

代数体函数与其 k 阶导数的唯一性

朱新瑶, 刘晓俊

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 利用现有的亚纯函数与其一阶导数和 k 阶导数的唯一性结论, 结合代数体函数与其一阶导数的唯一性相关结论, 将 Frank 和 Weissenborn 研究的亚纯函数与其 k 阶导数存在的唯一性定理推广到代数体函数, 研究代数体函数与其 k 阶导数存在的唯一性问题, 得到结果: $\nu(\nu \geq 2)$ 值代数体函数与其 k 阶导函数至少 CM 分担 2ν 个小函数且 IM 分担 ∞ , 则二者相等。由此, 可得推论: 对 $\nu(\nu \geq 2)$ 值代数体函数与其 k 阶导函数 CM 分担 2ν 个小函数且 IM 分担 ∞ , 则二者相等。对 ν 值代数体函数与其一阶导函数而言, 当 $\nu \geq 3$ 时, 分担值的个数可以减为 $2\nu-1$ 个, 即得到: $\nu(\nu \geq 3)$ 值代数体函数与其一阶导函数至少 CM 分担包括 0 在内的 $2\nu-1$ 个有限复数且 IM 分担 ∞ , 则二者相等。

关键词: 代数体函数; 导数; CM 分担; 唯一性

中图分类号: O 174.52 **文献标志码:** A

Uniqueness of an Algebraic Function and Its k -th Derivatives

ZHU Xinyao, LIU Xiaojun

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: By using the conclusion of uniqueness of meromorphic function and its first and k -th derivative, and combining the conclusion of the uniqueness of algebroid function and its first derivative, the uniqueness theorem of meromorphic function and its k -th derivative studied by Frank and Weissenborn is extended to algebroid function. The results show that if a ν -valued algebroid function ($\nu \geq 2$) and its k -th derivative function at least CM share 2ν small functions and IM share ∞ , then the two are equal. Herefrom, it is inferred that if a ν -valued algebroid function ($\nu \geq 2$) and its k -th derivative function CM share 2ν small functions and IM share ∞ , then the two are equal. The number of shared values can be reduced to $2\nu-1$, when the ν -value is equal to or greater than 3 ($\nu \geq 3$), that is, if an algebroid body function and its derivative functions CM share $2\nu-1$ finite complex numbers including 0 and IM share ∞ , then the two are equal.

Keywords: algebroid function; derivative; CM share; uniqueness

1 问题的提出

本文涉及的代数体函数值分布论的相关概念和记号参见文献[1-2]。

对于具有公共值的亚纯函数的唯一性问题国内外众多专家学者进行了广泛研究，得到了许多结果^[3-11]，其中一个有意义的方向是与其导数具有公共分担值的亚纯函数的唯一性问题。

1983 年，Gundersen^[2]证明了定理 A。

定理 A 设 $f(z)$ 为非常数的亚纯函数， a, b 为两个互异的有限复数，若 $f(z)$ 和 $f'(z)$ CM 分担 a, b ，则 $f(z) = f'(z)$ 。

1986 年，Frank 等^[12]证明了定理 B。

定理 B 设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数， a, b 为两个互异的有限复数，若 $f(z)$ 和 $f^{(k)}(z)$ CM 分担 a, b ，则有 $f(z) = f^{(k)}(z)$ 。

自然地，我们会考虑如何将上述结果推广到代数体函数。代数体函数是一种比亚纯函数更为广泛的多值函数，它由不可约方程

$$\psi(z, W) = A_v(z)W^v + A_{v-1}(z)W^{v-1} + \cdots + A_1(z)W + A_0(z) = 0$$
 来确定，其中 $A_v(z), \cdots, A_0(z)$ 是复平面上一组没有公共零点的解析函数。特别地，当 $A_v(z), \cdots, A_0(z)$ 都为多项式时， $W(z)$ 为代数函数。本文假设 $A_v(z), \cdots, A_0(z)$ 中至少有一个是超越整函数。当 $v \geq 2$ 时， $W(z)$ 为多值函数；当 $v = 1$ 时， $W(z)$ 就是亚纯函数。显然， v 值代数体函数是亚纯函数的自然推广。在本文中代数体函数 $W(z)$ 的一阶导数记作 $W'(z)$ ， k 阶导数记作 $W^{(k)}(z)$ ，它们都为 v 值代数体函数。

关于代数体函数的唯一性问题，刘慧芳^[13]将定理 A 推广到代数体函数，得到了定理 C。

定理 C 设 $W(z)$ 为 $v(v \geq 2)$ 值代数体函数， $a_1, a_2, \cdots, a_{2v}$ 为 $2v$ 个互异的有限复数，若 $W(z)$ 与 $W'(z)$ CM 分担 $a_1, a_2, \cdots, a_{2v}$ 且 IM 分担 ∞ ，则 $W(z) = W'(z)$ 。

当 $v = 1$ 时，定理 C 即为定理 A。

参照文献[13]中的定义方法，现给出如下记号： $W(z)$ 和 $M(z)$ 为 v 值代数体函数， a 为任意复数，且 $W(z)$ 和 $M(z)$ 分担值 a 。若 z_0 是 $W(z) - a$ 的 u 重零点时，也是 $M(z) - a$ 的至少 u 重零点，则记为： $W(z) = a \rightarrow M(z) = a$ 。特别地， $W(z) = \infty \rightarrow M(z) = \infty$ 则表示 $W(z)$ 的 u 重极点是 $M(z)$ 重数至少为 u 的极点。

本文考虑将定理 B 推广到代数体函数，得到定理 1。

定理 1 设 $W(z)$ 为 $v(v \geq 2)$ 值代数体函数， $a_1, a_2, \cdots, a_{2v}$ 为 $2v$ 个非零互异有限复数。若 $W(z) = a_i \rightarrow W^{(k)}(z) = a_i (i = 1, 2, \cdots, 2v)$ ，且 IM 分担 ∞ ，则 $W(z) = W^{(k)}(z)$ 。

由此，可得推论。

推论 设 $W(z)$ 为 $v(v \geq 2)$ 值代数体函数， $a_1, a_2, \cdots, a_{2v}$ 为 $2v$ 个互异的有限复数，若 $W(z)$ 与 $W^{(k)}(z)$ CM 分担 $a_1, a_2, \cdots, a_{2v}$ 且 IM 分担 ∞ ，则 $W(z) = W^{(k)}(z)$ 。

此外，通过对定理 C 证明过程的分析可以看出，当 $v \geq 3$ 时，定理中分担值的个数可以减为 $(2v - 1)$ 个，即得到定理 2。

定理 2 设 $W(z)$ 为 $v(v \geq 3)$ 值代数体函数，若 $W(z)$ 与 $W'(z)$ CM 分担包括 0 在内的 $2v - 1$ 个有限复数且 IM 分担 ∞ ，则 $W(z) = W'(z)$ 。

2 相关引理及其证明

引理 1 设 $W(z)$ 为 v 值代数体函数，若 $W(z)$ 与 $W^{(k)}(z)$ IM 分担 ∞ ，则有：

- a. $n(r, W^{(k)}) = n(r, W) + k\bar{n}(r, W) + kn_\chi(r, W = \infty)$;
- b. $n(r, W^{(k)}) > (k + 1)\bar{n}(r, W) + kn_\chi(r, W = \infty)$ 。

证明 设 $(w_{\lambda_j}(z), a) \in w^{-1}(\infty)$ ， $\tau(a, w_{\lambda_j}(z) = \infty) = u$ ，

则
$$w_{\lambda_j}(z) = \sum_{n=-u}^{\infty} b_n(z-a)^{\frac{n}{\lambda_j}}, b_{-u} \neq 0$$
 所以

$$w_{\lambda_j}^{(k)}(z) = \sum_{n=-u}^{\infty} b_n \frac{n}{\lambda_j} \frac{n-\lambda_j}{\lambda_j} \cdots \frac{n-(k-1)\lambda_j}{\lambda_j} (z-a)^{\frac{n-k\lambda_j}{\lambda_j}},$$

$b_{-u} \neq 0$

若 $W(z)$ 与 $W^{(k)}(z)$ IM 分担 ∞ ，则有

$$\begin{aligned} \tau(a, w_{\lambda_j}^{(k)}(z) = \infty) &= u + k\lambda_j = u + k + k\lambda_j - k = \\ &= u + k + k(\lambda_j - 1) = \tau(a, w_{\lambda_j}(z) = \infty) + \\ &+ k\bar{\tau}(a, w_{\lambda_j}(z) = \infty) + k\tau_\chi(a, w_{\lambda_j}(z) = \infty) \end{aligned}$$

所以

$$n(r, W^{(k)}) = n(r, W) + k\bar{n}(r, W) + kn_\chi(r, W = \infty)$$

因此，结论 a 成立。

由 $\bar{n}(r, W) \leq n(r, W)$ 可得

$$n(r, W^{(k)}) > (k + 1)\bar{n}(r, W) + kn_\chi(r, W = \infty)$$

因此，结论 b 成立。

引理 2^[14] 设 $W(z)$ 为 v 值代数体函数，则

$$N_\chi(r, W) \leq 2(v - 1)T(r, W) + O(1)$$

引理 3^[14] 设 $W(z)$ 为 v 值代数体函数，且 $a_1, a_2, \cdots, a_q$ 为扩充复平面上 q 个互异复数，则

$$(q-2)T(r,W)<\sum_{i=1}^qN\left(r,\frac{1}{W-a_i}\right)-\\ N_1(r,W)+N_{\chi}(r,W)+S(r,W)$$

其中, $N_1(r,W)$ 是 $W(z)$ 重值点的密指量, τ 重值点计算 $\tau-1$ 重。

引理 4^[15] 设 $W(z)$ 为 v 值代数体函数, 且 $a_1, a_2, \cdots, a_q$ 为 q 个互异复数, 则

$$\sum_{i=1}^qm\left(r,\frac{1}{W-a_i}\right)=m\left(r,\sum_{i=1}^q\frac{1}{W-a_i}\right)+O(1)$$

引理 5 设 $W(z)$ 为 v 值代数体函数, 且 $a_1, a_2, \cdots, a_{2v}$ 为复平面上 $2v$ 个互异非零有限复数。若 $W(z)=a_i \rightarrow W^{(k)}(z)=a_i, i=1,2,\cdots,2v$, 则有

$$\sum_{i=1}^{2v}N\left(r,\frac{1}{W-a_i}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{W^{(k)}-W}\right)$$

证明 设 $2v$ 个非零有限复数为 $a_1, a_2, \cdots, a_{2v}$, $(w_{\lambda_j}(z), a) \in w^{-1}(a_i)$ 且 $\tau(a, w_{\lambda_j}(z)=a_i)=u$, 则

$$w_{\lambda_j}(z)=a_i+\sum_{n=u}^{\infty}b_n(z-a)^{\frac{n}{\lambda_j}}, b_u \neq 0$$

k 次求导后有

$$w_{\lambda_j}^{(k)}(z)=\sum_{n=u}^{\infty}b_n\frac{n}{\lambda_j}\frac{n-\lambda_j}{\lambda_j}\cdots\frac{n-(k-1)\lambda_j}{\lambda_j}(z-a)^{\frac{n-k\lambda_j}{\lambda_j}}, b_u \neq 0$$

设

$$w_{\lambda_j}(z)=a_i+b_u(z-a)^{\frac{u}{\lambda_j}}+\cdots$$

由引理 5 条件可得

$$w_{\lambda_j}^{(k)}(z)=a_i+c_u(z-a)^{\frac{m}{\lambda_j}}+\cdots, u \leqslant m$$

由以上讨论可得

$$\tau(a, w_{\lambda_j}^{(k)}(z)-w_{\lambda_j}(z)) \geqslant u = \tau(a, w_{\lambda_j}(z)-a_i)$$

因此有

$$\sum_{i=1}^{2v}n\left(r,\frac{1}{W-a_i}\right)=\sum_{i=1}^{2v}\sum_{(w_{\lambda_j}(z), a) \in w^{-1}(a_i), |a|<r}\tau(a, w_{\lambda_j}(z)=a_i) \leqslant \\ \sum_{i=1}^{2v}\sum_{(w_{\lambda_j}(z), a) \in w^{-1}(a_i), |a|<r}\tau(a, w_{\lambda_j}^{(k)}(z)-w_{\lambda_j}(z))= \\ n\left(r,\frac{1}{W^{(k)}-W}\right)$$

所以

$$\sum_{i=1}^{2v}N\left(r,\frac{1}{W-a_i}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{W^{(k)}-W}\right)$$

证毕。

3 定理证明

3.1 定理 1 的证明

证明 设 $2v$ 个非零有限复数为 $a_1, a_2, \cdots, a_{2v}$ 。反证法, 倘若 $W(z) \neq W^{(k)}(z)$, 令 $q=2v+1, a_{2v+1}=\infty$, 则由引理 3 可得

$$(2v-1)T(r, W^{(k)})<\sum_{i=1}^qN\left(r,\frac{1}{W^{(k)}-a_i}\right)-\\ N_1(r, W^{(k)})+N_{\chi}(r, W^{(k)})+S(r, W^{(k)})=\\ \sum_{i=1}^{2v}N\left(r,\frac{1}{W^{(k)}-a_i}\right)+N(r, W^{(k)})-N_1(r, W^{(k)})+\\ N_{\chi}(r, W^{(k)})+S(r, W^{(k)}) \leqslant \sum_{i=1}^{2v}\tilde{N}\left(r,\frac{1}{W^{(k)}-a_i}\right)+\\ \tilde{N}(r, W^{(k)})+N_{\chi}(r, W^{(k)})+S(r, W^{(k)}) \tag{1}$$

又由引理 2 可得

$$N_{\chi}(r, W^{(k)}) \leqslant 2(v-1)T(r, W^{(k)})+O(1)$$

所以, 式(1)可整理为

$$T(r, W^{(k)}) \leqslant \sum_{i=1}^{2v}\tilde{N}\left(r,\frac{1}{W^{(k)}-a_i}\right)+\tilde{N}(r, W^{(k)})+S(r, W^{(k)})\\ \text{由定理 1 条件可得}\\ T(r, W^{(k)}) \leqslant \sum_{i=1}^{2v}\tilde{N}\left(r,\frac{1}{W-a_i}\right)+\tilde{N}(r, W)+\\ S(r, W^{(k)}) \leqslant (2v+1)T(r, W)+S(r, W^{(k)}) \tag{2}$$

由式(2)可得 $S(r, W^{(k)})=S(r, W)$ 。

又

$$N\left(r,\frac{1}{W^{(k)}-W}\right) \leqslant N(r, W^{(k)}-W)+m(r, W^{(k)}-W)+\\ O(1) \leqslant N(r, W^{(k)})+m(r, W)+S(r, W) \tag{3}$$

由引理 1 的结论 a, 式(3)可整理为

$$N\left(r,\frac{1}{W^{(k)}-W}\right) \leqslant N(r, W)+k\tilde{N}(r, W)+\\ kN_{\chi}(r, W=\infty)+m(r, W)+S(r, W) \leqslant T(r, W)+\\ k\tilde{N}(r, W)+kN_{\chi}(r, W=\infty)+S(r, W)$$

又 $W(z)=a_i \rightarrow W^{(k)}(z)=a_i, i=1,2,\cdots,2v$, 由引理 5 可得

$$\sum_{i=1}^{2v}N\left(r,\frac{1}{W-a_i}\right) \leqslant N\left(r,\frac{1}{W^{(k)}-W}\right) \leqslant T(r, W)+\\ k\tilde{N}(r, W)+kN_{\chi}(r, W=\infty)+S(r, W) \tag{4}$$

由引理 4 可得

$$\sum_{i=1}^{2v} m\left(r, \frac{1}{W-a_i}\right) = m\left(r, \sum_{i=1}^{2v} \frac{1}{W-a_i}\right) + O(1) \leq$$

$$m\left(r, \frac{1}{W^{(k)}}\right) + m\left(r, \sum_{i=1}^{2v} \frac{W^{(k)}}{W-a_i}\right) + O(1) \leq$$

$$m\left(r, \frac{1}{W^{(k)}}\right) + S(r, W) + O(1) \quad (5) \quad \text{则有}$$

$$\begin{aligned} 2vT(r, W^{(k)}) &\leq \sum_{i=1}^{2v+2} N\left(r, \frac{1}{W^{(k)}-a_i}\right) - N_1(r, W^{(k)}) + N_\chi(r, W^{(k)}) + S(r, W^{(k)}) = \\ &\sum_{i=1}^{2v} N\left(r, \frac{1}{W^{(k)}-a_i}\right) + N\left(r, \frac{1}{W^{(k)}}\right) + N(r, W^{(k)}) - N_1(r, W^{(k)}) + N_\chi(r, W^{(k)}) + S(r, W^{(k)}) \leq \\ &\sum_{i=1}^{2v} \bar{N}\left(r, \frac{1}{W^{(k)}-a_i}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{W^{(k)}}\right) + \bar{N}(r, W^{(k)}) + N_\chi(r, W^{(k)}) + S(r, W^{(k)}) \leq \\ &N\left(r, \frac{1}{W^{(k)}-W}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{W^{(k)}}\right) + \bar{N}(r, W^{(k)}) + N_\chi(r, W^{(k)}) + S(r, W) \leq \\ &T(r, W^{(k)}) + T(r, W) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{W^{(k)}}\right) + \bar{N}(r, W) + N_\chi(r, W) + S(r, W) \end{aligned} \quad (7)$$

结合式(6)和式(7)可得

$$\begin{aligned} (2v-2)T(r, W) + (2v-1)T(r, W^{(k)}) &\leq m\left(r, \frac{1}{W^{(k)}}\right) + \\ &\bar{N}\left(r, \frac{1}{W^{(k)}}\right) + (k+1)\bar{N}(r, W) + kN_\chi(r, W=\infty) + N_\chi(r, W) + \\ &S(r, W) \leq T(r, W^{(k)}) + N(r, W^{(k)}) + 2(v-1)T(r, W) + \\ &S(r, W) \leq 2T(r, W^{(k)}) + 2(v-1)T(r, W) + S(r, W) \quad (8) \end{aligned}$$

整理式(8)可得 $(2v-3)T(r, W^{(k)}) \leq S(r, W), v \geq 2$,

矛盾。

3.2 定理2的证明

证明 倘若 $W(z) \neq W'(z)$, 设 $W(z)$ 与 $W'(z)$ CM 分担 $a_1, a_2, \dots, a_{2v-1}$, 且不妨设 $a_{2v-1} = 0, a_{2v} = \infty$. 因为 $W(z)$ 与 $W'(z)$ CM 分担 0, 则 0 为 $W(z)$ 与 $W'(z)$ 的 Picard 例外值, 则有 $N\left(r, \frac{1}{W}\right) = 0$, 所以

$$\begin{aligned} N\left(r, \frac{1}{W'-W}\right) &\leq N\left(r, \frac{1}{W}\right) + N\left(r, \frac{1}{\frac{W'}{W}-1}\right) \leq T\left(r, \frac{W'}{W}\right) + O(1) \leq \\ N\left(r, \frac{W'}{W}\right) + m\left(r, \frac{W'}{W}\right) + O(1) &\leq N\left(r, \frac{W'}{W}\right) + S(r, W) \quad (9) \end{aligned}$$

结合式(4)和式(5)可得

$$\begin{aligned} (2v-1)T(r, W) &\leq m\left(r, \frac{1}{W^{(k)}}\right) + k\bar{N}(r, W) + \\ &kN_\chi(r, W=\infty) + S(r, W) \end{aligned} \quad (6)$$

另一方面, 结合引理3, 令 $a_{2v+1} = 0, a_{2v+2} = \infty$,

由参考文献[4]中的引理2.3将式(9)整理为

$$N\left(r, \frac{1}{W'-W}\right) \leq \bar{N}(r, W) + N_\chi(r, W=\infty) + S(r, W)$$

与定理1的证明类似, 由 $W(z)$ 与 $W'(z)$ CM 分担 $a_1, a_2, \dots, a_{2v-1}$, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2v-1} N\left(r, \frac{1}{W-a_i}\right) &\leq N\left(r, \frac{1}{W'-W}\right) \leq \\ &\bar{N}(r, W) + N_\chi(r, W=\infty) + S(r, W) \end{aligned} \quad (10)$$

又

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2v-1} m\left(r, \frac{1}{W-a_i}\right) &= m\left(r, \sum_{i=1}^{2v-1} \frac{1}{W-a_i}\right) + O(1) \leq \\ m\left(r, \frac{1}{W'}\right) + m\left(r, \sum_{i=1}^{2v-1} \frac{W'}{W-a_i}\right) + S(r, W) &\leq \\ m\left(r, \frac{1}{W'}\right) + S(r, W) \end{aligned} \quad (11)$$

结合式(10)和式(11)可得

$$\begin{aligned} (2v-1)T(r, W) &\leq m\left(r, \frac{1}{W'}\right) + \bar{N}(r, W) + \\ &N_\chi(r, W=\infty) + S(r, W) \end{aligned} \quad (12)$$

由引理3和分担条件可得

$$\begin{aligned} (2v-2)T(r, W') &\leq \sum_{i=1}^{2v} N\left(r, \frac{1}{W'-a_i}\right) - N_1(r, W') + N_\chi(r, W') + S(r, W') = \\ \sum_{i=1}^{2v-1} N\left(r, \frac{1}{W'-a_i}\right) + N(r, W') - N_1(r, W') + N_\chi(r, W') + S(r, W') &\leq \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{2v-1} \bar{N}\left(r, \frac{1}{W'-a_i}\right) + \bar{N}(r, W') + N_{\chi}(r, W') + S(r, W') \leqslant$$
$$N\left(r, \frac{1}{W'-W}\right) + \bar{N}(r, W) + N_{\chi}(r, W) + S(r, W) \leqslant$$
$$T(r, W') + T(r, W) + \bar{N}(r, W) + N_{\chi}(r, W) + S(r, W)$$

(13)

结合式(12)和式(13)可得

$$(2v-2)T(r, W) + (2v-3)T(r, W') \leqslant m\left(r, \frac{1}{W'}\right) +$$
$$2\bar{N}(r, W) + N_{\chi}(r, W=\infty) + N_{\chi}(r, W) + S(r, W) \leqslant$$
$$2T(r, W') + 2(v-1)T(r, W) + S(r, W) \leqslant$$
$$T(r, W') + N(r, W') + N_{\chi}(r, W) + S(r, W)$$

(14)

整理式(14)可得 $(2v-5)T(r, W') \leqslant S(r, W), v \geqslant 3$, 矛盾。证毕。

参考文献:

[1] 何育赞, 萧修治. 代数体函数与常微分方程[M]. 北京: 科学出版社, 1988.

[2] GUNDERSEN G G. Meromorphic functions that share four values[J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1983, 277(2): 545–567.

[3] GUNDERSEN G G. Meromorphic functions that share finite values with their derivative[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1980, 75(2): 441–446.

[4] LI X M, YI H X. Meromorphic functions sharing two or three values with their derivatives in some angular domains[J]. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, 2014, 49(5): 241–250.

[5] VALIRON G. Sur la derivee des fonctions algebroids[J]. *Bulletin de la S. M. F.*, 1931, 50(1/2): 17–39.

[6] NEVANLINNA R. Le Théorème De Picard-Borel Et la

Théorie des fonctions méromorphes[M]. Paris: Gauthier-Villars, 1929.

[7] ZHANG Q D. A uniqueness theorem for meromorphic functions with respect to slowly growing functions[J]. *Acta Mathematica Sinica*, 1993, 36(6): 826–833.

[8] LI B Q. Uniqueness of entire functions sharing four small functions[J]. *American Journal of Mathematics*, 1997, 119(4): 841–858.

[9] LI Y H. Entire functions that share four finite slowly growth meromorphic functions IM[J]. *Acta Mathematica Sinica*, 1998, 41(2): 249–260.

[10] LI Y H, QIAO J Y. The uniqueness of meromorphic functions concerning small functions[J]. *Science in China Series A: Mathematics*, 2000, 43(6): 581–590.

[11] YI H X. On one problem of uniqueness of meromorphic functions concerning small functions[J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2001, 130(6): 1689–1697.

[12] Frank G, Weissenborn G. Rational Deficient Functions of Meromorphic Functions[J]. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 1986, 18(1): 29–33.

[13] 刘慧芳. 代数体函数与其导数的唯一性[J]. *数学物理学报*, 2014, 34(5): 1296–1303.

[14] 孙道椿, 高宗升. 代数体函数的值分布[M]. 北京: 科学出版社, 2014.

[15] 刘慧芳, 孙道椿. 与其导数具有公共值的代数体函数的唯一性定理[J]. *数学物理学报*, 2011, 31(5): 1335–1344.

(编辑: 丁红艺)