

分块对称 r 循环算子的范数不等式

史一彬, 秦 梅

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 循环(块循环)算子是一类重要的算子, 在量子计算、时间序列分析、压缩感知等科学与工程计算中有着广泛的应用。分块对称 r 循环(r 反循环)算子的生成方式可以看作是将循环算子的生成方式取对称, 并将副对角线以下的元素添加参数 r 或 $-r$, $r > 0$ 。基于降阶思想, 利用分块对称 r 循环矩阵的对角化性质和酉不变(弱酉不变)范数的性质, 给出了分块对称 r 循环算子和分块对称 r 反循环算子由子块导出的算子范数和 Schatten p -范数不等式和等式结果。

关键词: 分块对称 r 循环算子; 分块对称 r 反循环算子; 酉不变范数; 算子范数; Schatten p -范数; 不等式

中图分类号: O 151.2

文献标志码: A

Norm Inequalities for Block Symmetric r -Circulant Operator

SHI Yibin, QIN Mei

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: Circulant (block circulant) operators are an important class of operators, which have wide applications in science and engineering calculations such as quantum computation, time-series analysis and compressing sensing, etc. The generation of block symmetric r -circulant operators (block symmetric r -skew-circulant operators) can be seen as symmetrical generation of circulant operators and adding parameters r or $-r$ to entries below the para-diagonal elements. Based on the idea of order reduction, and using the properties of the diagonalization of block symmetric r -circulant operator matrices and unitarily invariant (weakly unitarily invariant) norm, the operator norms and Schatten p -norm inequalities and equality results of the block symmetric r -circulant operators and the block symmetric r -skew-circulant operators derived from the sub-block are given.

Keywords: block symmetric r -circulant operator; block symmetric r -skew-circulant operator; unitarily invariant norm; operator norm; Schatten p -norm; inequalities

基于降阶的思想, 由分块循环算子的元素估计分块循环算子范数的方法近年来越来越

引起研究者的关注。Audenaert^[1]给出了形如 $A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^* & D \end{pmatrix}$ 的半正定 2×2 块矩阵的范数上下界,

收稿日期: 2018-06-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11601332); 沪江基金资助项目(B14005)

第一作者: 史一彬(1994-), 男, 硕士研究生. 研究方向: 计算数学. E-mail: bbsyb94@hotmail.com

通信作者: 秦 梅(1975-), 女, 讲师. 研究方向: 计算数学. E-mail: qinmay2002@sina.com

Bani-Ahmad 等^[2]研究了一般形式的 2×2 块算子的范数不等式, 潘雪等^[3]、史雨梅等^[4]研究了首尾差 r -循环矩阵和块结构首尾差 r -循环矩阵的对角化和范数估计, Bani-Domia 等^[5]给出了无参数的分块循环算子的范数估计结果, 文献^[6]研究了带复参数 $i(i^2 = -1)$ 的分块循环算子的范数等式和不等式。本文也在此基础上给出了分块对称 r -循环算子和分块对称 r -反循环算子的范数等式与不等式结果。

1 预备知识

令 $B(H)$ 为 n 维复可分 Hilbert 空间 H 上的所有有界线性算子的 C^* -代数, n 个 H 空间的直和记作 $H^{(n)} = \bigoplus_n H$ 。若 $A_{j,k}(j,k=0,1,\cdots,n-1)$ 是 $B(H)$ 中的算子, 则分块算子 $A = (A_{j,k})$ 可视为 $B(H^{(n)})$ 中的算子, 且对任意分块向量 $x = (x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})^T \in H^{(n)}$ 有

$$Ax = \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_{0k}x_k, \cdots, \sum_{k=0}^{n-1} A_{n-1,k}x_k \right)^T$$

若 $A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}$ 是 $B(H)$ 中的算子, 则分块对称 r -循环算子记为

$$smcirc_r(A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}) = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{n-2} & A_{n-1} \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_{n-1} & rA_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{n-2} & A_{n-1} & \cdots & rA_{n-4} & rA_{n-3} \\ A_{n-1} & rA_0 & \cdots & rA_{n-3} & rA_{n-2} \end{pmatrix}, r > 0$$

分块对称 r -反循环算子记为

$$smscirc_r(A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}) = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{n-2} & A_{n-1} \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_{n-1} & -rA_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{n-2} & A_{n-1} & \cdots & -rA_{n-4} & -rA_{n-3} \\ A_{n-1} & -rA_0 & \cdots & -rA_{n-3} & -rA_{n-2} \end{pmatrix}, r > 0$$

特别地, 当 $r=1$ 时, $smcirc(A_0, A_1, \cdots, A_{n-1})$ 和 $smscirc(A_0, A_1, \cdots, A_{n-1})$ 分别为分块对称循环算子和分块对称反循环算子。

令 $V_1, V_2, \cdots, V_n \in B(H)$, 记 $V(V_1, V_2, \cdots, V_n) = \begin{pmatrix} I & I & \cdots & I \\ V_1 & V_2 & \cdots & V_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^{n-1} & V_2^{n-1} & \cdots & V_n^{n-1} \end{pmatrix}$ 为分块 Vandermonde 算子^[7], $\bigoplus_{k=1}^n V_k = diag(V_1, V_2, \cdots, V_n)$ 为分块对角算子^[5]。

称定义在 $B(H)$ 中的范数 τ 为弱酉不变范数^[8], 如果对于任意的 $A \in B(H)$, 同阶酉算子 $U \in B(H)$ 满足 $\tau(A) = \tau(UAU^*)$; 称定义在算子理想(包含在紧

算子理想中)中的范数 $\|\cdot\|$ 为酉不变范数^[8], 如果对于任意的 $A \in B(H)$ 及同阶酉算子 $U, V \in B(H)$ 满足 $\|A\| = \|UAUV\|$ 。

算子 $A \in B(H)$ 的 Schatten p -范数^[9]记为 $\|A\|_p = \left(\sum_{j=1}^n \sigma_j^p(A) \right)^{1/p}$, 其中 $p \in [1, +\infty)$; $\sigma_j(A)(j=1, 2, \cdots, n)$ 为 A 的奇异值, 且易知 $\|\cdot\|_p$ 是酉不变的。

2 分块对称 r -循环算子的范数上界

定理 1 若 $A_0, A_1, \cdots, A_{n-1} \in B(H)$ 且 $r \neq 1$, 则有 $\|smcirc_r(A_0, A_1, \cdots, A_{n-1})\| <$

$$\max_{k=0,1,\cdots,n-1} \left\{ t^{n-1} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} (t\omega^k)^j A_{n-1-j} \right\| \right\}$$

$$\|smcirc_r(A_0, A_1, \cdots, A_{n-1})\|_p <$$

$$\alpha \left(n^2 t^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} (t\omega^k)^j A_{n-1-j} \right\|_p^p \right)^{1/p}$$

式中: $t = r^{1/n}; \omega = e^{2\pi i/n}; i^2 = -1; \alpha = \left(\frac{2-t^{np}-t^{-np}}{2-t^p-t^{-p}} \right)^{1/p}$;

$\|\cdot\|$ 为定义在 $B(H)$ 上的算子范数。

证明 令 $1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}$ 为 n 个单位根, $\omega = e^{2\pi i/n}$, $V = \frac{1}{\sqrt{n}} V(t, t\omega, t\omega^2, \cdots, t\omega^{n-1}) \otimes I =$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} I & I & \cdots & I \\ tI & t\omega I & \cdots & t\omega^{n-1} I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^{n-1} I & (t\omega)^{n-1} I & \cdots & (t\omega^{n-1})^{n-1} I \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} I & & & \\ & tI & & \\ & & \ddots & \\ & & & t^{n-1} I \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} I & I & \cdots & I \\ I & \omega I & \cdots & \omega^{n-1} I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I & \omega^{n-1} I & \cdots & \omega^{-(n-1)(n-1)} I \end{pmatrix} =$$

TF

这里及下文中 $\otimes$ 表示 Kronecker 积。

$$V^{-1} = F^* T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} I & I & \cdots & I \\ I & \omega^{-1} I & \cdots & \omega^{-(n-1)} I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I & \omega^{-(n-1)} I & \cdots & \omega^{-(n-1)(n-1)} I \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} I & & & \\ & tI & & \\ & & \ddots & \\ & & & t^{n-1} I \end{pmatrix}^{-1}$$

$smcirc_r(A_0, A_1, \cdots, A_{n-1})$ 有如下形式的准对角化结果

$$V^{-1} \text{smcirc}_r(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{n-1}) \mathbf{Q} \mathbf{V} = \left(\bigoplus_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (t\omega^k)^j \mathbf{A}_{n-1-j} \right) \quad (1)$$

这里

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}$$

因此, $\text{smcirc}_r(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{n-1}) = \mathbf{V} \left(\bigoplus_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (t\omega^k)^j \mathbf{A}_{n-1-j} \right) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Q}$, 且 $\|\mathbf{V}\| \cdot \|\mathbf{V}^{-1}\| < t^{n-1}$, 故有

$$\begin{aligned} \|\text{smcirc}_r(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{n-1})\| &< \\ t^{n-1} \left\| \bigoplus_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (t\omega^k)^j \mathbf{A}_{n-1-j} \right\| &= \\ \max_{k=0,1,\dots,n-1} \left\{ t^{n-1} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} (t\omega^k)^j \mathbf{A}_{n-1-j} \right\| \right\} \end{aligned}$$

同理, 由式(1)可得

$$\begin{aligned} \|\text{smcirc}_r(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{n-1})\|_p &< \\ \|\mathbf{T}\|_p \left\| \bigoplus_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (t\omega^k)^j \mathbf{A}_{n-1-j} \right\|_p \|\mathbf{T}^{-1}\|_p &= \\ \left(\frac{2-t^{np}-t^{-np}}{2-t^p-t^{-p}} \right)^{1/p} \left(n^2 t^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} (t\omega^k)^j \mathbf{A}_{n-1-j} \right\|_p^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

推论 1 若 $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{n-1} \in B(H)$, $r=1$ 则有

$$\|\text{smcirc}(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{n-1})\| = \max_{k=0,1,\dots,n-1} \left\{ \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{kj} \mathbf{A}_{n-1-j} \right\| \right\}$$

$$\|\text{smcirc}(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{n-1})\|_p = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{kj} \mathbf{A}_{n-1-j} \right\|_p^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

特别地, 当 $n=2$ 时, 有

$$\|\text{smcirc}(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1)\| = \max\{\|\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\|, \|\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_0\|\}$$

$$\|\text{smcirc}(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1)\|_p = (\|\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\|_p^p + \|\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_0\|_p^p)^{1/p},$$

$1 \leq p < \infty$

推论 2 若 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in B(H)$, $r \neq 1$, 则

$$\begin{aligned} \left\| \text{smcirc}_r \left(\underbrace{\mathbf{A}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}}_{m \uparrow}, \underbrace{\mathbf{B}, \dots, \mathbf{B}}_{(n-m) \uparrow} \right) \right\| &< \\ t^{n-1} \left(\frac{1-t^{n-m}}{1-t} \|\mathbf{B}\| + \frac{t^{n-m}-t^n}{1-t} \|\mathbf{A}\| \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \text{smcirc}_r \left(\underbrace{\mathbf{A}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}}_{m \uparrow}, \underbrace{\mathbf{B}, \dots, \mathbf{B}}_{(n-m) \uparrow} \right) \right\|_p &< \\ \alpha \left(n^2 t^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \frac{1-t^{n-m}\omega^{-mk}}{1-t\omega^k} \mathbf{B} + \frac{t^{n-m}\omega^{-km}-t^n}{1-t\omega^k} \mathbf{A} \right\|_p^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

特别地, 当 $m=n$ 时,

$$\left\| \text{smcirc}_r \left(\underbrace{\mathbf{A}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}}_{n \uparrow} \right) \right\| < \frac{t^{n-1}-t^{2n-1}}{1-t} \|\mathbf{A}\|$$

$$\left\| \text{smcirc}_r \left(\underbrace{\mathbf{A}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}}_{n \uparrow} \right) \right\|_p < \alpha \left(n^2 t^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \frac{1-t^n}{1-t\omega^k} \mathbf{A} \right\|_p^p \right)^{1/p}$$

证明 由定理 1 知

$$\begin{aligned} \|\text{smcirc}_r(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{B})\| &< \\ \max_{k=0,1,\dots,n-1} \left\{ t^{n-1} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} (t\omega^k)^j \mathbf{X}_{n-1-j} \right\| \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\|\text{smcirc}_r(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{B})\|_p <$$

$$\alpha \left(n^2 t^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} (t\omega^k)^j \mathbf{X}_{n-1-j} \right\|_p^p \right)^{1/p} \quad (3)$$

这里 $\mathbf{X} = \mathbf{A}$ 或 $\mathbf{B}$ 。

对于某个 k , 式(2)右边

$$t^{n-1} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} (t\omega^k)^j \mathbf{X}_{n-1-j} \right\| \leq t^{n-1} (\beta_1 \|\mathbf{B}\| + \beta_2 \|\mathbf{A}\|)$$

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{1+t^{2(n-m)}-2t^{n-m}\cos\frac{2k(n-m)\pi}{n}}{1+t^2-2t\cos\frac{2k\pi}{n}}}$$

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{t^{2(n-m)}+t^{2n}-2t^{2n-m}\cos\frac{2k(n-m)\pi}{n}}{1+t^2-2t\cos\frac{2k\pi}{n}}}$$

且当 $k=0$ 时, 取得最大值为 $\frac{1-t^{n-m}}{1-t} \|\mathbf{B}\| + \frac{t^{n-m}-t^n}{1-t} \|\mathbf{A}\|$ 。式(3)右边合并后即得证。

3 分块对称 r 反循环算子的范数上界

定理 2 若 $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{n-1} \in B(H)$ 且 $r \neq 1$, 则有

$$\begin{aligned} \|\text{smcirc}_r(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{n-1})\| &< \\ \max_{k=0,1,\dots,n-1} \left\{ t^{n-1} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} (t\sigma\omega^k)^j \mathbf{A}_{n-1-j} \right\| \right\} \end{aligned}$$

$$\|smcscirc_r(A_0,A_1,\cdots,A_{n-1})\|_p < \alpha \left(n^2 t^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} (t\sigma\omega^k)^j A_{n-1-j} \right\|_p^p \right)^{1/p}$$

式中： $t=r^{1/n}; \sigma=e^{\pi i/n}; \omega=e^{2\pi i/n}; i^2=-1; \alpha=\left(\frac{2-t^{np}-t^{-np}}{2-t^p-t^{-p}}\right)^{1/p}$ ； $\|\cdot\|$ 为定义在 $B(H)$ 上的算子范数。

证明 令方程 $z^n=-r$ 的 n 个根为 $t\sigma, t\sigma\omega, t\sigma\omega^2, \cdots, t\sigma\omega^{n-1}$ ； $t=r^{1/n}$ ； $\sigma=e^{\pi i/n}$ ； $\omega=e^{2\pi i/n}$ ，

$$V=\frac{1}{\sqrt{n}}V(t\sigma, t\sigma\omega, t\sigma\omega^2, \cdots, t\sigma\omega^{n-1})\otimes I=\\ \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} I & I & \cdots & I \\ tI & t\omega I & \cdots & t\omega^{n-1}I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^{n-1}I & (t\omega)^{n-1}I & \cdots & (t\omega^{n-1})^{n-1}I \end{pmatrix}=\\ \begin{pmatrix} I & & & \\ & tI & & \\ & & \ddots & \\ & & & t^{n-1}I \end{pmatrix}\cdot\\ \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} I & I & \cdots & I \\ \sigma I & \sigma\omega I & \cdots & \sigma\omega^{n-1}I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma^{n-1}I & (\sigma\omega)^{n-1}I & \cdots & (\sigma\omega^{(n-1)})^{(n-1)}I \end{pmatrix}\\ =TF$$

所以 $V^{-1}=F^*T^{-1}$ 。又 $smcscirc_r(A_0,A_1,\cdots,A_{n-1})$ 有如下形式的准对角化结果：

$$V^{-1}smcscirc_r(A_0,A_1,\cdots,A_{n-1})QV=\\ \left(\bigoplus_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(t\sigma\omega^k)^jA_{n-1-j}\right) \tag{4}$$

这里 Q 与式(1)中相同。

由定理1的证明易知

$$\|smcscirc_r(A_0,A_1,\cdots,A_{n-1})\| < t^{n-1}\left\|\bigoplus_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(t\sigma\omega^k)^jA_{n-1-j}\right\| =\\ \max_{k=0,1,\cdots,n-1}\left\{t^{n-1}\left\|\sum_{j=0}^{n-1}(t\sigma\omega^k)^jA_{n-1-j}\right\|\right\}$$

同理，由式(4)可得

$$\|smcscirc_r(A_0,A_1,\cdots,A_{n-1})\|_p < \|T\|_p\left\|\bigoplus_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(t\sigma\omega^k)^jA_{n-1-j}\right\|_p\|T^{-1}\|_p=\left(\frac{2-t^{np}-t^{-np}}{2-t^p-t^{-p}}\right)^{1/p}\\ \left(n^2t^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left\|\sum_{j=0}^{n-1}(t\sigma\omega^k)^jA_{n-1-j}\right\|_p^p\right)^{1/p}$$

推论3 若 $A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}\in B(H)$ ， $r=1$ ，则有

$$\|smcscirc(A_0,A_1,\cdots,A_{n-1})\| = \max_{k=0,1,\cdots,n-1}\left\{\left\|\sum_{j=0}^{n-1}(\sigma\omega^k)^jA_{n-1-j}\right\|\right\}$$
$$\|smcscirc(A_0,A_1,\cdots,A_{n-1})\|_p = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left\|\sum_{j=0}^{n-1}(\sigma\omega^k)^jA_{n-1-j}\right\|_p^p\right)^{1/p}, 1\leq p<\infty$$

特别地，当 $n=2$ 时，有

$$\|smcscirc(A_0,A_1)\| = \max\{\|A_1+iA_0\|,\|A_1-iA_0\|\}$$
$$\|smcscirc(A_0,A_1)\|_p = \left(\|A_1+iA_0\|_p^p+\|A_1-iA_0\|_p^p\right)^{1/p}, 1\leq p<\infty.$$

推论4 若 $A,B\in B(H)$ ， $r\neq 1$ ，则

$$\left\|smcscirc_r\left(\underbrace{A,A,\cdots,A}_{m\uparrow},\underbrace{B,B,\cdots,B}_{(n-m)\uparrow}\right)\right\| < t^{n-1}(\beta_3\|B\|+\beta_4\|A\|)$$
$$\left\|smcscirc_r\left(\underbrace{A,A,\cdots,A}_{m\uparrow},\underbrace{B,B,\cdots,B}_{(n-m)\uparrow}\right)\right\|_p < \alpha\left(n^2t^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left\|\frac{1+t^{n-m}\sigma^{-m}\omega^{-km}}{1-t\sigma\omega^k}B+\frac{t^n-t^{n-m}\sigma^{-m}\omega^{-km}}{1-t\sigma\omega^k}A\right\|_p^p\right)^{1/p}$$

其中， $\beta_3=\sqrt{\frac{1+t^{2(n-m)}-2t^{n-m}\cos\frac{(n-m)\pi}{n}}{1+t^2-2t\cos\frac{\pi}{n}}}$

$$\beta_4=\sqrt{\frac{t^{2n}+t^{2(n-m)}+2t^{2n-m}\cos\frac{(n-m)\pi}{n}}{1+t^2-2t\cos\frac{\pi}{n}}}.$$

特别地，当 $m=n$ 时，

$$\left\|smcscirc_r\left(\underbrace{AA,\cdots,AA}_{n\uparrow}\right)\right\| < \frac{t^{n-1}+t^{2n-1}}{\sqrt{t^2-2t\cos(\pi/n)+1}}\|A\|$$
$$\left\|smcscirc_r\left(\underbrace{A,A,\cdots,A}_{n\uparrow}\right)\right\| < \alpha\left(n^2t^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left\|\frac{t^n+1}{1-t\sigma\omega^k}A\right\|_p^p\right)^{1/p}$$

证明 由定理2知

$$\|smcscirc_r(A,A,\cdots,A,B,\cdots,B)\| < \max_{k=0,1,\cdots,n-1}\left\{t^{n-1}\left\|\sum_{j=0}^{n-1}(t\sigma\omega^k)^jX_{n-1-j}\right\|\right\} \tag{5}$$

$$\|smscirc_r(A_0, A_1, \dots, A_{n-1})\|_p < \alpha \left(n^2 t^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} (t\sigma\omega^k)^j X_{n-1-j} \right\|^p \right)^{1/p} \tag{6}$$

这里 $X = A$ 或 B 。

对于某个 k ，式(5)右边

$$t^{n-1} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} (t\sigma\omega^k)^j X_{n-1-j} \right\| \leq t^{n-1} (\beta_5 \|B\| + \beta_6 \|A\|),$$

这里

$$\begin{aligned} \beta_5 &= \sqrt{\frac{1 + t^{2(n-m)} - 2t^{n-m} \cos \frac{(2k+1)(n-m)\pi}{n}}{1 + t^2 - 2t \cos \frac{(2k+1)\pi}{n}}} \\ \beta_6 &= \sqrt{\frac{t^{2(n-m)} + t^{2n} + 2t^{2n-m} \cos \frac{(2k+1)(n-m)\pi}{n}}{1 + t^2 - 2t \cos \frac{(2k+1)\pi}{n}}} \end{aligned} \tag{7}$$

且当 $k=0$ 时，取得最大值为

$$\begin{aligned} &t^{n-1} \left(\sqrt{\frac{1 + t^{2(n-m)} - 2t^{n-m} \cos \frac{(n-m)\pi}{n}}{1 + t^2 - 2t \cos \frac{\pi}{n}}} \right. \\ &\quad \left. \|B\| + \sqrt{\frac{t^{2n} + t^{2(n-m)} + 2t^{2n-m} \cos \frac{(n-m)\pi}{n}}{1 + t^2 - 2t \cos \frac{\pi}{n}}} \|A\| \right) \end{aligned} \tag{8}$$

式(6)右边合并后即得证。

4 结 论

上述的系列结论给出了分块对称 r 循环算子和分块对称 r 反循环算子降阶的范数结果($r = 1$)或范

数上界结果($r \neq 1$)，在一定程度上降低了计算和估计分块对称 r 循环算子和分块对称 r 反循环算子范数的复杂度。对于分块对称 r 循环算子和分块对称 r 反循环算子上界的更好的估计及其下界结果还有待进一步研究。

参考文献：

[1] AUDENAERT K M R. A norm compression inequality for block partitioned positive semidefinite matrices[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2006, 413(1): 155–176.

[2] BANI-AHMAD F A, BANI-DOMI W. New norm equalities and inequalities for operator matrices[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2016(1): 175.

[3] 潘雪, 秦梅. 首尾差 r -循环矩阵的判别方法及逆和广义逆的快速算法[J]. 上海理工大学学报, 2016, 38(3): 230–234.

[4] 史雨梅, 秦梅. 块结构 r -循环矩阵的性质及其算法研究[J]. 上海理工大学学报, 2018(4): 312–316.

[5] BANI-DOMI W, KITTANEH F. Norm equalities and inequalities for operator matrices[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2008, 429(1): 57–67.

[6] JIANG X Y, HONG K. Equalities and inequalities for norms of block imaginary circulant operator matrices[J]. Abstract and Applied Analysis, 2015: 521214.

[7] CLAEYSSSEN J C R, DOS SANTOS LEAL L A. Diagonalization and spectral decomposition of factor block circulant matrices[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1988, 99: 41–61.

[8] BHATIA R, HOLBROOK J A R. Unitary invariance and spectral variation[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1987, 95: 43–68.

[9] BHATIA R. Matrix Analysis [M]. New York: Springer-Verlag, 1997.

(编辑：董 伟)