

状态依赖时滞的非局部扩散方程的行波解存在性

王 治¹, 万育基¹, 余志先²

(1. 上海理工大学 理学院, 上海 200093; 2. 上海师范大学 数理学院, 上海 200234)

摘要: 在自然界中, 非局部扩散现象更广泛存在, 因此, 对非局部扩散方程的研究更具现实意义。在研究扩散系统的过程中, 为了克服非局部扩散问题, 常用卷积算子或积分微分方程研究扩散系统。基于状态依赖时滞的非局部的种群模型行波解存在性的研究, 研究了更一般的状态依赖时滞的非局部扩散方程的行波解存在性。通过利用合适的上下解及有关假设构造一个算子所在的集合; 通过 Schauder 不动点定理, 证明了当波速大于临界波速时单调行波解(波前解)的存在性。

关键词: 行波解; 非局部扩散; 状态依赖时滞; Schauder 不动点定理

中图分类号: O 157.5 **文献标志码:** A

Existence of traveling waves solutions of the nonlocal dispersal equation with state-dependent delay

WANG Zhi¹, WAN Yuji¹, YU Zhixian²

(1. College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China;

2. Mathematics and Science College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: In nature, the phenomenon of non-local diffusion is widespread, therefore, the study of the nonlocal dispersal equation is of practical significance. Usually, the dispersal system is studied by using the convolution operator or the integral differential equation. Based on the study of the traveling waves solutions of the nonlocal equation with state-dependent delay, the traveling waves solutions of the more general nonlocal dispersal equation with state-dependent delay were concerned. By applying the appropriate upper and lower solutions and relevant assumptions, the set of an operator was constructed. By using Schauder fixed point theorem, the existence of traveling waves is proved when the wave velocity is greater than the critical wave velocity.

Keywords: traveling waves solutions; nonlocal dispersal; state-dependent delay; Schauder's fixed point theorem

收稿日期: 2018-11-10

基金项目: 上海自然科学基金资助项目 (18ZR1426500)

第一作者: 王 治(1994-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 常微分方程与动力系统. E-mail: 18772375387@163.com

通信作者: 余志先(1982-), 男, 副教授. 研究方向: 常微分方程与动力系统. E-mail: zxyu0902@163.com

1 问题的提出

虽然状态依赖时滞的微分方程 (SD-DDE) 可以追溯到 19 世纪, 但该类型方程研究由于在各种情况下的频繁运用而再一次成为研究热点, 见文献[1-4]。

Lv 等^[3]研究了一种状态依赖时滞的扩散阶段结构模型, 并得到了大波速下的行波解的存在性。Lin 等^[4]进一步研究了状态依赖时滞的反应扩散方程:

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) - du(x, t) + b(u(x, t - \tau(u(x, t)))) \quad (1)$$

的行波解的存在性, 其中 $u(x, t)$ 代表时刻 t 在 x 处的种群密度。

行波解的概念在 1937 年由 Kolmogorov 等^[5]提出, 用来解释动物基因的传播过程。行波解现象不仅存在于种群模型中, 也存在于物理、化学、生物及神经网络等领域, 见文献[3-5]。行波解也可以用来解释自然界中传播和震动现象, 因而具有重要的实际意义。

尽管方程 (1) 中 Laplacian 扩散模型应用广泛, 但它表示的生态系统的一个重要缺点是这种扩散是一个局部扩散, 这表明种群中的个体只能影响到局部范围。克服这类问题的常用方法是用卷积算子或积分微分方程来研究扩散系统, 见文献[6-7]。Wan 等^[8]研究状态依赖时滞的非局部的种群模型

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = (J * u - u)(x, t) - du(x, t) + b(u(x, t - \tau(u(x, t)))) \quad (2)$$

的行波解的存在性, 其中 $u(x, t)$ 代表在时刻 t 位置 x 处的种群密度, $J * u - u$ 是一个非局部扩散算子, 定义为 $J * u = \int_{\mathbb{R}} J(x-y)u(y, t)dy$ 。若 $J(x-y)$ 是从 y 位置跳跃到 x 位置的概率分布, 则 $J * u$ 代表个体从所有其他位置到 x 位置的种群数量, 并且 $u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} J(x-y)u(y, t)dy$ 代表从 x 位置处到其他位置的种群数量。在种群模型中, d 为死亡率, $b(u)$ 为出生函数, $\tau(u)$ 为种群密度依赖的成熟时滞。

本文考虑更一般的非局部带状态依赖时滞反应的扩散系统的行波解的存在性, 方程如下

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = d(J * u - u)(x, t) + f(u(x, t), u(x, t - \tau(u(x, t)))) \quad (3)$$

方程 (3) 的行波解, 是一种定义在全空间上特殊的整体解, 且具有如下形式: $u(x, t) = \phi(\xi), \xi = x + ct$,

其中 $c > 0$ 为波速, $\phi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 为波像函数并满足方程

$$d \left(\int_{\mathbb{R}} J(y) \phi(\xi - y) dy - \phi(\xi) \right) - c \phi'(\xi) + f(\phi(\xi), \phi(\xi - c\tau(\phi(\xi)))) = 0, \xi \in \mathbb{R} \quad (4)$$

和渐近边界条件

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \phi(\xi) = 0, \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \phi(\xi) = K \quad (5)$$

特别地, 称满足条件 (5) 的单调行波解为波前解。

2 主要结果

现在给出一些假设:

a. $J: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是非负偶函数, 并且 $\int_{\mathbb{R}} J(y) dy = 1$, $\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} J(y) dy < \infty, \lambda > 0$;

b. $\tau(u) \in C^1([0, \infty), \mathbb{R}_+)$, $0 \leq \tau'(u) < 1$; $0 \leq m = \tau(0) \leq \lim_{u \rightarrow \infty} \tau(u) = M < \infty$;

c. $f \in C^1([0, K]^2, \mathbb{R})$, $f(0, 0) = f(K, K) = 0$, 当 $u \in (0, K)$ 时, $f(u, u) > 0$, 当 $(u, v) \in [0, K]^2$ 时, $\partial_2 f(u, v) \geq 0$, 其中, K 为正常数;

d. $\partial_1 f(0, 0)u + \partial_2 f(0, 0)v \geq f(u, v), (u, v) \in [0, K]^2$;

e. 存在 $L, \kappa > 0, \sigma_1, \sigma_2 \in (0, 1)$, 当 $(u, v) \in [0, \kappa]^2$, $|f(u, v) - \partial_1 f(0, 0)u - \partial_2 f(0, 0)v| \leq L(u^{1+\sigma_1} + v^{1+\sigma_2})$

注: 假设 c 和 d 蕴含了 $\partial_1 f(0, 0) + \partial_2 f(0, 0) \geq f\left(\frac{K}{2}, \frac{K}{2}\right) \frac{2}{K} > 0$ 。

定理 1 假设 a~e 成立, 存在一个正常数 c_* , 当 $c \geq c_*$ 时, 方程 (4) 存在一个非减的正的行波解 $u(t, x) = \phi(x + ct)$, 且 $\phi(-\infty) = 0, \phi(+\infty) = K$ 。此外,

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \phi(\xi) e^{-\lambda_1 \xi} = 1, \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \phi'(\xi) e^{-\lambda_1 \xi} = \lambda_1 c > c_* \quad (6)$$

其中, $\lambda_1 > 0$ 为下列方程的最小实根。

$$\Delta(c, \lambda) = c\lambda - d \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} J(y) dy - 1 \right) - \partial_1 f(0, 0) - \partial_2 f(0, 0) e^{-\lambda cm} = 0$$

3 主要结果的证明

问题 (3) 行波解的存在性的证明, 将分成 3 个部分来完成。首先, 利用合适的上下解及有关假设构造一个算子所在集合 Γ ; 其次, 证明定义的算子 $F: \Gamma \rightarrow \Gamma$ 在 B_λ 中关于范数 $\|\cdot\|_{B_\lambda}$ 全连续; 最后, 利用 Schauder 不动点定理, 得到存在性定理。

定义算子 $H: C_{[0, K]}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C_{[0, K]}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$H(\phi)(\xi) = dJ * \phi(\xi) + (\beta - d)\phi(\xi) + f(\phi(\xi), \phi(\xi - c\tau(\phi(\xi)))) \tag{7}$$

其中, $\beta > d$, $C_{[0,K]}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{\phi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | 0 \leq \phi(\xi) \leq K, \xi \in \mathbb{R}\}$. 进一步定义算子 $F: C_{[0,K]}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C_{[0,K]}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$F(\phi)(\xi) = \frac{1}{c}e^{-\frac{\beta}{c}\xi} \int_{-\infty}^{\xi} e^{\frac{\beta}{c}s} H(\phi)(s) ds \tag{8}$$

显然, 算子 F 的一个不动点 ϕ 就是方程(4)的解, 即

$$\phi(\xi) = F(\phi)(\xi), \xi \in \mathbb{R} \tag{9}$$

因此, 为了研究方程(4)解的存在性, 只需研究算子 F 的不动点的存在性.

因为 $\partial_2 f(u, v) \geq 0, (u, v) \in [0, K]^2$, 容易知道函数 f 满足如下拟单调条件.

引理 1 假设 $a \sim c$ 成立, 存在一个正常数 $\beta >$

$$\max_{(u,v) \in [0,K]^2} |\partial_1 f(u, v)| + d \text{ 使得} \\ f(\phi_1(\xi), \phi_1(\xi - c\tau(\phi_1(\xi)))) - f(\phi_2(\xi), \phi_2(\xi - c\tau(\phi_2(\xi)))) + (\beta - d)(\phi_1(\xi) - \phi_2(\xi)) \geq 0$$

其中, $\phi_1, \phi_2 \in C_{[0,K]}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 且当 $\xi \in \mathbb{R}, 0 \leq \phi_2(\xi) \leq \phi_1(\xi) \leq K$.

引理 2 假设 $a \sim d$ 成立, 如果 $\phi \in C_{[0,K]}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 对于任何 $c > 0$, 则有

$$0 \leq H(\phi)(\xi) \leq \beta K, c|F'(\phi)(\xi)| \leq \beta K$$

证明 易证 $0 \leq H(\phi)(\xi) \leq \beta K$. 由算子 F 的定义, 有

$$c \left| \frac{dF(\phi)(\xi)}{d\xi} \right| = \left| -\frac{\beta}{c} e^{-\frac{\beta}{c}\xi} \int_{-\infty}^{\xi} e^{\frac{\beta}{c}s} H[\phi](s) ds + H(\phi)(\xi) \right| \leq \\ \max \left\{ \left| \frac{\beta}{c} e^{-\frac{\beta}{c}\xi} \int_{-\infty}^{\xi} e^{\frac{\beta}{c}s} H[\phi](s) ds \right|, |H(\phi)(\xi)| \right\} \leq \beta K$$

故得证.

现在, 引入积分方程(9)的上下解的概念.

定义 1 一个连续有界的函数 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow [0, K]$ 称为方程(9)的一个上解当且仅当满足如下条件:

$$F(\phi)(\xi) \leq \phi(\xi), \xi \in \mathbb{R} \tag{10}$$

方程(9)的一个下解也可以类似定义得到, 只需将式(10)不等号反向.

当 $\lambda \geq 0, c \geq 0$, 定义一个函数 $\Delta(c, \lambda)$ 如下:

$$\Delta(c, \lambda) = c\lambda - d \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} J(y) dy - 1 \right) - \partial_1 f(0, 0) - \partial_2 f(0, 0) e^{-\lambda cm} \tag{11}$$

引理 3 假设 $a \sim d$ 成立, 则存在唯一的 $c_* > 0$ 满足如下条件:

① 若 $c \geq c_*$, 则存在两个正数 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$, $\Delta(c, \lambda_1) = \Delta(c, \lambda_2) = 0$;

② 若 $c < c_*$, 则对所有 $\lambda > 0$, $\Delta(c, \lambda) < 0$;

③ 若 $c = c_*$, 则 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_*$, 当 $c > c_*$, 则 $\lambda_1 < \lambda_* < \lambda_2$,

$$\Delta(c, \cdot) = \begin{cases} > 0, & (\lambda_1, \lambda_2) \\ < 0, & \mathbb{R} \setminus [\lambda_1, \lambda_2] \end{cases}$$

对于在引理 3 中给定的常数 $c > c_*$ 和 λ_1, λ_2 , 定义连续函数^[9-11]:

$$\hat{\phi}(\xi) := \min\{K, e^{\lambda_1 \xi}\}, \xi \in \mathbb{R} \tag{12}$$

$$\underline{\phi}(\xi) := \max\{0, e^{\lambda_1 \xi} - qe^{\gamma \lambda_1 \xi}\}, \xi \in \mathbb{R} \tag{13}$$

其中, $\gamma \in \left(1, \min\left\{1 + \sigma_1, 1 + \sigma_2, \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right\}\right)$. 显然, 当 q 充分大时, 对 $\xi \in \mathbb{R}$, 有 $0 \leq \underline{\phi}(\xi) \leq \hat{\phi}(\xi) \leq K, \underline{\phi}(\xi) \neq 0$.

引理 4 假设 $a \sim d$ 成立, 则对波速 $c > c_*$, 此时, 存在一个 $\beta_1 > 0$, 当 $\beta \geq \beta_1$, $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ 时, $|\hat{\phi}(\xi_1) - \hat{\phi}(\xi_2)| \leq \frac{K\beta}{c} |\xi_1 - \xi_2|$.

证明 注意到

$$c\lambda_1 = d \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} J(y) dy - 1 \right) + \partial_1 f(0, 0) + \partial_2 f(0, 0) e^{-\lambda cm} < d \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} J(y) dy - d + \partial_1 f(0, 0) + \partial_2 f(0, 0) \triangleq L_1 < +\infty$$

当 $\hat{\phi}(\xi) = e^{\lambda_1 \xi} < K$, 有 $c\hat{\phi}'(\xi) = c\lambda_1 e^{\lambda_1 \xi} < L_1 K$;

当 $\hat{\phi}(\xi) = K < e^{\lambda_1 \xi}$, $c\hat{\phi}'(\xi) = 0$, 且

$$c|\hat{\phi}(\xi_1) - \hat{\phi}(\xi_2)| \leq L_1 K |\xi_1 - \xi_2|, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$$

令 $\beta_1 = L_1$, 即完成证明.

引理 5 假设 $a \sim d$ 成立, 当波速 $c > c_*$, $\hat{\phi}(\xi)$ 与 $\underline{\phi}(\xi)$ 分别为方程(9)的一个上解和下解.

证明 因为对 $\xi \in \mathbb{R}$, $0 \leq \hat{\phi}(\xi) \leq K$, 由引理 1 知

$$H(\hat{\phi})(\xi) = d \int_{\mathbb{R}} J(y) \hat{\phi}(\xi - y) dy + f(\hat{\phi}(\xi), \hat{\phi}(\xi - c\tau(\hat{\phi}(\xi)))) + (\beta - d)\hat{\phi}(\xi) \leq dK + f(K, K) + (\beta - d)K = \beta K$$

且有

$$F(\hat{\phi})(\xi) = \frac{1}{c} e^{-\frac{\beta}{c}\xi} \int_{-\infty}^{\xi} e^{\frac{\beta}{c}s} H(\hat{\phi})(s) ds \leq \frac{1}{c} e^{-\frac{\beta}{c}\xi} \int_{-\infty}^{\xi} e^{\frac{\beta}{c}s} \beta K ds = K \tag{14}$$

另一方面, 当 $u, v \in [0, K]$, $f(u, v) \leq \partial_1 f(0, 0)u + \partial_2 f(0, 0)v$, 当 $\xi \in \mathbb{R}$, $0 \leq \hat{\phi}(\xi) \leq e^{\lambda_1 \xi}$, 又因 $\Delta(c, \lambda_1) = 0$, $\beta > \max_{(u,v) \in [0,K]^2} |\partial_1 f(u, v)| + d$, 故有

$$H(\hat{\phi})(\xi) = d \int_{\mathbb{R}} J(y) \hat{\phi}(\xi - y) dy + f(\hat{\phi}(\xi), \hat{\phi}(\xi - c\tau(\hat{\phi}(\xi)))) + (\beta - d)\hat{\phi}(\xi) \leq d \int_{\mathbb{R}} J(y) \hat{\phi}(\xi - y) dy + \partial_1 f(0, 0)\hat{\phi}(\xi) + \partial_2 f(0, 0)\hat{\phi}(\xi - c\tau(\hat{\phi}(\xi))) + (\beta - d)\hat{\phi}(\xi) \leq e^{\lambda_1 \xi} \left(d \int_{\mathbb{R}} J(y) e^{-\lambda_1 y} dy + \partial_1 f(0, 0) + (\beta - d) + \partial_2 f(0, 0) e^{-\lambda_1 cm} \right) = e^{\lambda_1 \xi} (\beta + c\lambda_1)$$

则

$$F(\hat{\phi})(\xi) = \frac{1}{c} e^{-\frac{\beta}{c}\xi} \int_{-\infty}^{\xi} e^{\frac{\beta}{c}s} H(\hat{\phi})(s) ds \leq \frac{1}{c} e^{-\frac{\beta}{c}\xi} \int_{-\infty}^{\xi} e^{\frac{\beta}{c}s} e^{\lambda_1 s} (\beta + c\lambda_1) ds = e^{\lambda_1 \xi} \quad (15)$$

根据式(14)和式(15), 当 $\xi \in \mathbb{R}$ 时, $F(\hat{\phi})(\xi) \leq \hat{\phi}(\xi)$, 因此 $\hat{\phi}(\xi)$ 为方程(9)的一个上解。

令 $\xi_0 = -\frac{\ln q}{(\gamma-1)\lambda_1}$, 于是当 $\xi \geq \xi_0$ 时, $\underline{\phi}(\xi) = 0$, 当 $\xi \leq \xi_0$ 时, $\underline{\phi}(\xi) = e^{\lambda_1 \xi} - qe^{\gamma\lambda_1 \xi}$ 。

显然有

$$F(\underline{\phi}(\xi)) \geq 0, \xi \in \mathbb{R} \quad (16)$$

由假设条件 e, 存在 $\delta_1, \delta_2 > 0, 0 < L < \infty$, 当 $(u, v) \in [0, \kappa]^2$, 使得

$$f(u, v) \geq \delta_1 f(0, 0)u + \delta_2 f(0, 0)v - L(u^{1+\sigma_1} + v^{1+\sigma_2}) \quad (17)$$

易知存在一个 $Q_1(\gamma) \gg 1$, 当 $q \geq Q_1(\gamma)$, 有 $e^{\lambda_1 \xi} - qe^{\gamma\lambda_1 \xi} \leq \kappa$ 。因此, $0 \leq \underline{\phi}(\xi) \leq \kappa$ 。因为 $\xi_0 < 0$, $1 + \sigma_i > \gamma, i = 1, 2$, 故可得

$$\hat{\phi}(\xi) \geq \underline{\phi}(\xi) \geq e^{\lambda_1 \xi} - qe^{\gamma\lambda_1 \xi}, \xi \in \mathbb{R} \quad (18)$$

$$[\underline{\phi}(\xi)]^{1+\sigma_i} \leq e^{\gamma\lambda_1 \xi}, \xi \in \mathbb{R}, i = 1, 2 \quad (19)$$

根据式(18)和式(19), 可得

$$\begin{aligned} H(\underline{\phi})(\xi) &= d \int_{\mathbb{R}} J(y) \underline{\phi}(\xi - y) dy + f(\underline{\phi}(\xi), \underline{\phi}(\xi - c\tau(\underline{\phi}(\xi)))) + \\ &(\beta - d) \underline{\phi}(\xi) \geq d \int_{\mathbb{R}} J(y) \underline{\phi}(\xi - y) dy + \\ &\partial_2 f(0, 0) \underline{\phi}(\xi - c\tau(\underline{\phi}(\xi))) + \partial_1 f(0, 0) \underline{\phi}(\xi) + \\ &(\beta - d) \underline{\phi}(\xi) - L[\underline{\phi}(\xi)]^{1+\sigma_1} - L[\underline{\phi}(\xi - c\tau(\underline{\phi}(\xi)))]^{1+\sigma_2} \geq \\ &(c\lambda_1 + \beta) e^{\lambda_1 \xi} - q(c\gamma\lambda_1 + \beta) e^{\gamma\lambda_1 \xi} + \\ &\partial_2 f(0, 0) (e^{\lambda_1 (\xi - c\tau(\underline{\phi}(\xi)))} - e^{\lambda_1 (\xi - cm)}) + \\ &\partial_2 f(0, 0) q e^{\gamma\lambda_1 \xi} (e^{-cm\gamma\lambda_1} - e^{-c\gamma\lambda_1 \tau(\underline{\phi}(\xi))}) + \\ &e^{\gamma\lambda_1 \xi} (\Delta(c, \gamma\lambda_1) q - L - Le^{-cm\gamma\lambda_1}) + \\ &L(e^{\gamma\lambda_1 (\xi - cm)} - e^{\gamma\lambda_1 (\xi - c\tau(\underline{\phi}(\xi)))}) \geq \\ &(c\lambda_1 + \beta) e^{\lambda_1 \xi} - q(c\gamma\lambda_1 + \beta) e^{\gamma\lambda_1 \xi} + \\ &e^{\gamma\lambda_1 \xi} \left[q\Delta(c, \gamma\lambda_1) - L - Le^{-cm\gamma\lambda_1} + \right. \\ &\left. \frac{\partial_2 f(0, 0) (e^{-cm\lambda_1} - e^{-cm\lambda_1})}{e^{(\gamma-1)\lambda_1 \xi}} \right] \end{aligned}$$

因此, 当 $q \geq \max\{Q_1(\gamma), Q_2(\gamma)\}$, 其中

$$Q_2(\gamma) := \frac{L + Le^{-cm\gamma\lambda_1} + \frac{\partial_2 f(0, 0) (e^{-cm\lambda_1} - e^{-cm\lambda_1})}{e^{(\gamma-1)\lambda_1 \xi}}}{\Delta(c, \gamma\lambda_1)}$$

有

$$H(\underline{\phi})(\xi) \geq (c\lambda_1 + \beta) e^{\lambda_1 \xi} - q(c\gamma\lambda_1 + \beta) e^{\gamma\lambda_1 \xi} \quad (20)$$

由式(20)得

$$F(\underline{\phi})(\xi) \geq \frac{1}{c} e^{-\frac{\beta}{c}\xi} \int_{-\infty}^{\xi} e^{\frac{\beta}{c}s} [(c\lambda_1 + \beta) e^{\lambda_1 s} - q(c\gamma\lambda_1 + \beta) e^{\gamma\lambda_1 s}] ds = e^{\lambda_1 \xi} - qe^{\gamma\lambda_1 \xi} \quad (21)$$

结合式(16)和式(21), 有

$$F(\underline{\phi})(\xi) \geq \underline{\phi}(\xi), \xi \in \mathbb{R}$$

因此, $\underline{\phi}(\xi)$ 是方程(9)的一个下解。综上可知, 完成证明。

下面, 将通过 Schauder 不动点定理来寻求算子 F 的不动点。为此, 可以引进指数衰减范数。当 $0 \leq \lambda \leq \lambda_1$, 定义

$$B_\lambda(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{\phi : \phi(\xi) \in C_{[0, K]}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\phi(\xi)| e^{-\lambda \xi} < \infty\}$$

容易验证 $B_\lambda(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 是一个附有范数 $\|\cdot\|_{B_\lambda} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\phi(\xi)| e^{-\lambda \xi}$ 的一个 Banach 空间。

令 $\hat{\phi}(\xi)$ 和 $\underline{\phi}(\xi)$ 分别为式(12)和式(13)给出的上解和下解, 定义集合

$$\Gamma := \left\{ \phi \in C_{[0, K]}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \left| \begin{array}{l} \textcircled{1} \phi(\xi) \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上非减} \\ \textcircled{2} \phi(\xi) \leq \phi(\xi) \leq \hat{\phi}(\xi), \xi \in \mathbb{R} \\ \textcircled{3} |\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)| \leq \frac{K\beta}{c} |\xi_1 - \xi_2|, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R} \end{array} \right. \right\}$$

易证集合 Γ 为非空、有界、闭凸集。对于在式(8)中定义的算子 F , 有如下引理成立。

引理 6 假设 a~e 成立,

① $F(\Gamma) \subset \Gamma$;

② $F : \Gamma \rightarrow \Gamma$ 在 B_λ 中关于范数 $\|\cdot\|_{B_\lambda}$ 是全连续。

证明 根据引理 1~5, 对任意 $\phi \in \Gamma$, 有

$$\underline{\phi}(\xi) \leq F(\underline{\phi})(\xi) \leq F(\phi)(\xi) \leq F(\hat{\phi})(\xi) \leq \hat{\phi}(\xi)$$

且 $F(\phi)(\xi)$ 关于 $\phi(\xi) \in C_{[0, K]}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 是非减的, $c|F'(\phi)(\xi)| \leq \beta K$ 。因此, $F(\Gamma) \subset \Gamma$ 。

因 $f \in C^1([0, K]^2, \mathbb{R})$, 存在 $M > 0$, 满足 $|f(u_1, v_1) - f(u_2, v_2)| \leq M(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|)$, 其中 $u_i, v_i \in [0, K], i = 1, 2$ 。于是, 对 $\phi, \psi \in \Gamma$, 有

$$\begin{aligned} |H(\phi)(\xi) - H(\psi)(\xi)| &\leq d \int_{\mathbb{R}} J(y) |\phi(\xi - y) - \psi(\xi - y)| dy + \\ &M |\phi(\xi - c\tau(\phi(\xi))) - \psi(\xi - c\tau(\psi(\xi)))| + \\ &(\beta - d + M) |\phi(\xi) - \psi(\xi)| \leq \\ &e^{\lambda \xi} d \int_{\mathbb{R}} J(y) e^{-\lambda y} \|\phi - \psi\|_{B_\lambda} dy + \\ &e^{\lambda \xi} (\beta - d + M) \|\phi - \psi\|_{B_\lambda} + \\ &M |\phi(\xi - c\tau(\phi(\xi))) - \psi(\xi - c\tau(\phi(\xi)))| + \\ &M \beta K |\phi(\xi) - \psi(\xi)| \leq e^{\lambda \xi} \left[d \int_{\mathbb{R}} J(y) e^{-\lambda y} dy + \right. \\ &\left. (\beta - d + M) + M e^{-\lambda cm} + M \beta K \right] \|\phi - \psi\|_{B_\lambda} \end{aligned}$$

因此, 可得

$$\begin{aligned} |F(\phi) - F(\psi)|_{B_\lambda} &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |F(\phi)(\xi) - F(\psi)(\xi)| e^{-\lambda \xi} \leq \\ &\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{c} e^{-\frac{\beta+c\lambda}{c}\xi} \int_{-\infty}^{\xi} e^{\frac{\beta+c\lambda}{c}s} |H(\phi)(s) - H(\psi)(s)| e^{-\lambda s} ds \leq \\ &\frac{1}{\beta+c\lambda} \left[d \int_{\mathbb{R}} J(y) e^{-\lambda y} dy + (\beta-d+M) + M e^{-\lambda cm} + \right. \\ &\left. MBK \right] \|\phi - \psi\|_{B_\lambda} \end{aligned}$$

它表明 $F: \Gamma \rightarrow \Gamma$ 在 $B_\lambda(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 中关于范数 $\|\cdot\|_{B_\lambda}$ 是连续的。另一方面, 对任意 $\phi \in \Gamma$, $\xi \in \mathbb{R}$, 当 $\xi_1 \geq \xi_2$, $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ 时,

$$|F(\phi)(\xi_1) - F(\phi)(\xi_2)| \leq \frac{\beta}{c} K(\xi_1 - \xi_2)$$

这表明对于 $\xi \in \mathbb{R}$, $\{F(\phi)(\xi) : \phi \in \Gamma\}$ 是一致有界并且等度连续。因此, 通过 Arzela-Ascoli 定理, 对于在 $F(\Gamma)$ 中任意给定的序列 $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 存在 $n_k \rightarrow \infty$ 和 $\psi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 使得在 $\mathbb{R}$ 任何紧支集上 $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_{n_k}(\xi) = \psi(\xi)$ 关于 ξ 一致成立。因为, 对任意的 $\xi \in \mathbb{R}$, $\underline{\phi}(\xi) \leq \psi_{n_k}(\xi) \leq \hat{\phi}(\xi)$, 于是有 $\underline{\phi}(\xi) \leq \psi(\xi) \leq \hat{\phi}(\xi)$, 即 $\psi(\xi) \in \Gamma$ 。另外有

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} (\hat{\phi}(\xi) - \underline{\phi}(\xi)) e^{-\lambda \xi} = 0$$

因此, 对任意 $\varepsilon > 0$, 可以找到 $M_0 > 0$, 使得对任意的 $|\xi| \geq M_0$, 可得

$$|\psi_{n_k}(\xi) - \psi(\xi)| e^{-\lambda \xi} \leq (\hat{\phi}(\xi) - \underline{\phi}(\xi)) e^{-\lambda \xi} < \varepsilon$$

此外, 当 $|\xi| \leq M_0$ 时, $\lim_{k \rightarrow \infty} (\psi_{n_k}(\xi) - \psi(\xi)) e^{-\lambda \xi} = 0$ 一致存在, 于是存在 $k^* > 0$, 当 $k \geq k^*$ 时, 对任意的 $|\xi| \leq M_0$, 可得

$$|\psi_{n_k}(\xi) - \psi(\xi)| e^{-\lambda \xi} < \varepsilon$$

由此可得, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\|\psi_{n_k}(\xi) - \psi(\xi)\|_{B_\lambda} \rightarrow 0$ 。所以, $F: \Gamma \rightarrow \Gamma$ 在 B_λ 中关于范数 $\|\cdot\|_{B_\lambda}$ 全连续。

定理 1 的证明。

证明 根据引理 6 和 Schauder 不动点定理, F 存在一个不动点 $\phi \in \Gamma$ 。因 $\phi(\xi)$ 非减且有界, 所以 $l =: \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \phi(\xi) > 0$ 。由洛必达法则, 可得

$$l = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-\infty}^{\xi} e^{\frac{\beta}{c}s} H[\phi](s) ds}{c e^{\frac{\beta}{c}\xi}} = \frac{dl + (\beta - d)l + f(l, l)}{\beta}$$

因此, $f(l, l) = 0$, $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \phi(\xi) = l = K$ 。因 $\max\{0, e^{\lambda_1 \xi} - qe^{\gamma \lambda_1 \xi}\} \leq \phi(\xi) \leq \min\{K, e^{\lambda_1 \xi}\}$, $\xi \in \mathbb{R}$, 故有 $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \phi(\xi) = 0$ 和 $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} |\phi(\xi) e^{-\lambda_1 \xi} - 1| \leq \lim_{\xi \rightarrow -\infty} qe^{(\gamma-1)\lambda_1 \xi} = 0$ 。这表明

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \phi(\xi) e^{-\lambda_1 \xi} = 1 \quad (22)$$

由假设 e、式 (22) 和 $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \phi(\xi) = 0$, 易得

$$\begin{aligned} &\lim_{\xi \rightarrow -\infty} |f(\phi(\xi), \phi(\xi - c\tau(\phi(\xi)))) - \partial_1 f(0, 0) \phi(\xi) - \\ &\partial_2 f(0, 0) \phi(\xi - cm)| e^{-\lambda_1 \xi} \leq \\ &\lim_{\xi \rightarrow -\infty} |f(\phi(\xi), \phi(\xi - c\tau(\phi(\xi)))) - \partial_1 f(0, 0) \phi(\xi) - \\ &\partial_2 f(0, 0) \phi(\xi - c\tau(\phi(\xi)))| e^{-\lambda_1 \xi} \leq \\ &\lim_{\xi \rightarrow -\infty} L \{ [\phi(\xi)]^{1+\sigma_1} + [\phi(\xi - c\tau(\phi(\xi)))]^{1+\sigma_2} \} e^{-\lambda_1 \xi} = 0 \end{aligned}$$

且有

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} e^{-\lambda_1 \xi} \int_{\mathbb{R}} \phi(\xi - y) J(y) dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_1 y} J(y) dy$$

和

$$\begin{aligned} &\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \phi'(\xi) e^{-\lambda_1 \xi} = \frac{1}{c} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \{ d [J * \phi(\xi) - \phi(\xi)] + \\ &f(\phi(\xi), \phi(\xi - c\tau(\phi(\xi)))) \} e^{-\lambda_1 \xi} = \\ &\frac{1}{c} \left\{ d \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_1 y} J(y) dy - 1 \right] + \right. \\ &\left. \partial_1 f(0, 0) + \partial_2 f(0, 0) e^{-\lambda_1 cm} \right\} = \lambda_1 \end{aligned}$$

定理 1 得证。

参考文献:

- [1] AIELLO W G, FREEDMAN H I, WU J. Analysis of a model representing stage-structured population growth with state-dependent time delay[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1992, 52(3): 855–869.
- [2] AL-OMARI J F M, GOURLEY S A. Dynamics of a stage-structured population model incorporating a state-dependent maturation delay[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Application*, 2005, 6(1): 13–33.
- [3] LV Y F, YUAN R, HE Y. Wavefronts of a stage structured model with state-dependent delay[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2015, 35(10): 4931–4954.
- [4] LIN G, WANG H Y. Traveling wave solutions of a reaction-diffusion equation with state-dependent delay[J]. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2016, 15(2): 319–334.
- [5] KOLMOGOROV A N, PETROVSKII I G, PISKUNOV N S. Study of a diffusion equation that is related to the growth of a quality of matter, and its application to a biological problem[J]. *Byul Mosk Gos Univ Ser A Mat Mekh*, 1937, 1: 1–26.
- [6] LUTSCHER F, LEWIS M. Spatially-explicit matrix models: a mathematical analysis of stage-structured integrodifference equations[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2004, 48(3): 293–324.

[7] MEDLOCK J, KOT M. Spreading disease: integro-differential equations old and new[J]. [Mathematical Biosciences](#), 2003, 184(2): 201–222.

[8] WAN Y J, YU Z X, MENG Y L. Traveling waves for the nonlocal dispersal equation with state-dependent delay[J]. *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2019, 62(4): 1–18.

[9] MA S W, ZOU X F. Existence, uniqueness and stability of travelling waves in a discrete reaction-diffusion monostable equation with delay[J]. [Journal of Differential Equations](#), 2005, 217(1): 54–87.

[10] YU Z X, YUAN R. Existence and asymptotics of traveling waves for nonlocal diffusion systems[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2012, 45(11): 1361–1367.

[11] YU Z X, YUAN R. Existence, Asymptotics and Uniqueness of traveling waves for nonlocal diffusion systems with delayed nonlocal response[J]. [Taiwanese Journal of Mathematics](#), 2013, 17(6): 2163–2190.

(编辑: 丁红艺)



(上接第 5 页)

[5] ARCOYA D, GÁMEZ J L. Bifurcation theory and related problems: anti-maximum principle and resonance[J]. *Communications in Partial Differential Equations*, 2001, 26(9/10): 1879–1911.

[6] CHHETRI M, GIRG P. On the solvability of asymptotically linear systems at resonance[J]. [Journal of Mathematical Analysis and Applications](#), 2016, 442(2): 583–599.

[7] CHHETRI M, GIRG P. Asymptotically linear system of three equations near resonance[J]. [Journal of Differential Equations](#), 2016, 261(10): 5900–5922.

[8] CHHETRI M, GIRG P. Asymptotically linear systems near and at resonance[J]. [Boundary Value Problems](#), 2014, 2014(1): 242.

[9] EVANS L C. *Partial Differential Equations*[M]. 2nd ed. Providence: American Mathematical Society, 1998.

[10] GILBARG D, TRUDINGER N S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[11] 宣本金. 变分法——理论与应用[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2006.

(编辑: 石 瑛)