

高阶双曲型 Kac-Moody 代数的极小虚根

胡建华, 刘 静, 许成苏

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 根据双曲型 Kac-Moody 代数的极小虚根的基本性质, 结合双曲型 Kac-Moody 代数对应的广义 Cartan 矩阵的 Dynkin 图的特征, 给出了 $n(5 \leq n \leq 10)$ 阶双曲型 Kac-Moody 代数的全部极小虚根。

关键词: Cartan 矩阵; 双曲型; Kac-Moody 代数; 极小虚根; Dynkin 图

中图分类号: O 152 **文献标志码:** A

Minimal imaginary roots of hyperbolic Kac-Moody algebra of higher order

HU Jianhua, LIU Jing, XU Chengsu

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The basic properties of the minimal imaginary roots of the hyperbolic Kac-Moody algebra were studied. According to the character of the Dynkin diagram of the generalized Cartan matrix corresponding to the hyperbolic Kac-Moody algebra, all the minimal imaginary roots of the n -order hyperbolic type Kac-Moody algebra were listed, where $5 \leq n \leq 10$.

Keywords: Cartan matrix; hyperbolic type; Kac-Moody algebra; minimal imaginary root; Dynkin diagram

虚根是不定型 Kac-Moody 代数中的一个基本概念, 但其结构至今尚未完全弄清楚。双曲型 Kac-Moody 代数是一类特殊的不定型 Kac-Moody 代数, 文献[1]给出了所有双曲型广义 Cartan 矩阵的分类, 总共分为 10 类。双曲型 Kac-Moody 代数的虚根因具有一些特殊的性质而受到关注。文献[2-6]刻画了 Kac-Moody 代数的极小虚根的某些性质。文献[7]给出了三阶双曲型 Kac-Moody 代数的所有极小虚根。文献[8]给出了四阶双曲型 Kac-

Moody 代数的所有极小虚根。本文将在此基础上, 给出 $n(5 \leq n \leq 10)$ 阶双曲型 Kac-Moody 代数的全部极小虚根。这样所有双曲型 Kac-Moody 代数的极小虚根都被完全刻画出来。

1 重要定义及性质

现给出极小虚根的定义及极小虚根的基本性质, 本文中提到的其他相关定义及符号参见文献[8-10]。

定义 1^[2] 对于 $\lambda, \mu \in Q_+$, 规定 $\lambda < \mu \Leftrightarrow \mu - \lambda \in Q_+$ 。在此偏序下, Δ_+^{im} 中的极小元称为极小虚根, 其中, Q_+ 为正根格, Δ_+^{im} 为正虚根集。

定义 2^[2] 对 $\delta = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i \in \Delta$, $\text{supp } \delta = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} | k_i \neq 0\}$ 。 $\delta \in \Delta_+^{\text{im}}$ 称 δ 为 null 根, 如果 $[\delta, \alpha_i^\vee] = 0$, 每一个 $i \in \text{supp } \delta$, 其中, Δ 为根集。

性质 1^[3] $g(A)$ 的极小虚根的个数是有限的, $g(A)$ 是广义 Cartan 矩阵 GCM A 对应的 Kac-Moody 代数。

性质 2^[3] $\alpha \in \Delta_+^{\text{im}}$, α 是极小虚根 $\Leftrightarrow \alpha$ 是 $\Delta_+^{\text{im}} \cap (-C^\vee)$ 中的极小根。

性质 3^[3] 设 $\alpha \in \Delta_+^{\text{im}} \cap (-C^\vee)$, 并且当 $\alpha - \alpha_i \in \Delta_+$ 时, $\text{supp } (\alpha - \alpha_i)$ 是有限型图, 那么, α 必为极小虚根。

性质 4^[7] 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为广义 Cartan 矩阵, 且对每一个 $i = 1, 2, \dots, n$, 满足条件 $-\sum_{j \neq i}^n a_{ij} \geq 2$, 则

$\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \alpha \in \Delta_+^{\text{im}} \cap (-C^\vee)$ 。

性质 5^[7] 双曲型 Kac-Moody 代数 $g(A)$ 的 Dynkin 图的每个 Aff 型连通子图确定唯一一个 null 的极小虚根。

性质 6^[7] 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为双曲型广义 Cartan 矩阵, 若 Dynkin 图 $S(A)$ 中含有 $A_1^{(1)}, A_l^{(1)}, D_{l+1}^{(2)} (l \geq 2)$ 作为连通真子图, 那么, $g(A)$ 没有非 null 的极小虚根。

2 高阶双曲型 Kac-Moody 代数的极小虚根

文献[1]给出了所有双曲型 GCM 的分类, 总共有 238 类, 其中, 有 35 个严格双曲型, 双曲型 GCM 的阶不大于 10, 严格双曲型 GCM 的阶不大于 5。现给出 5~10 阶双曲型 GCM 所对应的 Kac-Moody 代数的全部极小虚根。

定理 1 五阶双曲型 Kac-Moody 代数的极小虚根如表 1 所示。

表 1 Kac-Moody 代数的极小虚根(I)

Tab.1 Minimal imaginary roots of Kac-Moody algebra(I)

代数	极小虚根	代数	极小虚根
$H_1^{(5)}$	(1, 1, 1, 1, 0)	$H_{12}^{(5)}$	(0, 1, 2, 1, 2)
$H_2^{(5)}$	(0, 1, 1, 2, 2), (1, 1, 1, 1, 0)	$H_{13}^{(5)}$	(0, 1, 2, 1, 1), (1, 2, 2, 0, 1)
$H_3^{(5)}$	(1, 1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 2, 1)	$H_{14}^{(5)}$	(0, 1, 2, 1, 1), (2, 2, 2, 0, 1)
$H_4^{(5)}$	(1, 1, 0, 1, 1)	$H_{15}^{(5)}$	(0, 1, 2, 1, 2), (1, 2, 2, 0, 2), (1, 2, 2, 1, 1)
$H_5^{(5)}$	(2, 2, 0, 1, 2), (1, 1, 1, 1, 1)	$H_{16}^{(5)}$	(1, 1, 1, 0, 1), (0, 1, 2, 1, 2)
$H_6^{(5)}$	(2, 1, 0, 1, 2), (1, 1, 1, 1, 1)	$H_{17}^{(5)}$	(0, 1, 2, 1, 1)
$H_7^{(5)}$	(1, 1, 1, 1, 1)	$H_{18}^{(5)}$	(0, 2, 2, 1, 1)
$H_8^{(5)}$	(1, 1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 1, 1)	$H_{19}^{(5)}$	(0, 1, 2, 2, 2), (1, 2, 3, 2, 1)
$H_9^{(5)}$	(1, 1, 2, 1, 0), (0, 1, 2, 1, 1), (1, 0, 2, 1, 1)	$H_{20}^{(5)}$	(0, 1, 2, 2, 1)
$H_{10}^{(5)}$	(1, 1, 2, 2, 0), (0, 1, 2, 2, 1), (1, 0, 2, 2, 1)	$H_{21}^{(5)}$	(0, 1, 1, 1, 1)
$H_{11}^{(5)}$	(0, 1, 2, 1, 1)	$H_{22}^{(5)}$	(0, 2, 2, 2, 1)

证明 五阶双曲型 GCM 共有 22 个, 它们各自对应的序号及 Dynkin 图在文献[1]中给出。其中, $H_7^{(5)}$ 是严格双曲型 GCM。 $H_1^{(5)}, H_2^{(5)}, H_3^{(5)}, H_8^{(5)}$ 的 Dynkin 图中含有 Aff 型连通真子图 $A_3^{(1)}$ 。 $H_4^{(5)}, H_{16}^{(5)}, H_{21}^{(5)}$ 的 Dynkin 图中含有 Aff 型连通真子图 $D_4^{(2)}$, 由性质 6 可知, 它们没有非 null 的极小虚根, 由性质 5 可知, 它们的 null 的极小虚根均可由其 Aff 型连通真子图唯一确定。 $H_5^{(5)}, H_6^{(5)}, H_7^{(5)}$ 的 Dynkin 图均是圈图, 它们的 Cartan 矩阵的各个元素满足性

质 4 的条件, 因此, $(1, 1, 1, 1, 1) \in \Delta_+^{\text{im}} \cap (-C^\vee)$ 。 其他的双曲型 GCM 对应的 Kac-Moody 代数的极小虚根均由其对应 Dynkin 图的 Aff 型连通真子图唯一确定。下面仅以 $H_{19}^{(5)}$ 为例计算其极小虚根。

$H_{19}^{(5)}$ 的 Dynkin 图如图 1 所示。

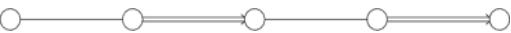


图 1 $H_{19}^{(5)}$ 的 Dynkin 图

Fig.1 Dynkin diagram of type of $H_{19}^{(5)}$

$H_{19}^{(5)}$ 的 Cartan 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$H_{19}^{(5)}$ 的四阶连通真子图中有 Aff 型 $A_4^{(2)}$, 支集为 $\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$, 由性质 5 可知, 其唯一确定一个 null 的极小虚根, 记为 $(0, 1, 2, 2, 2)$ 。 $H_{19}^{(5)}$ 的三阶和二阶连通真子图都是 Fin 型, 不存在极小虚根。

现考虑支集为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ 的虚根。设 $\alpha = \sum_{i=1}^5 k_i \alpha_i \in Q_+, k_i \neq 0$, 若 α 是极小虚根, 则有

$$\begin{cases} \langle \alpha, \alpha_1^\vee \rangle = 2k_1 - k_2 \leq 0 \\ \langle \alpha, \alpha_2^\vee \rangle = -k_1 + 2k_2 - k_3 \leq 0 \\ \langle \alpha, \alpha_3^\vee \rangle = -2k_2 + 2k_3 - k_4 \leq 0 \\ \langle \alpha, \alpha_4^\vee \rangle = -k_3 + 2k_4 - k_5 \leq 0 \\ \langle \alpha, \alpha_5^\vee \rangle = -2k_4 + 2k_5 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2k_1 \leq k_2 \\ 2k_2 \leq k_1 + k_3 \\ 2k_3 \leq 2k_2 + k_4 \\ 2k_4 \leq k_3 + k_5 \\ k_5 \leq k_4 \end{cases}$$

取 $\alpha = (1, 2, 3, 2, 1)$, 则有 $\alpha \in \Delta_+^{\text{im}} \cap (-C^\vee)$, 对 $\Delta_+^{\text{im}} \cap (-C^\vee)$ 中支集为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ 的任一根 $\alpha' = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5), \alpha' - \alpha = (k_1 - 1, k_2 - 2, k_3 - 3, k_4 - 2, k_5 - 1) \in Q_+$, 即得 $\alpha < \alpha'$, 又因为 $\alpha - \beta \notin Q_+$, 所以, α 是 $\alpha \in \Delta_+^{\text{im}} \cap (-C^\vee)$ 中的极小根, 由性质 2 可知, $\alpha = (1, 2, 3, 2, 1)$ 是 $H_{19}^{(5)}$ 对应的 Kac-Moody 代数的极小虚根。故 $H_{19}^{(5)}$ 对应的 Kac-Moody 代数的极小虚根为 $(0, 1, 2, 2, 2), (1, 2, 3, 2, 1)$, 且均是 null 的。

定理 2 六阶双曲型 Kac-Moody 代数的极小虚根如表 2 所示。

表 2 Kac-Moody 代数的极小虚根(II)
Tab.2 Minimal imaginary roots of Kac-Moody algebra(II)

代数	极小虚根	代数	极小虚根
$H_1^{(6)}$	$(1, 1, 1, 1, 1, 0)$	$H_{12}^{(6)}$	$(2, 2, 1, 2, 1, 0)$
$H_2^{(6)}$	$(2, 2, 2, 1, 1, 0), (2, 3, 1, 2, 0, 1),$ $(2, 1, 3, 0, 2, 1), (1, 2, 0, 3, 5, 6),$ $(0, 1, 1, 1, 1, 1), (2, 0, 4, 1, 3, 2)$	$H_{13}^{(6)}$	$(1, 1, 0, 1, 1, 1), (2, 2, 1, 2, 1, 0),$ $(0, 1, 1, 2, 2, 2), (2, 2, 1, 2, 1, 1)$
$H_3^{(6)}$	$(2, 2, 2, 1, 2, 0), (2, 3, 1, 2, 0, 1),$ $(2, 1, 3, 4, 0, 2), (2, 4, 0, 3, 1, 2),$ $(1, 0, 2, 1, 3, 2), (0, 2, 1, 2, 2, 2)$ $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$	$H_{14}^{(6)}$	$(2, 2, 1, 2, 1, 0), (0, 1, 1, 2, 2, 1),$ $(2, 2, 0, 2, 2, 1)$
$H_4^{(6)}$	$(1, 0, 2, 2, 3, 4), (0, 1, 1, 2, 2, 3),$ $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$	$H_{15}^{(6)}$	$(1, 2, 0, 2, 2, 1), (0, 1, 1, 2, 2, 1),$ $(1, 2, 1, 2, 1, 0)$
$H_5^{(6)}$	$(1, 1, 1, 1, 2, 0), (1, 1, 1, 0, 2, 1),$ $(1, 1, 0, 1, 2, 1), (1, 0, 1, 1, 2, 1),$ $(0, 1, 1, 1, 2, 1)$	$H_{16}^{(6)}$	$(2, 4, 3, 2, 1, 0), (0, 1, 1, 1, 1, 1)$
$H_6^{(6)}$	$(1, 1, 1, 2, 1, 0)$	$H_{17}^{(6)}$	$(2, 4, 3, 2, 1, 0), (0, 2, 2, 2, 2, 1)$
$H_7^{(6)}$	$(1, 1, 1, 2, 1, 0), (1, 1, 0, 2, 2, 2),$ $(0, 1, 1, 2, 2, 2), (1, 0, 1, 2, 2, 2)$	$H_{18}^{(6)}$	$(1, 2, 3, 2, 1, 0), (0, 1, 2, 2, 2, 2)$
$H_8^{(6)}$	$(1, 1, 1, 2, 1, 0), (1, 1, 0, 2, 2, 1),$ $(0, 1, 1, 2, 2, 1), (1, 0, 1, 2, 2, 1)$	$H_{19}^{(6)}$	$(1, 2, 3, 2, 1, 0), (0, 1, 2, 2, 2, 1)$
$H_9^{(6)}$	$(1, 1, 2, 2, 2, 0), (1, 0, 2, 3, 4, 2)$ $(0, 1, 2, 3, 4, 2)$	$H_{20}^{(6)}$	$(1, 2, 3, 2, 1, 0)$
$H_{10}^{(6)}$	$(1, 1, 2, 2, 1, 0), (1, 0, 2, 3, 2, 1),$ $(0, 1, 2, 3, 2, 1)$	$H_{21}^{(6)}$	$(2, 4, 3, 2, 1, 0)$
$H_{11}^{(6)}$	$(1, 2, 1, 2, 1, 0)$	$H_{22}^{(6)}$	$(1, 2, 3, 2, 1, 0), (0, 2, 4, 3, 2, 1)$

证明 六阶双曲型 GCM 共有 22 个, 它们各自对应的序号及 Dynkin 图在文献 [1] 中给出。 $H_1^{(6)}$ 的 Dynkin 图中含有 Aff 型连通真子图 $A_4^{(1)}$ 。 $H_2^{(6)}, H_{13}^{(6)}, H_{16}^{(6)}$ 的 Dynkin 图中含有 Aff 型连通真子图 $D_5^{(2)}$, 由性质 6 可知, 它们没有非 null 的极小虚根, 由性质 5 可知, 它们的 null 的极小虚根均可由其 Aff 型连通真子图唯一确定。 $H_3^{(6)}, H_4^{(6)}$ 的

Dynkin 图均是圈图, 它们的 Cartan 矩阵的各个元素满足性质 4 的条件, 因此, $(1, 1, 1, 1, 1, 1) \in \Delta_+^{\text{im}} \cap (-C^\vee)$ 。其他的六阶双曲型 GCM 对应的 Kac-Moody 代数的极小虚根均由其对应 Dynkin 图的 Aff 型连通真子图唯一确定。下面仅以 $H_9^{(6)}$ 为例计算其极小虚根。

$H_9^{(6)}$ 的 Dynkin 图如图 2 所示。

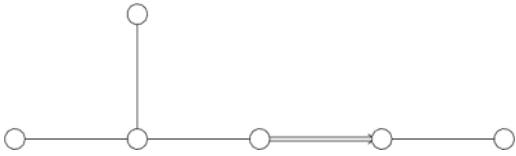


图2 $H_9^{(6)}$ 的 Dynkin 图

Fig.2 Dynkin diagram of type of $H_9^{(6)}$

$H_9^{(6)}$ 的 Cartan 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$H_9^{(6)}$ 的五阶连通真子图中有 Aff 型 $B_4^{(1)}$, 支集为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$, 还有 2 个 Aff 型 $F_4^{(1)}$, 支集分别为 $\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$, $\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$, 由性质 5 可知, 它们分别唯一确定一个 null 的极小虚根, 记为 $\beta_1=(1, 1, 2, 2, 2, 0), \beta_2=(1, 0, 2, 3, 4, 2), \beta_3=(0, 1, 2, 3, 4, 2)$ 。 $H_9^{(6)}$ 的四阶、三阶及二阶连通真子图均是 Fin 型, 不存在极小虚根。

考虑支集为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ 的极小虚根。设 $\alpha = \sum_{i=1}^6 k_i \alpha_i \in Q_+, k_i \neq 0$, 若 α 是极小虚根, 则有

$$\begin{cases} \langle \alpha, \alpha_1^\vee \rangle = 2k_1 - k_3 \leq 0 \\ \langle \alpha, \alpha_2^\vee \rangle = 2k_2 - k_3 \leq 0 \\ \langle \alpha, \alpha_3^\vee \rangle = -k_1 - k_2 + 2k_3 - k_4 \leq 0 \\ \langle \alpha, \alpha_4^\vee \rangle = -k_3 + 2k_4 - k_5 \leq 0 \\ \langle \alpha, \alpha_5^\vee \rangle = -2k_4 + 2k_5 - k_6 \leq 0 \\ \langle \alpha, \alpha_6^\vee \rangle = -k_5 + 2k_6 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2k_1 \leq k_3 \\ 2k_2 \leq k_3 \\ 2k_3 \leq k_1 + k_2 + k_4 \\ 2k_4 \leq k_3 + k_5 \\ 2k_5 \leq k_4 + k_6 \\ 2k_6 \leq k_5 \end{cases}$$

取 $\alpha=(1, 1, 2, 2, 2, 1)$, 有 $\alpha \in \Delta_+^{\text{im}} \cap (-C^\vee)$, 对 $\Delta_+^{\text{im}} \cap (-C^\vee)$ 中支集为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ 的任一根 $\alpha'=(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6)$, $\alpha' - \alpha=(k_1 - 1, k_2 - 1, k_3 - 2, k_4 - 2, k_5 - 2, k_6 - 1) \in Q_+ \Rightarrow \alpha < \alpha'$, 但 $\alpha - \beta_1 \in Q_+$, 故 α 不是 $H_9^{(6)}$ 对应的 Kac-Moody 代数的极小虚根。故 $H_9^{(6)}$ 对应的 Kac-Moody 代数的极小虚根为 $(1, 1, 2, 2, 2, 0), (1, 0, 2, 3, 4, 2), (0, 1, 2, 3, 4, 2)$, 且都是 null 的。

定理 3 七阶双曲型 Kac-Moody 代数的极小虚根如表 3 所示。

表 3 Kac-Moody 代数的极小虚根(Ⅲ)

Tab.3 Minimal imaginary roots of Kac-Moody algebra(Ⅲ)

代数	极小虚根	代数	极小虚根
$H_1^{(7)}$	$(0, 1, 1, 2, 1, 2, 1)$	$H_3^{(7)}$	$(0, 1, 1, 2, 2, 2, 1)$
$H_2^{(7)}$	$(0, 1, 1, 2, 2, 2, 2)$	$H_4^{(7)}$	$(1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)$

证明 七阶双曲型 GCM 共有 4 个, 其中, $H_4^{(7)}$ 的 Dynkin 图中含有 Aff 型连通真子图 $A_5^{(1)}$, 因而由性质 6 可知, 它没有非 null 的极小虚根。剩下的 3 个七阶双曲型 GCM 对应的 Kac-Moody 代数的极小虚根均由其对应的 Dynkin 图的 Aff 型连通真子图唯一确定。下面仅以 $H_1^{(7)}$ 为例计算其极小虚根。

$H_1^{(7)}$ 的 Dynkin 图如图 3 所示。

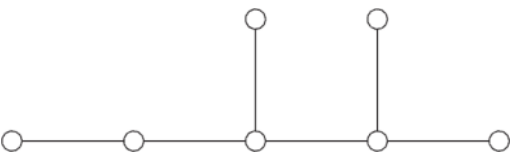


图3 $H_1^{(7)}$ 的 Dynkin 图

Fig.3 Dynkin diagram of type of $H_1^{(7)}$

$H_1^{(7)}$ 的 Cartan 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$H_1^{(7)}$ 的六阶真子图中有 Aff 型 $D_4^{(1)}$, 支集为 $\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$, 由性质 5 可知, 它唯一确定一个 null 的极小虚根, 记为 $\beta=(0, 1, 1, 2, 1, 2, 1)$ 。 $H_1^{(7)}$ 的低于六阶的真子图均为 Fin 型, 不存在极小虚根。

现考虑支集为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$ 的虚根。设 $\alpha = \sum_{i=1}^7 k_i \alpha_i \in Q_+, k_i \neq 0$, 若 α 是极小虚根, 则有

$$\begin{cases} \langle \alpha, \alpha_1^\vee \rangle = 2k_1 - k_2 \leq 0 \\ \langle \alpha, \alpha_2^\vee \rangle = -k_1 + 2k_2 - k_4 \leq 0 \\ \langle \alpha, \alpha_3^\vee \rangle = 2k_3 - k_4 \leq 0 \\ \langle \alpha, \alpha_4^\vee \rangle = -k_2 - k_3 + 2k_4 - k_6 \leq 0 \\ \langle \alpha, \alpha_5^\vee \rangle = 2k_5 - k_6 \leq 0 \\ \langle \alpha, \alpha_6^\vee \rangle = -k_4 - k_5 + 2k_6 - k_7 \leq 0 \\ \langle \alpha, \alpha_7^\vee \rangle = -k_6 + 2k_7 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2k_1 \leq k_2, \\ 2k_2 \leq k_1 + k_4, \\ 2k_3 \leq k_4, \\ 2k_4 \leq k_2 + k_3 + k_6 \\ 2k_5 \leq k_6, \\ 2k_6 \leq k_4 + k_5 + k_7 \\ 2k_7 \leq k_6 \end{cases}$$

取 $\alpha=(1, 2, 2, 4, 2, 4, 2)$, $\alpha \in \Delta_+^{\text{im}} \cap (-C^\vee)$, 对 $\Delta_+^{\text{im}} \cap (-C^\vee)$ 中支集为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7\}$ 的根 $\alpha'=(k_1, \dots, k_7)$, $\alpha' - \alpha=(k_1 - 1, k_2 - 2, k_3 - 2, k_4 - 4, k_5 - 2, k_6 - 4, k_7 - 2) \in Q_+ \Rightarrow \alpha < \alpha'$ 。但 $\alpha - \beta \in Q_+$, 故 α 不是 $H_1^{(7)}$ 对应的 Kac-Moody 代数的极小虚根。故 $H_1^{(7)}$ 对应的 Kac-Moody 代数的极小虚根为 $(0, 1, 1, 2, 1, 2, 1)$, 且是 null 的。

定理 4 八阶双曲型 Kac-Moody 代数的极小虚根如表 4 所示。

表 4 Kac-Moody 代数的极小虚根(IV)
Tab.4 Minimal imaginary roots of Kac-Moody algebra(IV)

代数	极小虚根	代数	极小虚根
$H_1^{(8)}$	(0, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1)	$H_4^{(8)}$	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)
$H_2^{(8)}$	(0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2)	$H_5^{(8)}$	(0, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1)
$H_3^{(8)}$	(0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1)		

定理 5 九阶双曲型 Kac-Moody 代数的极小虚根如表 5 所示。

表 5 Kac-Moody 代数的极小虚根(V)
Tab.5 Minimal imaginary roots of Kac-Moody algebra(V)

代数	极小虚根	代数	极小虚根
$H_1^{(9)}$	(1, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 1, 0)	$H_4^{(9)}$	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)
$H_2^{(9)}$	(0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2)	$H_5^{(9)}$	(0, 1, 2, 3, 2, 4, 3, 2, 1)
$H_3^{(9)}$	(0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1)		

定理 6 十阶双曲型 Kac-Moody 代数的极小虚根如表 6 所示。

表 6 Kac-Moody 代数的极小虚根(VI)
Tab.6 Minimal imaginary roots of Kac-Moody algebra(VI)

代数	极小虚根	代数	极小虚根
$H_1^{(10)}$	(2, 4, 3, 6, 5, 4, 3, 0, 2, 1), (2, 4, 3, 6, 5, 4, 3, 1, 2, 0), (0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 1)	$H_3^{(10)}$	(0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1), (2, 4, 3, 6, 5, 4, 3, 0, 2, 1)
$H_2^{(10)}$	(2, 4, 3, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0), (0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)	$H_4^{(10)}$	(0, 1, 2, 3, 4, 5, 3, 6, 4, 2)

定理 4~6 的证明过程与定理 1~3 的证明过程类似, 这里不再证明。

至此, $n(5 \leq n \leq 10)$ 阶双曲型 Kac-Moody 代数的极小虚根已经全部给出, 再结合文献[5, 7-8], 双曲型 Kac-Moody 代数的极小虚根就全部给出了。

参考文献:

[1] LI W L. Classification of generalized Cartan matrices of hyperbolic type[J]. Chinese Annals of Mathematics B, 1988, 9(1): 68-78.

[2] 张贺春. 关于虚根的几个注记[J]. 科学通报, 1994, 39(4): 295-297.

[3] 张贺春. Kac-Moody 代数的虚根系[J]. 数学学报, 1990, 33(1): 1-6.

[4] 吴永, 任斌, 朱林生. 广义 Kac-Moody 代数的虚根[J]. 数学年刊, 1993, 14A(1): 128-133.

[5] 卢才辉. 不定型 Kac-Moody 代数的极小虚根[J]. 北京师范学院学报(自然科学版), 1992, 13(1): 1-7.

[6] 李振亨. 关于 Kac-Moody 代数的虚根的注记[J]. 河北大学学报(自然科学版), 1994, 14(2): 60-63.

[7] 朱林生. 双曲型李代数的极小虚根[J]. 首都师范大学学报(自然科学版), 1993, 14(2): 32-36.

[8] 许成苏, 胡建华. 四阶双曲型 Kac-Moody 代数的极小虚根[J]. 上海理工大学学报, 2013, 35(6): 531-535.

[9] 万哲先, 卢才辉. Kac-Moody 代数简介[J]. 北京师范学院学报(自然科学版), 1988, 9(1): 1-12.

[10] 万哲先. Kac-Moody 代数导引[M]. 北京: 科学出版社, 1993.

(编辑: 石 瑛)