)T(r, L) \leqslant S(r, W), v \geqslant 4$$

矛盾, 定理4得证。

参考文献:

- [1] 张少华, 孙道椿. 代数体函数的导函数的级[J]. [数学物理学报](#), 2005, 25(6): 933-938.
- [2] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.
- [3] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1995.
- [4] 何育赞, 萧修治. 代数体函数与常微分方程[M]. 北京: 科学出版社, 1988.
- [5] 孙道椿, 高宗升. 代数体函数的值分布[M]. 北京: 科学出版社, 2014.
- [6] 刘慧芳, 孙道椿. 与其导数具有公共值的代数体函数的唯一性定理[J]. [数学物理学报](#), 2011, 31A(5): 1335-1344.
- [7] 陈俊凡, 林珊华. 亚纯函数及其微分多项式的唯一性[J]. [纯粹数学与应用数学](#), 2006, 22(3): 360-364.
- [8] 刘慧芳. 代数体函数与其导数的唯一性[J]. [数学物理学报](#), 2014, 34(5): 1296-1303.
- [9] 姜云波, 高宗升. 涉及CM分担值的代数体函数的唯一性[J]. [数学物理学报](#), 2014, 34A(4): 796-801.
- [10] 张庆彩. 关于代数体函数与其导数的唯一性[J]. [数学的实践与认识](#), 2013, 43(1): 183-187.
- [11] HUANG B. On differential polynomials of algebroid functions[J]. [Journal of Mathematics](#), 2001(1): 53-56.
- [12] 黄斌, 方丽飞. 代数体函数及其微分多项式[J]. [数学学报](#), 2004, 47(1): 157-172.

(编辑: 石 瑛)