

# 涉及小代数体函数的 Milloux 不等式

祝笑笑, 刘晓俊

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

**摘要:** 基于亚纯函数的 Milloux 不等式, 考虑将有关结论推广到代数体函数。主要研究了代数体函数的 Milloux 不等式涉及小代数体函数的情形, 其中包括小亚纯函数与小代数体函数。以前人的研究成果为工具, 借助代数体函数的第二基本定理和小代数体函数的第二基本定理, 同时结合 Jensen 公式, 最终得到了涉及小代数体函数的 Milloux 不等式的结论, 除此之外, 还研究了关于 Borel 例外值个数问题。

**关键词:** Milloux 不等式; 小代数体函数; 第二基本定理

**中图分类号:** O 174.52 **文献标志码:** A

## Milloux inequality concerning small algebroidal function

ZHU xiaoxiao, LIU xiaojun

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

**Abstract:** Based on the Milloux inequality of meromorphic function, the conclusions related were extended to the case of algebroidal function. The Milloux inequality of algebroidal function concerning small algebroidal function as well as concerning small meromorphic function was studied. By using the second fundamental theorem of algebroidal function and small algebroidal function, and combining with the Jensen formula, conclusions about the Milloux inequality concerning small algebroidal function were obtained. Besides, the problem concerning the number of Borel exception values was also studied.

**Keywords:** Milloux inequality; small algebroidal function; second fundamental theorem

### 1 问题的提出

**定义 1**<sup>[1]</sup> 代数体函数是由不可约方程

$$\psi(z, W) \equiv A_k(z)W^k + A_{k-1}(z)W^{k-1} + \cdots + A_0(z) = 0 \quad (1)$$

所确定的  $k$  值解析函数, 其中  $A_j(z) (j = 0, 1, \cdots, k)$  是  $z$  的全纯函数, 并且不在一点同时为零。特别

地, 当  $k = 1$  时,  $W(z)$  即为亚纯函数; 当  $A_j(z) (j = 0, 1, \cdots, k)$  都是多项式时,  $W(z)$  为代数函数。

代数体函数的第二基本定理首先由 Valiron 在 1929 年提出, 后来有很多学者给出了详细的证明。下面定理的形式来自文献[2]。

**定理 1** 设  $W(z) = \{W_i(z)\}$  是  $\{z | z < R\}$  内由式 (1) 所

收稿日期: 2018-07-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11401381)

第一作者: 祝笑笑 (1992-), 男, 硕士研究生。研究方向: 复分析。E-mail: 1406253487@qq.com

通信作者: 刘晓俊 (1981-), 男, 副教授。研究方向: 复分析。E-mail: 249315736@qq.com

确定的 $k$ 值无重因子代数体函数,并且每个分支 $W_i(z)$ 不恒为常数值。设 $a_t(t=1,2,\cdots,p)$ 是 $p$ 个不同的复数(有穷或否),则对任意的 $r\in(0,R)$ ,恒有

$$(p-2k)T(r,W) < \sum_{t=1}^p N\left(r, \frac{1}{W-a_t}\right) - N_1(r) + S(r,W)$$

若 $\{a_t\}$ 中不含 $\infty$ ,由于 $N(r,W)\leq T(r,W)$ ,上式变形成为

$$(p-2)T(r,W) < \sum_{t=1}^p N\left(r, \frac{1}{W-a_t}\right) - N_1(r) + S_1(r,W)$$

其中,  $S_1(r,W) = S_0(r,W) + m\left(r, \frac{W'}{W}\right)$ 。

若 $\{a_t\}$ 中含有 $\infty$ ,在上式中可令 $a_{p+1} = \infty$ ,则上式可改写成

$$(p-1)T(r,W) < \sum_{t=1}^{p+1} N\left(r, \frac{1}{W-a_t}\right) - N_1(r) + S_1(r,W)$$

其中,  $N_1(r) = 2N(r,W) - N(r,W') + N\left(r, \frac{1}{W'}\right)$ 。

对于亚纯函数的第二基本定理, Yang 等<sup>[3]</sup>曾给出一个涉及导数的推广,从而得到了亚纯函数的 Milloux 不等式<sup>[4]</sup>。之后,何育赞又给出了代数体函数的 Milloux 不等式的一种形式。

**定理 2**<sup>[1]</sup> 设 $W(z)$ 是 $k$ 值无重因子代数体函数,并令 $a_v(v=1,2,\cdots,p)$ 和 $b_j(j=1,2,\cdots,q)$ 为两组有穷异于零且每组内判别的复数,则有

$$\begin{aligned} [p+q-6(k-1)]T(r,W) &< (q+1)N\left(r, \frac{1}{W}\right) + \\ &2\bar{N}(r,W) + \sum_{v=1}^p N\left(r, \frac{1}{W-a_v}\right) + \sum_{j=1}^q N\left(r, \frac{1}{W'-b_j}\right) - \\ &\left[N\left(r, \frac{1}{W''}\right) + qN\left(r, \frac{1}{W'}\right)\right] + S(r,W) \end{aligned}$$

其中,  $S(r,W)$ 具有余项性质。

**定义 2**<sup>[1]</sup> 设 $W(z) = \{(w_j(z), a)\}_{j=1}^k$ 是区域 $D$ 上的 $k$ 值广义代数体函数。

a. 记 $W(z)$ 的所有代数体映射之集为 $Y_W(D)$ ;

b. 称广义代数体集合 $H_W(D) = \{h \circ W(z); h \in Y_W(D)\}$ 为 $W(z)$ 的代数体函数类。

**定义 3**<sup>[1]</sup> 设 $W(z)$ 是圆盘 $D = \{|z| < R\}$ 上的 $k$ 值代数体函数,记 $W(z)$ 的所有小代数体函数集合为

$$X_W(D) = \{M(z) \in H_W(D); T(r,M) = o(T(r,W))\}$$

**定义 4**<sup>[2]</sup> 设 $W(z)$ 为代数体函数,则

$$\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ T(r,W)}{\log r}, \quad \mu = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ T(r,W)}{\log r}$$

分别称为 $W(z)$ 的级和下级。

对于代数体函数的第二基本定理,不久前,孙道椿等<sup>[1]</sup>把这个结果改进为小代数体函数的情形,得到了小代数体函数的第二基本定理。

**定理 3**<sup>[1]</sup> 设 $W(z) = \{W_i(z)\}$ 是 $C$ 上非常数的 $k$ 值无重因子代数体函数,  $\{a_j(z)\}_{j=1}^q \subset X_W$ ,  $\{a_j = o(W(z))\}_{j=1}^q$ 是 $W(z)$ 的 $q \geq 2$ 个不同的小代数体函数(也可能是小亚纯函数及有限或无限的复常数),则对任意的 $\varepsilon \in (0,1)$ 及 $r > 0$ ,恒有

$$\begin{aligned} m(r,W) + \sum_{j=1}^q m\left(r, \frac{1}{W(z)-a_j(z)}\right) \leq \\ (2+\varepsilon)T(r,W) + (2+\varepsilon)N_x(r,W) + S(r,W) \end{aligned} \quad (2)$$

其等价形式为

$$\begin{aligned} (q-2-\varepsilon)T(r,W) \leq \sum_{j=1}^q N\left(r, \frac{1}{W-a_j(z)}\right) + \\ (2+\varepsilon)N_x(r,W) + S(r,W) \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} (q-4k+2-\varepsilon)T(r,W) \leq \\ \sum_{j=1}^q N\left(r, \frac{1}{W-a_j(z)}\right) + S(r,W) \end{aligned} \quad (3)$$

本文主要以定理 1 和定理 3 为工具,将定理 2 的结论改进为涉及小代数体函数的情形,从而得到了下面的结论。

**定理 4** 设 $W(z)$ 是 $k$ 值无重因子代数体函数,令 $\{a_v(z)\}_{v=1}^p \subset X_W$ ,  $\{a_v(z) = o(W(z))\}_{v=1}^p$ ,  $\{b_j(z)\}_{j=1}^q \subset X_W$ ,  $\{b_j(z) = o(W'(z))\}_{j=1}^q$ 分别为 $W(z)$ 和 $W'(z)$ 的不同的 $p$ 个小代数体函数(也可能是小亚纯函数<sup>[5]</sup>及有限或无限的复常数<sup>[6]</sup>,  $p, q \geq 2$ ),则有

$$\begin{aligned} [p+q-4(2+\varepsilon)(k-1)]T(r,W) \leq 4(2+\varepsilon)(k-1)\bar{N}(r,W) + \\ \sum_{v=1}^p N\left(r, \frac{1}{W-a_v(z)}\right) + \sum_{j=1}^q N\left(r, \frac{1}{W'-b_j(z)}\right) + N(r,W) + \\ (q+1)N\left(r, \frac{1}{W}\right) - (q-1)N\left(r, \frac{1}{W'}\right) + S(r,W) \end{aligned}$$

**推论** 设 $W(z)$ 是由式(1)所确定的 $k$ 值有穷正级整代数体函数<sup>[7]</sup>,若 $0, \infty, a_v(z)$  ( $v=1,2,\cdots,p$ )是 $W(z)$ 的判别有穷的 Borel 例外值,  $b_j(z)$  ( $j=1,2,\cdots,q$ )是 $W'(z)$ 的 $q$ 个判别有穷的 Borel 例外值,且 $a_v(z), b_j(z)$ 不恒为 0 和 $\infty$ ,则 $W(z)$ 为常数。

## 2 相关引理

**引理 1**<sup>[1]</sup> 设  $W(z)$  为  $k$  值无重因子代数体函数, 则对任意正整数  $\nu \in N$ , 它的  $\nu$  阶导数  $W^{(\nu)}(z)$  满足

$$n(r, W) + \nu \bar{n}(r, W) \leq n(r, W^{(\nu)}) \leq n(r, W) + \nu \bar{n}(r, W) + (2\nu - 1)n_x(r, W) + O(1)$$

**引理 2**<sup>[4]</sup> 设  $W(z)$  是由式(1)确定的  $k$  值代数体函数, 则有

$$N_x(r, W) = 2(k-1)T(r, W) + O(1)$$

**引理 3**<sup>[4]</sup> 设  $W(z)$  为  $k$  值无重因子代数体函数, 则

当  $W(z)$  为有穷级<sup>[8]</sup>时,  $S(r, W) = O(\log r)$ ,  $r \rightarrow \infty$ ;

当  $W(z)$  为无穷级时,  $S(r, W) = O\{\log(rT(r, W))\}$ ,

$r \rightarrow \infty$ 。

类似于亚纯函数, 定义代数体函数的 Borel 例外值。

**定义 5**<sup>[9]</sup> 设  $W(z)$  是由式(1)确定的非常数值的有穷正级  $k$  值无重因子代数体函数, 若对任意的复数  $b$ , 有

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log N^+\left(r, \frac{1}{W-b}\right)}{\log r} < \lambda$$

则称  $b$  为  $W(z)$  的 Borel 例外值。

**引理 4** 设  $W(z)$  是由式(1)确定的非常数值的有穷正级  $k$  值无重因子<sup>[10]</sup>代数体函数,  $a(z)$  为  $W(z)$  的任意小代数体函数, 则

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log N^+\left(r, \frac{1}{W-a(z)}\right)}{\log r} < \lambda$$

至多有  $(4k-2)$  个 Borel 例外值<sup>[11]</sup>, 其中  $\lambda$  为  $W(z)$  的级。

**证明** 若存在  $(4k-1)$  个 Borel 例外值  $\{a_j(z)\}$ , 满足

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log N^+\left(r, \frac{1}{W-a_j(z)}\right)}{\log r} = \lambda_j < \lambda, j = 1, 2, \dots, 4k-1$$

则存在  $\varepsilon > 0$ , 使得

$$\sum_{j=1}^{4k-1} N\left(r, \frac{1}{W-a_j(z)}\right) < (4k-1)r^{\lambda-\varepsilon}$$

结合小代数体函数的第二基本定理<sup>[12]</sup>(定理 3), 并由引理 3, 得

$$T(r, W) \leq \sum_{j=1}^{4k-1} N\left(r, \frac{1}{W-a_j(z)}\right) + O(1) < (4k-1)r^{\lambda-\varepsilon} + O(1)$$

则有

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ T(r, W)}{\log r} < \lambda$$

矛盾, 证毕。

## 3 主要结论的证明

定理 4 的证明。

对  $W'(z)$  和  $b_j(z)$  ( $j = 1, 2, \dots, q+1$ ) 应用定理 3 并结合第二基本定理, 令  $b_{q+1}(z) = 0$ , 得

$$qT(r, W') < N\left(r, \frac{1}{W'}\right) + \sum_{j=1}^q N\left(r, \frac{1}{W'-b_j(z)}\right) + (2+\varepsilon)N_x(r, W') + S(r, W') \quad (4)$$

对  $W(z)$ ,  $a_\nu(z)$  ( $\nu = 1, 2, \dots, p+1$ ) 应用定理 3 并结合第二基本定理, 并令  $a_{p+1}(z) = 0$ , 得

$$pT(r, W) < N(r, W) + N\left(r, \frac{1}{W}\right) + \sum_{\nu=1}^p N\left(r, \frac{1}{W-a_\nu(z)}\right) + (2+\varepsilon)N_x(r, W) + S(r, W) \quad (5)$$

再由 Jensen 公式

$$\begin{aligned} qT(r, W) &= qT\left(r, \frac{1}{W}\right) + O(1) = \\ &= q\left(m\left(r, \frac{W'}{W}\right) + N\left(r, \frac{1}{W}\right)\right) + O(1) \leq \\ &= q\left(m\left(r, \frac{W'}{W}\right) + m\left(r, \frac{1}{W'}\right) + N\left(r, \frac{1}{W}\right)\right) + O(1) \leq \\ &= qT(r, W') + qN\left(r, \frac{1}{W}\right) - qN\left(r, \frac{1}{W'}\right) + \\ &= qm\left(r, \frac{W'}{W}\right) + O(1) \end{aligned} \quad (6)$$

将式(4)应用于式(6), 得

$$\begin{aligned} qT(r, W) &\leq N\left(r, \frac{1}{W'}\right) + \sum_{j=1}^q N\left(r, \frac{1}{W'-b_j(z)}\right) + \\ &+ (2+\varepsilon)N_x(r, W') + qN\left(r, \frac{1}{W}\right) - \\ &- qN\left(r, \frac{1}{W'}\right) + S_2(r, W') \end{aligned} \quad (7)$$

其中,  $S_2(r, W') = S(r, W') + qm\left(r, \frac{W'}{W}\right) + O(1)$ 。

将式(5)与式(7)相加, 得

$$(p+q)T(r, W) \leq 2(2+\varepsilon)N_x(r, W') + N(r, W) + \sum_{v=1}^p N\left(r, \frac{1}{W-a_v(z)}\right) + \sum_{j=1}^q N\left(r, \frac{1}{W'-b_j(z)}\right) + (q+1)N\left(r, \frac{1}{W}\right) - (q-1)N\left(r, \frac{1}{W'}\right) + S_3(r, W) \quad (8)$$

其中,  $S_3(r, W) = S(r, W) + S_2(r, W')$ 。

由引理 1 和引理 2

$$\begin{aligned} 2(2+\varepsilon)N_x(r, W') &\leq 4(2+\varepsilon)(k-1)T(r, W') + O(1) = \\ &4(2+\varepsilon)(k-1)\left(m\left(r, \frac{W'}{W} \cdot W\right) + N(r, W')\right) + O(1) \leq \\ &4(2+\varepsilon)(k-1)\left(m\left(r, \frac{W'}{W}\right) + m(r, W) + N(r, W) + \right. \\ &\quad \left. \bar{N}(r, W) + N_x(r, W)\right) + O(1) \leq 4(2+\varepsilon)(k-1) \\ &\quad \left(m\left(r, \frac{W'}{W}\right) + \bar{N}(r, W) + (2k-1)T(r, W)\right) + O(1) \leq \\ &4(2+\varepsilon)(k-1)\left(m\left(r, \frac{W'}{W}\right) + \right. \\ &\quad \left. \bar{N}(r, W) + T(r, W)\right) + O(1) \end{aligned} \quad (9)$$

将式(9)应用于式(8), 得

$$\begin{aligned} [p+q-4(2+\varepsilon)(k-1)]T(r, W) &\leq 4(2+\varepsilon)(k-1)\bar{N}(r, W) + \\ &\sum_{v=1}^p N\left(r, \frac{1}{W-a_v(z)}\right) + \sum_{j=1}^q N\left(r, \frac{1}{W'-b_j(z)}\right) + \\ &N(r, W) + (q+1)N\left(r, \frac{1}{W}\right) - (q-1)N\left(r, \frac{1}{W'}\right) + S_4(r, W) \end{aligned}$$

其中,  $S_4(r, W) = S_3(r, W) + 4(2+\varepsilon)(k-1)m\left(r, \frac{W'}{W}\right) + O(1)$ 。

再对  $S_4(r, W)$  中各项应用对数导数引理, 即得定理 4, 证毕。

推论的证明。

结合引理 1 和引理 2 可得

$$\begin{aligned} T(r, W') &= m(r, W') + N(r, W') \leq m(r, W) + m\left(r, \frac{W'}{W}\right) + \\ &N(r, W') \leq m(r, W) + N(r, W) + \\ &\bar{N}(r, W) + N_x(r, W) + O(1) \leq 2kT(r, W) + O(1) \end{aligned}$$

故

$$\log T(r, W') \leq \log(2kT(r, W) + O(1)) = \log T(r, W) + O(1)$$

则有

$$\frac{\log T(r, W')}{\log r} \leq \frac{\log T(r, W)}{\log r} + O(1)$$

所以

$$\lambda(W') \leq \lambda(W)$$

若两种情况同时成立, 则结合定理 4 可得

$$\lambda(W) \leq$$

$$\max_{\substack{1 \leq v \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \left\{ \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ N\left(r, \frac{1}{W-a_v(z)}\right)}{\log r}, \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ N\left(r, \frac{1}{W'-b_j(z)}\right)}{\log r} \right\} <$$

$$\lambda(W)$$

矛盾, 得证。

参考文献:

- [1] 孙道椿, 高宗升. 代数体函数的值分布[M]. 北京: 科学出版社, 2014.
- [2] 何育赞, 萧修治. 代数体函数与常微分方程[M]. 北京: 科学出版社, 1988.
- [3] YANG C C, YI H X. Uniqueness theory of meromorphic functions[M]. Beijing: Science Press, 2003: 36–38.
- [4] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.
- [5] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2013.
- [6] 庞学诚, 梁金荣, 柴俊. 复变函数[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [7] 张广厚. 整函数和亚纯函数理论[M]. 北京: 科学出版社, 1986.
- [8] 黄跃华, 涂金. 整函数与亚纯函数的级与型[J]. 南昌大学学报(理科版), 2014, 38(3): 209–213.
- [9] 阮宁, 吴桂荣. 代数体函数的特征函数[J]. 福建师范大学学报(自然科学版), 2003, 19(1): 10–14.
- [10] 王建平. 关于代数体函数的唯一性[J]. 绍兴师专学报, 1994(5): 26–33.
- [11] 张庆彩. 关于代数体函数的唯一性[J]. 数学的实践与认识, 2013, 43(1): 183–187.
- [12] 张进, 孙道椿. 涉及小函数的代数体函数的第二基本定理[J]. 华南师范大学学报(自然科学版), 2009(1): 26–28.

(编辑: 丁红艺)