

带参数的渐近线性椭圆方程组解的分歧性

马洋洋, 贾 高

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 利用 Lyapunov-Schmidt 约化方法结合 Rabinowitz 大范围分歧理论, 研究了一类带有参数的渐近线性椭圆方程组正、负解的存在性以及分歧性。首先给出了由正、负解所组成的连续统在分歧点附近的存在性, 结合非线性项的合理假设, 进而给出了连续统在分歧点附近沿着 λ 方向的分歧性态。

关键词: 椭圆方程组; 连续统; 分歧理论

中图分类号: O 175.8 **文献标志码:** A

Bifurcation of solutions of a class of asymptotically linear elliptic systems with parameters

MA Yangyang, JIA Gao

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The bifurcation and existence of positive and negative solutions of a class of asymptotically linear elliptic systems with parameters were studied by utilizing the Lyapunov-Schmidt reduction method combining with the Rabinowitz's global bifurcation theory. The existence of continua consisting of positive and negative solutions was given, and furthermore, under some approximate assumptions, the bifurcation of continua in the direction of λ was also provided.

Keywords: elliptic system; continuum; bifurcation theory

1 问题的提出

考虑带参数的渐近线性椭圆方程组

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \theta_1 m(x)v + f(\lambda, x, u, v), & x \in \Omega \\ -\Delta v = \lambda \theta_2 m(x)u + g(\lambda, x, u, v), & x \in \Omega \\ u = 0 = v, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

在共振和共振附近正、负解的存在性与分歧性,

其中, $\Omega \subset \mathbf{R}^N (N \geq 2)$ 是带有光滑边界的有界区域, $\lambda \in \mathbf{R}$ 是参数, $\theta_1, \theta_2 (\theta_1 \neq \theta_2)$ 是 2 个正常数, $m(x) > 0$ a.e. $x \in \Omega$ 是一个 $L^\infty(\Omega)$ 函数, 非线性项 $f, g: \mathbf{R} \times \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 满足下面条件:

(h1) f 和 g 是 Carathéodory 函数;

(h2) 存在 2 个非负函数 $b_1(x), b_2(x) \in L^r(\Omega) (r > N)$ 和 2 个常数 $k, l > 0$, 使得

收稿日期: 2018-11-26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11171220); 上海理工大学科技发展项目 (2017KJFZ112)

第一作者: 马洋洋 (1992-), 男, 硕士研究生. 研究方向: 偏微分方程的理论与应用. E-mail: myy_cmk@163.com

通信作者: 贾 高 (1960-), 男, 教授. 研究方向: 偏微分方程的理论与应用. E-mail: gaojia89@163.com

$$|f(\lambda, x, s, t)| \leq k|s| + l|t| + b_1(x)$$

$$|g(\lambda, x, s, t)| \leq k|s| + l|t| + b_2(x)$$

其中, $|s|$ 表示实数 s 的绝对值;

(h3) 当 λ 在某闭区间上以及a.e. $x \in \Omega$, 有

$$\lim_{|s|+|t| \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda, x, s, t)}{|s|+|t|} = 0, \quad \lim_{|s|+|t| \rightarrow \infty} \frac{g(\lambda, x, s, t)}{|s|+|t|} = 0 \quad (2)$$

一致成立。

在20世纪70年代初, Rabinowitz^[1-2]建立了关于算子方程的大范围分歧理论, 后来 Dancer^[3-4]又建立了单边分歧理论, 上述理论是有关方程分歧性研究所得到的相对成熟的结果。基于上述2个理论, 文献[5]给出了偏微分方程形如 $-\Delta_p u + \lambda m(x)|u|^{p-2}u = \varphi(\lambda, x, u)$ ($p \geq 2$), 关于解在分歧点附近产生分歧的充分条件。Chhetri等^[6-8]将文献[5]中的问题推广到方程组, 其中, 文献[8]所研究问题的非线性项关于变量 u, v 是一致有界的。本文所研究的问题与文献[5-8]不同之处在于所处理问题的非线性项关于 u, v 具有非一致性。因此, 本文的问题更具有一般性。

2 相关定义、假设与引理

基于问题(1)的特征, 本文的工作空间为

$$E = (W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,r}(\Omega)) \times (W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,r}(\Omega))$$

对其赋予的范数为 $\|(u, v)\| = \|u\|_{W^{2,r}(\Omega)} + \|v\|_{W^{2,r}(\Omega)}$ 。

为了简化陈述, 可将问题(1)改写为

$$-\Delta(u, v) = \lambda m(x)(\theta_1 v, \theta_2 u) + (f(\lambda, x, u, v), g(\lambda, x, u, v)) \quad (3)$$

其对应的抽象算子方程为

$$(u, v) = \lambda L(u, v) + K(\lambda, x, u, v) \quad (4)$$

其中, $L: E \rightarrow E$ 表示映射

$$(u, v) \mapsto (-\Delta)^{-1} m(x)(\theta_1 v, \theta_2 u)$$

$K: R \times \Omega \times E \rightarrow E$ 表示映射

$$(\lambda, x, u, v) \mapsto (-\Delta)^{-1}(f(\lambda, x, u, v), g(\lambda, x, u, v))$$

由 Lax-Milgram 定理^[9]可知, 逆算子 $(-\Delta)^{-1}: L^r(\Omega) \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,r}(\Omega)$ 是有意义的, 而且还是线性、连续的。已知 f, g 是 Carathéodory 函数, 如果其对应 Nemyski 算子^[10]仍用 f 和 g 表示, 由条件(h2)可以得到 Nemyski 算子 $f(x, u, v)$ 和 $g(x, u, v)$ 从 $L^r(\Omega) \times L^r(\Omega)$ 到 $L^r(\Omega) \times L^r(\Omega)$ 是连续的^[11]。因此, 由 $W^{2,r}(\Omega)$ 到 $L^r(\Omega)$ 嵌入的紧性可以得到 $K(\lambda, x, u, v)$ 是全连续的。进一步, 由条件(h3)可以得到, 当 λ 在某

闭区间上, 有

$$\lim_{\|(u, v)\|_E \rightarrow \infty} \frac{\|K(\lambda, x, u, v)\|_E}{\|(u, v)\|_E} = 0$$

定义1 若 $(\lambda, (u, v)) \in R \times E$ 在几乎处处意义下满足问题(1), 那么, 本文就说 $(\lambda, (u, v))$ 是问题(1)的强解; 如果 $u > 0$ 且 $v > 0$ 或 $u < 0$ 且 $v < 0$, 本文就说 $(\lambda, (u, v))$ 是问题(1)的正解或负解。

定义2 如果解集 $S = \{(\lambda, (u, v)) \in R \times E : (\lambda, (u, v)) \text{ 满足(1)}\}$ 中存在序列 $\{(\lambda_n, (u_n, v_n))\}$ 满足 $\lambda_n \rightarrow \lambda_\infty$, $\|(u_n, v_n)\|_E \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$), 那么, 本文就说 λ_∞ 是问题(1)的一个无穷分歧点。

引理1^[7] 设 $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots \leq \mu_n \leq \dots$ 是边值问题

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = \lambda m(x) \varphi, & x \in \Omega \\ \varphi = 0, & x \in \partial \Omega \end{cases}$$

的特征值序列, 并且 $\phi_k \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 表示特征值 μ_k 所对应的特征函数, 那么, 对于边值问题

$$\begin{cases} -\Delta z_1 = \lambda \theta_1 m(x) z_2, & x \in \Omega \\ -\Delta z_2 = \lambda \theta_2 m(x) z_1, & x \in \Omega \\ z_1 = 0 = z_2, & x \in \partial \Omega \end{cases} \quad (5)$$

有以下结论:

a. 问题(5)的特征值可以表示为 $\Sigma := \left\{ \frac{\mu_k}{\sqrt{\theta_1 \theta_2}} \right\}_{k=1}^\infty \cup \left\{ -\frac{\mu_k}{\sqrt{\theta_1 \theta_2}} \right\}_{k=1}^\infty$;

b. 特征值 $\tau_k = \frac{\mu_k}{\sqrt{\theta_1 \theta_2}}$ 和 $\tau_{-k} = -\frac{\mu_k}{\sqrt{\theta_1 \theta_2}}$ 所对应的特征函数分别为 $(\sqrt{\theta_1} \phi_k, \sqrt{\theta_2} \phi_k)$ 和 $(-\sqrt{\theta_1} \phi_k, \sqrt{\theta_2} \phi_k)$;

c. 问题(5)的伴随问题与问题(5)具有相同特征值, 而 $\tau_k = \frac{\mu_k}{\sqrt{\theta_1 \theta_2}}$ 和 $\tau_{-k} = -\frac{\mu_k}{\sqrt{\theta_1 \theta_2}}$ 所对应特征函数分别为 $(\sqrt{\theta_2} \phi_k, \sqrt{\theta_1} \phi_k)$ 和 $(-\sqrt{\theta_2} \phi_k, \sqrt{\theta_1} \phi_k)$ 。

引理2^[1] 如果条件(h1)~(h3)成立, 那么, 解集 S 存在着1个无界部分 D_{τ_1} , 并且 D_{τ_1} 能够分解成2个子连续统 $D_{\tau_1}^+$ 和 $D_{\tau_1}^-$ 。进一步, 在空间 $R \times E$ 中存在着 (τ_1, ∞) 的邻域 O , 使得当 $(\lambda, (u, v)) \in D_{\tau_1}^+(D_{\tau_1}^-) \cap O$ 且 $(\lambda, \|(u, v)\|_E) \neq (\tau_1, \infty)$ 时, 有 $(\lambda, (u, v)) = (\lambda, \alpha(\sqrt{\theta_1} \phi_1 + u^\perp, \sqrt{\theta_2} \phi_1 + v^\perp))$, 其中, $\int_\Omega m(x)(\sqrt{\theta_2} u^\perp + \sqrt{\theta_1} v^\perp) \phi_1 dx = 0$, 当 $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$)且 $|\alpha| \rightarrow +\infty$ 时, 有 $|\lambda - \tau_1| \rightarrow 0$ 且 $\|(u^\perp, v^\perp)\|_E \rightarrow 0$ 。

现定义一些记号。设 $h(\lambda, x, u, v) = \sqrt{\theta_2} f(\lambda, x, u, v) + \sqrt{\theta_1} g(\lambda, x, u, v)$, 对于 $\gamma \geq 0$, $R_+ = [0, +\infty)$, 定义 $\underline{H}^+, \overline{H}^+ : \Omega \times (0, +\infty) \times R_+^2 \rightarrow R$ 和 $\underline{H}^-, \overline{H}^- : \Omega \times (-\infty, 0) \times R_+^2 \rightarrow R$ 以及 $\underline{A}_\gamma^\pm(x)$ 和 $\overline{A}_\gamma^\pm(x)$ 如下:

$$\begin{aligned}
\underline{H}^+(x, a, b, \gamma) &= \inf_{\lambda, \sigma} \left\{ h \left(\lambda, x, \frac{1}{2} \sqrt{\theta_1} \sigma, \frac{1}{2} \sqrt{\theta_2} \sigma \right) (1 + \sigma)^\gamma : \sigma > a^{-1} \phi_1, |\lambda - \tau_1| \leq b \right\} \\
\overline{H}^+(x, a, b, \gamma) &= \sup_{\lambda, \sigma} \left\{ h \left(\lambda, x, \frac{1}{2} \sqrt{\theta_1} \sigma, \frac{1}{2} \sqrt{\theta_2} \sigma \right) (1 + \sigma)^\gamma : \sigma > a^{-1} \phi_1, |\lambda - \tau_1| \leq b \right\} \\
\underline{H}^-(x, a, b, \gamma) &= \inf_{\lambda, \sigma} \left\{ h \left(\lambda, x, \frac{1}{2} \sqrt{\theta_1} \sigma, \frac{1}{2} \sqrt{\theta_2} \sigma \right) |1 - \sigma|^\gamma : \sigma < a^{-1} \phi_1, |\lambda - \tau_1| \leq b \right\} \\
\overline{H}^-(x, a, b, \gamma) &= \sup_{\lambda, \sigma} \left\{ h \left(\lambda, x, \frac{1}{2} \sqrt{\theta_1} \sigma, \frac{1}{2} \sqrt{\theta_2} \sigma \right) |1 - \sigma|^\gamma : \sigma < a^{-1} \phi_1, |\lambda - \tau_1| \leq b \right\} \\
\underline{A}_\gamma^\pm(x) &= \lim_{a \rightarrow 0^+, b \rightarrow 0^+} \underline{H}^\pm(x, a, b, \gamma), \quad \overline{A}_\gamma^\pm(x) = \lim_{a \rightarrow 0^+, b \rightarrow 0^+} \overline{H}^\pm(x, a, b, \gamma)
\end{aligned}$$

假设 1 存在 $0 \leq \gamma_i < 2 - \frac{1}{r}$ 以及非负函数 $B_i(x) \in L^r(\Omega)$, 对于 $i = 1, 2, 3, 4$, 使得

$$\begin{aligned}
\underline{H}^+(x, a, b, \gamma_1) &\geq -B_1(x) \text{ a.e. } x \in \Omega, \\
(a, b) &\in (0, +\infty) \times [0, +\infty) \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{H}^-(x, a, b, \gamma_2) &\leq B_2(x) \text{ a.e. } x \in \Omega, \\
(a, b) &\in (-\infty, 0) \times [0, +\infty) \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{H}^+(x, a, b, \gamma_3) &\leq B_3(x) \text{ a.e. } x \in \Omega, \\
(a, b) &\in (0, +\infty) \times [0, +\infty) \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{H}^-(x, a, b, \gamma_4) &\geq -B_4(x) \text{ a.e. } x \in \Omega, \\
(a, b) &\in (-\infty, 0) \times [0, +\infty) \quad (9)
\end{aligned}$$

3 主要结果及其证明

定理 1 如果 (h1) — (h3) 成立, 则存在 $\varepsilon > 0$ 满足 $\tau_{\pm k} \notin [\tau_1 - \varepsilon, \tau_1 + \varepsilon] (k \neq 1)$, 使得当任意的 $(\lambda, (u, v)) \in S \cap O_\varepsilon$ 时, 有 $u > 0$ 且 $v > 0$ 或 $u < 0$ 且 $v < 0$ 。此外, 存在由正解和负解所组成的连续统 $D_{\tau_1, \varepsilon}^+ \subset S$ 和 $D_{\tau_1, \varepsilon}^- \subset S$ 在 τ_1 处无穷分歧, 其中,

$$O_\varepsilon = \left\{ (\lambda, (u, v)) \in R \times E : |\lambda - \tau_1| + \frac{1}{\|(u, v)\|_E} < \varepsilon \right\}$$

证明 第一部分的证明。可将空间 E 分解为

$$E = \text{span} \{ (\sqrt{\theta_1} \phi_1, \sqrt{\theta_2} \phi_1) \} \oplus E^\perp$$

其中

$$E^\perp = \left\{ (w_1, w_2) \in E : \int_\Omega m(x) (w_1, w_2) \cdot (\sqrt{\theta_2} \phi_1, \sqrt{\theta_1} \phi_1) dx = 0 \right\}$$

由引理 1 可知, $(\sqrt{\theta_1} \phi_1, \sqrt{\theta_2} \phi_1)$ 和 $(\sqrt{\theta_2} \phi_1, \sqrt{\theta_1} \phi_1)$ 分别表示算子 L 以及伴随算子 L^* 对应于特征值 τ_1 所对应的特征函数。又由引理 2, 对于 $(u_n, v_n) \in E$, 可以作分解

$$(u_n, v_n) = \alpha_n (\sqrt{\theta_1} \phi_1 + u_n^\perp, \sqrt{\theta_2} \phi_1 + v_n^\perp) \quad (10)$$

且 $(u_n^\perp, v_n^\perp)$ 满足下面正交条件:

$$\int_\Omega m(x) (\sqrt{\theta_2} u_n^\perp + \sqrt{\theta_1} v_n^\perp) \phi_1 dx = 0 \quad (11)$$

在空间 $C^{1,\eta}(\overline{\Omega}) (0 < \eta < 1)$ 中, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 还满足 $u_n^\perp \rightarrow 0, v_n^\perp \rightarrow 0$ 。

根据文献 [7] 中的引理 4.2 可得, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $|\alpha_n| \rightarrow +\infty$ 当且仅当 $\|(u_n, v_n)\|_E \rightarrow +\infty$ 。事实上, 由式 (10) 和式 (11) 可以得到

$$\frac{|\alpha_n|}{\|(u_n, v_n)\|} \rightarrow \frac{1}{\|(\sqrt{\theta_1} \phi_1, \sqrt{\theta_1} \phi_1)\|_E}, \quad n \rightarrow \infty \quad (12)$$

根据文献 [8] 中的命题 3.1, 可得

$$\begin{aligned}
\frac{(u_n, v_n)}{|\alpha_n|} &= \frac{\|(u_n, v_n)\|_E}{|\alpha_n|} \frac{(u_n, v_n)}{\|(u_n, v_n)\|_E} \rightarrow \\
&\pm (\sqrt{\theta_1} \phi_1, \sqrt{\theta_1} \phi_1), \quad n \rightarrow \infty \quad (13)
\end{aligned}$$

其中, “+” 和 “-” 分别表示 α_n 的符号, 并且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\alpha_n \rightarrow \infty$ 。

因为, $\frac{\partial \phi_1}{\partial n} < 0$, 其中, n 为 Ω 的外单位法向量, 所以, 存在正整数 N_0 , 使得对于任意的整数 $n > N_0$, 有 $u_n > 0$ 且 $v_n > 0$ 或 $u_n < 0$ 且 $v_n < 0$ 。因此, 存在 $\varepsilon > 0$ 满足 $\tau_{\pm k} \notin [\tau_1 - \varepsilon, \tau_1 + \varepsilon] (k \neq 1)$ 使得当任意的 $(\lambda, (u, v)) \in S \cap O_\varepsilon$, 有 $u > 0$ 和 $v > 0$ 或 $u < 0$ 和 $v < 0$ 。

第二部分的证明。因为, τ_1 是代数单重的, 由引理 2 可得, 存在 2 个连续统 $D_{\tau_1}^+ \subset S$ 和 $D_{\tau_1}^- \subset S$ 。由定理 1 的第一部分可知, 当 $(\lambda, (u, v)) \in S \cap O_\varepsilon$ 时, 有 $u > 0$ 且 $v > 0$ 或 $u < 0$ 且 $v < 0$, 于是, 取 $D_{\tau_1, \varepsilon}^+ = D_{\tau_1}^+ \cap O_\varepsilon$, $D_{\tau_1, \varepsilon}^- = D_{\tau_1}^- \cap O_\varepsilon \subset S$ 分别由正解和负解组成。再由引理 2 以及分歧的定义可知, $D_{\tau_1, \varepsilon}^+$ 和 $D_{\tau_1, \varepsilon}^-$ 在 τ_1 处无穷分歧。定理 1 证毕。

定理 2 假设 (h1) — (h3) 成立。

a. 如果还满足式 (6) 和 $\int_\Omega \underline{A}_{\gamma_1}^+(x) \phi_1^{1-\gamma_1}(x) dx > 0$, 则对任给 $0 < \delta < \varepsilon$ (ε 为定理 1 给出), 有:

(a) 问题 (1) 不存在满足 $\tau_1 \leq \lambda \leq \tau_1 + \delta$ 和 $(\lambda, (u, v)) \in O_\delta$ 的正解;

(b) 连续统 $D_{\tau_1, \delta}^+ \subset S$ 从 τ_1 的左侧无穷分歧。

b. 如果还满足式 (7) 和 $\int_\Omega \overline{A}_{\gamma_2}^+(x) \phi_1^{1-\gamma_2}(x) dx < 0$,

则对任给 $0 < \delta < \varepsilon$ (ε 为定理 1 给出), 有:

(a) 问题 (1) 不存在满足 $\tau_1 \leq \lambda \leq \tau_1 + \delta$ 和 $(\lambda, (u, v)) \in O_\delta$ 的负解;

(b) 连续统 $D_{\tau_1, \delta}^- \subset S$ 从 τ_1 的左侧无穷分歧。

定理 3 假设 (h1) — (h3) 成立。

a. 如果还满足式 (8) 和 $\int_{\Omega} \bar{A}_{\gamma_3}^+(x) \phi_1^{1-\gamma_3}(x) dx < 0$, 则对任给 $0 < \delta < \varepsilon$ (ε 为定理 1 给出), 有:

(a) 问题 (1) 不存在满足 $\tau_1 - \delta \leq \lambda \leq \tau_1$ 和 $(\lambda, (u, v)) \in O_\delta$ 的正解;

(b) 连续统 $D_{\tau_1, \delta}^+ \subset S$ 从 τ_1 的右侧无穷分歧。

b. 如果还满足 (9) 和 $\int_{\Omega} \bar{A}_{\gamma_4}^-(x) \phi_1^{1-\gamma_4}(x) dx > 0$, 则对任给 $0 < \delta < \varepsilon$ (ε 为定理 1 给出), 有

(a) 问题 (1) 不存在满足 $\tau_1 - \delta \leq \lambda \leq \tau_1$ 和 $(\lambda, (u, v)) \in O_\delta$ 的负解;

(b) 连续统 $D_{\tau_1, \delta}^- \subset S$ 从 τ_1 的右侧无穷分歧。

证明 由于定理 2 和定理 3 的证明类似, 所以, 现只给出定理 2 的证明。

设 $\{(\lambda_n, (u_n, v_n))\} \subset S$ 是一个解序列, 使得当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 有 $\lambda_n \rightarrow \tau_1$ 和 $\|(u_n, v_n)\|_E \rightarrow +\infty$ 。由引理 2 和定理 1, (u_n, v_n) 可分解为

$$u_n = \alpha_n(\sqrt{\theta_1}\phi_1 + u_n^+) \text{ 且 } v_n = \alpha_n(\sqrt{\theta_2}\phi_1 + v_n^+) \quad (14)$$

其中, $\alpha_n > 0$, 并且当 $n \rightarrow +\infty$, 有 $\alpha_n \rightarrow +\infty$ 和 $u_n^+ \rightarrow 0, v_n^+ \rightarrow 0$ 在 $C^{1,\eta}(\bar{\Omega})$ 中。因此, 对充分大的 n , 有 $u_n > 0$ 和 $v_n > 0$ 。

将 $\sqrt{\theta_2}\phi_1$ 乘式 (1) 中的第一个方程, 并在 Ω 上积分, 可得

$$\begin{aligned} & \alpha_n \mu_1 \sqrt{\theta_1 \theta_2} \int_{\Omega} m(x) \phi_1^2 dx + \alpha_n \mu_1 \sqrt{\theta_2} \int_{\Omega} m(x) u_n^+ \phi_1 dx = \\ & \alpha_n \lambda_n \theta_1 \theta_2 \int_{\Omega} m(x) \phi_1^2 dx + \alpha_n \mu_1 \theta_1 \sqrt{\theta_1} \int_{\Omega} m(x) v_n^+ \phi_1 dx + \\ & \sqrt{\theta_2} \int_{\Omega} f(\lambda_n, x, u_n, v_n) \phi_1 dx \end{aligned}$$

上式化简为

$$\begin{aligned} \mu_1 \sqrt{\theta_2} \int_{\Omega} m(x) u_n^+ \phi_1 dx &= \left(\lambda_n - \frac{\mu_1}{\sqrt{\theta_1 \theta_2}} \right) \theta_1 \theta_2 \int_{\Omega} m(x) \phi_1^2 dx + \\ \mu_1 \theta_1 \sqrt{\theta_2} \int_{\Omega} m(x) v_n^+ \phi_1 dx &+ \alpha_n^{-1} \sqrt{\theta_2} \int_{\Omega} f(\lambda, x, u_n, v_n) \phi_1 dx \end{aligned}$$

类似地, 将 $\sqrt{\theta_1}\phi_1$ 乘式 (1) 中的第二个方程, 并在 Ω 上积分, 可得

$$\begin{aligned} \mu_1 \sqrt{\theta_1} \int_{\Omega} m(x) v_n^+ \phi_1 dx &= \left(\lambda_n - \frac{\mu_1}{\sqrt{\theta_1 \theta_2}} \right) \theta_1 \theta_2 \int_{\Omega} m(x) \phi_1^2 dx + \\ \mu_1 \theta_2 \sqrt{\theta_1} \int_{\Omega} m(x) v_n^+ \phi_1 dx &+ \alpha_n^{-1} \sqrt{\theta_1} \int_{\Omega} g(\lambda, x, u_n, v_n) \phi_1 dx \end{aligned}$$

将上面 2 个式子相加, 有

$$\begin{aligned} & \mu_1 \int_{\Omega} m(x) (\sqrt{\theta_2} u_n^+ + \sqrt{\theta_1} v_n^+) \phi_1 dx = \\ & 2 \left(\lambda_n - \frac{\mu_1}{\sqrt{\theta_1 \theta_2}} \right) \theta_1 \theta_2 \int_{\Omega} m(x) \phi_1^2 dx + \\ & \mu_1 \sqrt{\theta_1 \theta_2} \int_{\Omega} m(x) (\sqrt{\theta_2} u_n^+ + \sqrt{\theta_1} v_n^+) \phi_1 dx + \\ & \alpha_n^{-1} \int_{\Omega} (\sqrt{\theta_2} f(\lambda_n, x, u_n, v_n) + \\ & \sqrt{\theta_1} g(\lambda_n, x, u_n, v_n)) \phi_1 dx \end{aligned}$$

注意到 $\frac{\mu_1}{\sqrt{\theta_1 \theta_2}} = \tau_1$, 上式化为

$$\begin{aligned} & 2(\tau_1 - \lambda_n) \theta_1 \theta_2 \int_{\Omega} m(x) \phi_1^2 dx = \\ & \alpha_n^{-1} \int_{\Omega} (\sqrt{\theta_2} f(\lambda_n, x, u_n, v_n) + \\ & \sqrt{\theta_1} g(\lambda_n, x, u_n, v_n)) \phi_1 dx \end{aligned} \quad (15)$$

$\theta_1 \theta_2 \int_{\Omega} m(x) \phi_1^2 dx$ 是一个常数且 $\alpha_n > 0$, 因此, 等式 (15) 两边的符号等价于

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\tau_1 - \lambda_n) &= \text{sgn} \left(\int_{\Omega} (\sqrt{\theta_2} f(\lambda_n, x, u_n, v_n) + \right. \\ & \left. \sqrt{\theta_1} g(\lambda_n, x, u_n, v_n)) \phi_1 dx \right) \end{aligned} \quad (16)$$

关于定理 2 中 a 的 (a) 的证明, 采用反证法。取 $\delta_n = \frac{1}{n}$, 当 $n \geq N_1$, 有 $\frac{1}{n} < \varepsilon$ 。假设对 $\delta_n = \frac{1}{n}$ ($n \geq N_1$), 存在 λ_n , 使得 $\lambda_n \in [\tau_1, \tau_1 + \delta_n]$, $(u_n, v_n) \in O_{\delta_n}$ 。由 O_{δ_n} 的定义可得, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 有 $\lambda_n \rightarrow \tau_1$, $\|(u_n, v_n)\|_E \rightarrow +\infty$ 。

由式 (16) 以及反证假设可得, 正解 (u_n, v_n) 满足

$$\begin{aligned} & \text{sgn} \left(\int_{\Omega} (\sqrt{\theta_2} f(\lambda_n, x, u_n, v_n) + \right. \\ & \left. \sqrt{\theta_1} g(\lambda_n, x, u_n, v_n)) \phi_1 dx \right) \leq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

现在分两步来说明式 (17) 是不正确的。

第一步 证明存在 $B(x) \in L^1(\Omega)$, 使得下面不等式成立:

$$h(\lambda_n, x, u_n, v_n) (1 + \alpha_n \phi_1)^{\gamma_1} \phi_1 (\alpha_n^{-1} + \phi_1)^{-\gamma_1} \geq B(x)$$

注意到

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\sqrt{\theta_2} f(\lambda_n, x, u_n, v_n) + \sqrt{\theta_1} g(\lambda_n, x, u_n, v_n)) \phi_1 dx = \\ & \alpha_n^{-\gamma_1} \int_{\Omega} h(\lambda_n, x, u_n, v_n) (1 + \alpha_n \phi_1)^{\gamma_1} \cdot \\ & \phi_1 (\alpha_n^{-1} + \phi_1)^{-\gamma_1} dx \end{aligned}$$

一方面, 对于充分大的 n , 有 $u_n > 0$ 和 $v_n > 0$ 。因此, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$1 + \alpha_n (\sqrt{\theta_1} \phi_1 + u_n^+) > 0 \text{ 和 } 1 + \alpha_n (\sqrt{\theta_2} \phi_1 + v_n^+) > 0$$

因为, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 有 $\alpha_n^{-1} \rightarrow 0$, 则当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 可得

$$(\alpha_n^{-1} + \phi_1)^{-\gamma_1} \phi_1 \rightarrow \phi_1^{1-\gamma_1} \quad (18)$$

由式(18)可知, 对于 a.e. $x \in \Omega$ 以及充分大的 n , 有

$$(\alpha_n^{-1} + \phi_1)^{-\gamma_1} \phi_1 < 2\phi_1^{1-\gamma_1} \quad (19)$$

又因为在空间 $C^{1,\eta}(\bar{\Omega})$ 中, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 有 $u_n \rightarrow 0$, $v_n \rightarrow 0$, 并结合 $\phi_1 > 0$ 在 Ω 上, 所以, 可得

$$\frac{1}{2}\phi_1 < \phi_1 + \frac{u_n^\perp}{\sqrt{\theta_1}} \text{ 和 } \frac{1}{2}\phi_1 < \phi_1 + \frac{v_n^\perp}{\sqrt{\theta_2}} \quad (20)$$

因此, 对于 a.e. $x \in \Omega$ 以及充分大的 n , 有下面估计:

$$\begin{aligned} & h(\lambda, x, \alpha_n(\sqrt{\theta_1}\phi_1 + u_n^\perp), \alpha_n(\sqrt{\theta_1}\phi_1 + u_n^\perp)) \cdot \\ & (1 + \alpha_n\phi_1)^{\gamma_1} (\alpha_n^{-1} + \phi_1)^{-\gamma_1} \phi_1 \geq \\ & \inf_{\lambda, \sigma} \left\{ h\left(\lambda, x, \frac{1}{2}\sqrt{\theta_1}\sigma, \frac{1}{2}\sqrt{\theta_2}\sigma\right) (1 + \sigma)^{\gamma_1} : \sigma > \right. \\ & \left. \alpha_n^{-1}\phi_1, |\lambda - \tau_1| \leq b \right\} (\alpha_n^{-1} + \phi_1)^{-\gamma_1} \phi_1 \geq \\ & -2B_1(x)\phi_1^{1-\gamma_1} \end{aligned} \quad (21)$$

另一方面, 由 Hopf 引理, 函数 ϕ_1^γ 在 Ω 上可积当且仅当 $\gamma > -1$. 于是, 有

$$\phi_1^{1-\gamma} \in L^{r'}(\Omega) \Leftrightarrow \gamma < 2 - \frac{1}{r'} \quad (22)$$

其中, $r' = r/(r-1)$.

由 $B_1(x) \in L^r(\Omega)$ 且 $0 \leq \gamma_1 < 2 - \frac{1}{r}$, 因此, 利用 Hölder 不等式可以得到 $B_1(x)\phi_1^{1-\gamma_1} \in L^1(\Omega)$. 取 $B(x) = -2B_1(x)\phi_1^{1-\gamma_1}$ 即完成了第一步的证明.

第二步 说明式(17)是不成立的.

由式(21)并结合 Fatou 引理可得

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^{\gamma_1} \int_{\Omega} (\sqrt{\theta_2}f(\lambda_n, x, u_n, v_n) + \\ & \sqrt{\theta_1}g(\lambda_n, x, u_n, v_n)) \phi_1 dx = \\ & \liminf_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^{\gamma_1} \int_{\Omega} h(\lambda_n, x, u_n, v_n) \phi_1 dx = \\ & \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} h(\lambda_n, x, u_n, v_n) (1 + \alpha_n\phi_1)^{\gamma_1} \phi_1 (\alpha_n^{-1} + \phi_1)^{-\gamma_1} dx \stackrel{(i)}{\geq} \\ & \int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow +\infty} [h(\lambda_n, x, u_n, v_n) (1 + \alpha_n\phi_1)^{\gamma_1} \phi_1 (\alpha_n^{-1} + \phi_1)^{-\gamma_1}] dx \stackrel{(ii)}{\geq} \\ & \int_{\Omega} \lim_{a \rightarrow 0^+, b \rightarrow 0^+} \underline{H}^+(x, a, b, \gamma_1) \phi_1^{1-\gamma_1} dx = \\ & \int_{\Omega} \underline{A}_{\gamma_1}^+(x) \phi_1^{1-\gamma_1} dx \stackrel{(iii)}{>} 0 \end{aligned} \quad (23)$$

现在需要验证不等式(i), (ii), (iii). 不等式(i)可由 Fatou 引理得到, 不等式(iii)是本文的假设条件, 接下来, 说明不等式(ii)成立. 设 n 固

定, 则由式(20)可得

$$\begin{aligned} & \inf_{k \geq n} h(\lambda_k, x, u_k, v_k) (1 + \alpha_k\phi_1)^{\gamma_1} \geq \\ & \inf_{k \geq n} \left\{ h\left(\lambda, x, \frac{1}{2}\sqrt{\theta_1}\sigma, \frac{1}{2}\sqrt{\theta_2}\sigma\right) (1 + \sigma)^{\gamma_1} : \sigma > \right. \\ & \left. (\sup_{k \geq n} \alpha_k^{-1})^{-1} \phi_1, |\lambda - \tau_1| \leq \sup_{k \geq n} |\lambda_k - \tau_1| \right\} = \\ & \underline{H}^+(x, \sup_{k \geq n} \alpha_k^{-1}, \sup_{k \geq n} |\lambda_k - \tau_1|, \gamma_1) \end{aligned}$$

因为, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 有 $\sup_{k \geq n} \alpha_k \rightarrow 0$, $\sup_{k \geq n} |\lambda_k - \tau_1| \rightarrow 0$ 并且还是单调递减的, 再结合 $\underline{H}^+(x, \cdot, \cdot, \gamma_1)$ 是非增的, 则有

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow +\infty} (h(\lambda_k, x, u_k, v_k) (1 + \alpha_k\phi_1)^{\gamma_1}) \geq \\ & \underline{H}^+(x, \sup_{k \geq n} \alpha_k^{-1}, \sup_{k \geq n} |\lambda_k - \tau_1|, \gamma_1) \geq \\ & \lim_{a \rightarrow 0^+, b \rightarrow 0^+} \underline{H}^+(x, a, b, \gamma_1) \end{aligned}$$

从而看出(i), (ii), (iii)是成立的, 进而得到式(17)与式(23)是矛盾的. 于是, 定理2中 **a** 的(a)是成立的.

关于定理2中 **a** 的(b)的证明, 由定理1可知, $D_{\tau_1, \delta}^+ \subset S$ 在 τ_1 处无穷分歧. 此外, 序列 $\{\lambda_n\}$ 从左侧趋于 τ_1 . 这样就证明了定理2中的 **a**.

在定理2中, 关于结论 **b** 的证明, 类似地, 即对 $\alpha_n < 0$ 以及充分大的 n , 有

$$\begin{aligned} -1 + u_n &= -1 + \alpha_n(\sqrt{\theta_1}\phi_1 + u_n^\perp) < 0 \\ -1 + v_n &= -1 + \alpha_n(\sqrt{\theta_2}\phi_1 + v_n^\perp) < 0 \end{aligned}$$

从而可以得到与式(18)~(22)类似的结论. 再根据假设式(7), 运用 Fatou 引理得到与式(21)类似的不等式, 进而得到矛盾. 这样就完成了定理2的证明.

参考文献:

- [1] RABINOWITZ P H. On Bifurcation from infinity[J]. *Journal of Differential Equations*, 1973, 14(3): 462–475.
- [2] RABINOWITZ P H. Some global results for nonlinear eigenvalue problems[J]. *Journal of Functional Analysis*, 1971, 7(3): 487–513.
- [3] DANCER E N. On the structure of solutions of non-linear eigenvalue problems[J]. *Indiana University Mathematics Journal*, 1974, 23(11): 1069–1076.
- [4] DANCER E N. Bifurcation from simple eigenvalues and eigenvalues of geometric multiplicity one[J]. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 2002, 34(5): 533–538.

(下转第15页)

[7] MEDLOCK J, KOT M. Spreading disease: integro-differential equations old and new[J]. [Mathematical Biosciences](#), 2003, 184(2): 201–222.

[8] WAN Y J, YU Z X, MENG Y L. Traveling waves for the nonlocal dispersal equation with state-dependent delay[J]. *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2019, 62(4): 1–18.

[9] MA S W, ZOU X F. Existence, uniqueness and stability of travelling waves in a discrete reaction-diffusion monostable equation with delay[J]. [Journal of Differential Equations](#), 2005, 217(1): 54–87.

[10] YU Z X, YUAN R. Existence and asymptotics of traveling waves for nonlocal diffusion systems[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2012, 45(11): 1361–1367.

[11] YU Z X, YUAN R. Existence, Asymptotics and Uniqueness of traveling waves for nonlocal diffusion systems with delayed nonlocal response[J]. [Taiwanese Journal of Mathematics](#), 2013, 17(6): 2163–2190.

(编辑: 丁红艺)



(上接第 5 页)

[5] ARCOYA D, GÁMEZ J L. Bifurcation theory and related problems: anti-maximum principle and resonance[J]. *Communications in Partial Differential Equations*, 2001, 26(9/10): 1879–1911.

[6] CHHETRI M, GIRG P. On the solvability of asymptotically linear systems at resonance[J]. [Journal of Mathematical Analysis and Applications](#), 2016, 442(2): 583–599.

[7] CHHETRI M, GIRG P. Asymptotically linear system of three equations near resonance[J]. [Journal of Differential Equations](#), 2016, 261(10): 5900–5922.

[8] CHHETRI M, GIRG P. Asymptotically linear systems near and at resonance[J]. [Boundary Value Problems](#), 2014, 2014(1): 242.

[9] EVANS L C. *Partial Differential Equations*[M]. 2nd ed. Providence: American Mathematical Society, 1998.

[10] GILBARG D, TRUDINGER N S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[11] 宣本金. 变分法——理论与应用[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2006.

(编辑: 石 瑛)