

亚纯函数微分多项式分担多项式的唯一性

张伟杰, 王新利

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 研究了亚纯函数的微分多项式 $f^n f'$ 和 $g^n g'$ IM 分担一个多项式 $P(z)$ 的唯一性问题, 证明了当 $n > 22$ 且多项式 $P(z)$ 的次数小于等于 n 时, 则 $f(z) = tg(z)$, 或者 $f(z) = \lambda_1 e^{\lambda \int P(z) dz}$, $g(z) = \lambda_2 e^{-\lambda \int P(z) dz}$, 其中, $t, \lambda_1, \lambda_2, \lambda$ 为常数。

关键词: 微分多项式; 唯一性; 亚纯函数; 分担多项式

中图分类号: O 174.52 **文献标志码:** A

Uniqueness of differential polynomials of meromorphic functions sharing a polynomial

ZHANG Weijie, WANG Xinli

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The uniqueness of differential polynomials of meromorphic functions $f^n f'$ and $g^n g'$ IM sharing a polynomial $P(z)$ was studied. If $n > 22$ and the degree of $P(z)$ is not more than n , then $f(z) = tg(z)$, or $f(z) = \lambda_1 e^{\lambda \int P(z) dz}$, $g(z) = \lambda_2 e^{-\lambda \int P(z) dz}$, where $t, \lambda_1, \lambda_2, \lambda$ are constants.

Keywords: differential polynomial; uniqueness; meromorphic function; sharing a polynomial

1 主要定理

本文提到的亚纯函数即复平面上的亚纯函数, 使用 Nevanlinna 值分布论中的基本记号^[1-3], 如 $T(r, f)$, $N(r, f)$, $m(r, f)$ 等。对于非常数的亚纯函数, 一般用 $S(r, f)$ 表示满足 $S(r, f) = o(T(r, f)) (r \rightarrow \infty, r \notin E)$ 的量, 其中, $\text{mes } E < +\infty$ 。

设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为超越亚纯函数, $P(z)$ 为一不恒为零的多项式, 如果 $f - P$ 和 $g - P$ 的零点相同 (零点重数不计), 则称 f 和 g IM 分担 P ; 如果 $f - P$ 和

$g - P$ 的零点相同, 且每个零点的重数也相同, 则称 f 和 g CM 分担 P 。

设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为非常数亚纯函数, $a \in C \cup \{\infty\}$, k 为正整数, 定义 $N_{(k)}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ 表示零点重数不小于 k 的 f 的 a 值点的密指量, $\bar{N}_{(k)}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ 表示相应的精简密指量; 设 $f - a$ 和 $g - a$ 的公共零点重数分别为 p 和 q , $\bar{N}_L\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ 表示 $f - a$ 和 $g - a$ 的公共零点中满足 $p > q \geq 1$ 的零点的精简密指量; $\bar{N}_{g>k}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ 表

收稿日期: 2019-04-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11771090)

第一作者: 张伟杰 (1993-), 女, 硕士研究生。研究方向: 复分析。E-mail: 1649954107@qq.com

通信作者: 王新利 (1975-), 女, 讲师。研究方向: 复分析。E-mail: xlwang@usst.edu.cn

示 $f-a$ 和 $g-a$ 的相同零点中满足 $q > p = k$ 的零点的精简密指量。

$$\begin{aligned} &\text{同样, 可定义 } N_k\left(r, \frac{1}{g-a}\right), \bar{N}_k\left(r, \frac{1}{g-a}\right), \\ &\bar{N}_L\left(r, \frac{1}{g-a}\right), \bar{N}_{f>k}\left(r, \frac{1}{g-a}\right). \\ &N_k\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \bar{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + \bar{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + \cdots + \\ &\quad \bar{N}_{(k)}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} \delta_k(a, f) &= 1 - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N_k\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)} \\ \theta(a, f) &= 1 - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\bar{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)} \end{aligned}$$

1996 年, Fang 等^[4]研究了整函数分担一个非零常数的问题, 得到了定理 1。

定理 1 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为非常数整函数, $n \geq 6$ 且为正整数。如果 $f^n f'$ 和 $g^n g'$ 分担 1 CM, 则 $f^n f' g^n g' = 1$, 或者, 有 $f(z) = tg(z)$, 其中, t 为常数, 且 $t^{n+1} = 1$ 。

1997 年, 在 Fang 等^[4]研究的基础上, Yang 等^[5]进一步研究了非常数亚纯函数分担一个值的问题, 提出了定理 2。

定理 2 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为非常数亚纯函数, $n \geq 11$ 且为正整数。如果 $f^n f'$ 和 $g^n g'$ 分担 a CM, 其中, $a \in C - \{0\}$, 则 $f(z) = c_1 e^{cz}$, $g(z) = c_2 e^{-cz}$, c_1, c_2, c 为常数, 且满足 $(c_1 c_2)^{n+1} c^2 = -a^2$, 或者, $f(z) = tg(z)$, 其中, t 为常数, 且 $t^{n+1} = 1$ 。

2000 年, Fang 等^[6]将分担一个“值”推广到分担“ z ”, 证明了定理 3。

定理 3 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为非常数亚纯函数, $n \geq 11$ 且为正整数, 如果 $f^n f'$ 和 $g^n g'$ 分担 z CM, 则 $f(z) = c_1 e^{cz^2}$, $g(z) = c_2 e^{-cz^2}$, 其中, c_1, c_2, c 为有限非零复常数, 且满足 $4(c_1 c_2)^{n+1} c^2 = -1$, 或者, $f(z) = tg(z)$, 其中, t 为常数, 且 $t^{n+1} = 1$ 。

2011 年, Qiu^[7]将分担“ z ”推广到了分担一个多项式, 得到了定理 4。

定理 4 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为超越亚纯函数, n 为正整数, 且满足 $n \geq \max\{11, k+1\}$ 。 P 是一次数为 k 的多项式, 如果 $f^n f'$ 和 $g^n g'$ 分担 P CM, 则有 $f(z) = tg(z)$, 其中, $t^{n+1} = 1$, 或者, $f(z) = c_1 e^{\int P(z) dz}$, $g(z) = c_1 e^{-\int P(z) dz}$, 且满足 $(c_1 c_2)^{n+1} c^2 = -1$, 其中, $c_1,$

c_2, c 为常数。

本文将定理 4 的条件“CM 分担”改为“IM 分担”进行了研究, 即下面的定理 5。

定理 5 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为超越亚纯函数, $n > 22$ 且为正整数, 如果 $f^n f'$ 和 $g^n g'$ 分担 P IM, P 为非零多项式, 且 $\deg(P) = \gamma \leq n$, 则 $f(z) = \lambda_1 e^{\lambda \int P(z) dz}$, $g(z) = \lambda_2 e^{-\lambda \int P(z) dz}$, 其中, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$ 为常数, 且满足 $(\lambda_1 \lambda_2)^{n+1} \lambda^2 = -1$, 或者, $f(z) = tg(z)$, 其中, t 为常数, 且 $t^{n+1} = 1$ 。

2 引理

引理 1^[1] 设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数, k 为正整数, α 为 $f(z)$ 的小函数, 则

$$\begin{aligned} T(r, f) &\leq \bar{N}(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - \alpha}\right) - \\ &\quad N\left(r, \frac{1}{(f^{(k)}/\alpha)'}\right) + S(r, f) \leq \\ &\quad \bar{N}(r, f) + N_{k+1}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - \alpha}\right) - \\ &\quad N_0\left(r, \frac{1}{(f^{(k)}/\alpha)'}\right) + S(r, f) \end{aligned}$$

引理 2^[3] 设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数, k 为正整数, 则

$$N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{f}\right) + k\bar{N}(r, f) + S(r, f)$$

引理 3^[8] 设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数, k, p 为正整数, 则

$$N_p\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) \leq N_{p+k}\left(r, \frac{1}{f}\right) + k\bar{N}(r, f) + S(r, f)$$

引理 4^[9] 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为非常数亚纯函数, 如果 f 和 g 分担 1 IM, 则

$$\begin{aligned} N_{f>1}\left(r, \frac{1}{g-1}\right) &\leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}(r, f) - N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r, f) \\ N_{g>1}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) &\leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \bar{N}(r, g) - N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right) + S(r, g) \end{aligned}$$

引理 5 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为非常数亚纯函数, k 为正整数, P 为一非零多项式。令 $F = \frac{f^{(k)}}{P}$, $G = \frac{g^{(k)}}{P}$, 则 $S(r, f) = S(r, F)$, $S(r, g) = S(r, G)$ 。

证明 由 $F = \frac{f^{(k)}}{P}$ 可得

$$T(r, F) \leq T\left(r, \frac{1}{P}\right) + T(r, f^{(k)}) \leq \\ (k+1)T(r, f) + O(\log r) + S(r, f)$$

$$T(r, f^{(k)}) \leq T(r, F) + T(r, P)$$

$$T(r, F) \geq (k+1)T(r, f) - O(\log r) + S(r, f)$$

所以, $T(r, f) = O(T(r, F))$, 即 $S(r, f) = S(r, F)$ 。

同理, $S(r, g) = S(r, G)$ 。用同样的方法可得 $S(r, f) = S(r, F')$, $S(r, g) = S(r, G')$ 。

引理 6 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为非常数亚纯函数, k 为正整数, P 为一非零多项式。如果 $f^{(k)}$ 和 $g^{(k)}$ 分担 PIM , 且满足

$$\Delta = (2k+4)\Theta(\infty, g) + (2k+3)\Theta(\infty, f) + \delta_{k+1}(0, f) + \\ 2\delta_{k+1}(0, g) + \delta_{k+2}(0, f) + \delta_{k+2}(0, g) > 4k+11$$

则

$$\frac{P}{f^{(k)} - P} = \frac{bg^{(k)} + (a-b)P}{g^{(k)} - P}$$

其中, $a \neq 0$, b 为常数。

证明 令

$$F = \frac{f^{(k)}}{P}, \quad G = \frac{g^{(k)}}{P} \quad (1)$$

$$H = \frac{F''}{F'} - 2\frac{F'}{F-1} - \frac{G''}{G'} + 2\frac{G'}{G-1} \quad (2)$$

由式(2)与引理 5 可得

$$m(r, H) = S(r, f) + S(r, g) \quad (3)$$

因为, $f^{(k)}$ 和 $g^{(k)}$ 分担 PIM , 则 F, G 分担 $1IM$ 。现分两种情况讨论。

情形 1 假设 $H \not\equiv 0$, 设 z_0 为 $f^{(k)} - P$ 和 $g^{(k)} - P$ 的公共单零点但不是 $P(z)$ 的零点, 由式(1)可知, z_0 为 $F-1$ 和 $G-1$ 的公共单零点。由式(2)可知, H 在 z_0 处解析, 且 $H(z_0) = 0$, 又 F 和 G 分担 $1IM$, 故结合式(3), 可得

$$N_{11}\left(r, \frac{1}{F-1}\right) = N_{11}\left(r, \frac{1}{G-1}\right) \leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{H}\right) + O(1) \leq \\ N(r, H) + S(r, f) + S(r, g) \quad (4)$$

由式(2)可知, H 的极点可能来自于 $F-1$ 和 $G-1$ 的零点重数不同的零点, F 和 G 的极点, F' 和 G' 的零点, 且 H 的每个极点都为单极点, 因此, $N(r, H) \leq \bar{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{F}\right) + \bar{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{G}\right) + N_0\left(r, \frac{1}{F'}\right) + N_0\left(r, \frac{1}{G'}\right) +$

$$\bar{N}_L\left(r, \frac{1}{F-1}\right) + \bar{N}_L\left(r, \frac{1}{G-1}\right) + \bar{N}(r, f) + \bar{N}(r, g) \quad (5)$$

其中, $N_0\left(r, \frac{1}{F'}\right)$ 是满足 $F' = 0$ 且 $F(F-1) \neq 0$ 的点的

密指量函数。由引理 1 可得

$$T(r, g) \leq \bar{N}(r, g) + N_{k+1}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{G-1}\right) - \\ N_0\left(r, \frac{1}{G'}\right) + O(\log r) + S(r, g) \quad (6)$$

又

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{G-1}\right) = \bar{N}\left(r, \frac{1}{F-1}\right) = N_{11}\left(r, \frac{1}{G-1}\right) + \\ \bar{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{F-1}\right) + \bar{N}_{G>1}\left(r, \frac{1}{F-1}\right) \quad (7)$$

结合式(4)~(7), 可得

$$T(r, g) \leq \bar{N}(r, f) + 2\bar{N}(r, g) + N_{k+1}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \bar{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{F}\right) + \\ \bar{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{G}\right) + N_0\left(r, \frac{1}{F'}\right) + \bar{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{F-1}\right) + \\ \bar{N}_L\left(r, \frac{1}{F-1}\right) + \bar{N}_L\left(r, \frac{1}{G-1}\right) + \\ \bar{N}_{G>1}\left(r, \frac{1}{F-1}\right) + S(r, f) + S(r, g) \quad (8)$$

由 $N_0\left(r, \frac{1}{F'}\right)$ 的定义、引理 2 和引理 3 可得

$$N_0\left(r, \frac{1}{F'}\right) + \bar{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{F-1}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{F'}\right) + \\ \bar{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{F}\right) - N_{(2)}\left(r, \frac{1}{F}\right) \leq \\ N\left(r, \frac{1}{F}\right) + \bar{N}(r, F) + \bar{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{F}\right) - N_{(2)}\left(r, \frac{1}{F}\right) + \\ S(r, F) \leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{F}\right) + \bar{N}(r, f) + S(r, f) \leq \\ N_{k+1}\left(r, \frac{1}{f}\right) + k\bar{N}(r, f) + \bar{N}(r, f) + O(\log r) + \\ S(r, f) \leq N_{k+1}\left(r, \frac{1}{f}\right) + (k+1)\bar{N}(r, f) + S(r, f) \quad (9)$$

$$\bar{N}_L\left(r, \frac{1}{F-1}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{F-1}\right) - \bar{N}\left(r, \frac{1}{F-1}\right) \leq \\ N\left(r, \frac{F}{F'}\right) \leq N\left(r, \frac{F'}{F}\right) + S(r, f) \leq \\ \bar{N}\left(r, \frac{1}{F}\right) + \bar{N}(r, f) + S(r, f) \leq \\ N_{k+1}\left(r, \frac{1}{f}\right) + (k+1)\bar{N}(r, f) + S(r, f) \quad (10)$$

同理, 可得

$$\bar{N}_L\left(r, \frac{1}{G-1}\right) \leq N_{k+1}\left(r, \frac{1}{g}\right) + (k+1)\bar{N}(r, g) + S(r, g)$$

由引理 4 可得

$$\begin{aligned} \overline{N}_{G>1}\left(r, \frac{1}{F-1}\right) &= \overline{N}\left(r, \frac{1}{G}\right) + \overline{N}(r, g) - \\ &N_0\left(r, \frac{1}{G'}\right) + S(r, g) \leq N_{k+1}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \\ &(k+1)\overline{N}(r, g) - N_0\left(r, \frac{1}{G'}\right) + S(r, g) \end{aligned} \quad (11)$$

由式(8)~(11)可得

$$\begin{aligned} T(r, g) &\leq (2k+4)\overline{N}(r, g) + (2k+3)\overline{N}(r, f) + \\ &N_{k+2}\left(r, \frac{1}{g}\right) + N_{k+2}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N_{k+1}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \\ &2N_{k+1}\left(r, \frac{1}{g}\right) + S(r, f) + S(r, g) \end{aligned} \quad (12)$$

假设存在一个无限测度集 I , 使得当 $r \in I$ 时, 有 $T(r, f) \leq T(r, g)$, 由式(12)可得 $\forall \varepsilon, 0 < \varepsilon < \Delta - (4k+11)$, 当 r 充分大且 $r \in I$ 时, 有

$$\begin{aligned} T(r, g) &\leq \{(2k+4)[1 - \Theta(\infty, g)] + (2k+3)[1 - \Theta(\infty, f)] + \\ &[1 - \delta_{k+2}(0, g)] + [1 - \delta_{k+2}(0, g)] + [1 - \delta_{k+1}(0, f)] + \\ &2[1 - \delta_{k+1}(0, g)] + \varepsilon\}T(r, g) + S(r, g) \leq \\ &(4k+12 - \Delta + \varepsilon)T(r, g) + S(r, g) \end{aligned}$$

与 $\Delta > 4k+11$ 矛盾, 故 $H \equiv 0$ 。

情形 2 当 $H \equiv 0$ 时, 可得

$$\frac{F''}{F'} - 2\frac{F'}{F-1} \equiv \frac{G''}{G'} - 2\frac{G'}{G-1}$$

对上式积分, 可得

$$\frac{P}{f^{(k)} - P} = \frac{bg^{(k)} + (a-b)P}{g^{(k)} - P}$$

其中, a, b 为常数。

引理 6 得证。

引理 7^[10] 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为非常数亚纯函数, $n \geq 11$ 且为正整数, C 为非零常数, 如果 $f^n f' g^n g' = C^2$, 则 $f(z) = \lambda_1 e^{\lambda z}$, $g(z) = \lambda_2 e^{-\lambda z}$, 其中, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$ 为常数, 且满足 $(\lambda_1 \lambda_2)^{n+1} \lambda^2 = -1$ 。

引理 8^[11] 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为超越亚纯函数, n 为正整数, 且满足 $n \geq 2$, P 为非常数多项式, 且 $\deg(P) = \gamma \leq n$, 如果 $f^n f' g^n g' = P^2$, 则 $f(z) = \lambda_1 e^{\lambda \int P(z) dz}$, $g(z) = \lambda_2 e^{-\lambda \int P(z) dz}$, 其中, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$ 为常数, 且满足 $(\lambda_1 \lambda_2)^{n+1} \lambda^2 = -1$, 或者, $f(z) = tg(z)$, 其中, t 为常数, 且 $t^{n+1} = 1$ 。

3 定理 5 的证明

令 $U = \frac{f^{n+1}}{n+1}$, $V = \frac{g^{n+1}}{n+1}$, 因为, $f^n f'$ 和 $g^n g'$ 分担 P IM, 则 U' 和 V' 分担 P IM。

$$\Theta(\infty, U) = 1 - \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\overline{N}(r, U)}{T(r, U)} \geq 1 - \frac{\overline{N}(r, f)}{(n+1)T(r, f)} \geq \frac{n}{n+1}$$

$$\delta_2(0, U) = 1 - \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N_2\left(r, \frac{1}{U}\right)}{T(r, U)} \geq 1 - \frac{2\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{(n+1)T(r, f)} \geq \frac{n-1}{n+1}$$

$$\delta_3(0, U) = 1 - \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N_3\left(r, \frac{1}{U}\right)}{T(r, U)} \geq 1 - \frac{3\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{(n+1)T(r, f)} \geq \frac{n-2}{n+1}$$

同理,

$$\Theta(\infty, V) \geq \frac{n}{n+1}, \delta_2(0, V) \geq \frac{n-1}{n+1}, \delta_3(0, V) \geq \frac{n-2}{n+1}$$

则

$$\begin{aligned} \Delta &= 6\Theta(\infty, U) + 5\Theta(\infty, V) + \delta_3(0, V) + \delta_3(0, U) + \\ &\delta_2(0, U) + 2\delta_2(0, V) \geq 16 - \frac{23}{n+1} \end{aligned}$$

由条件 $n > 22$, 则 $\Delta > 15$, 由引理 6 可得

$$\frac{P}{U' - P} = \frac{bV' + (a-b)P}{V' - P} \quad (13)$$

其中, a, b 为常数。

假设存在一无限测度集 I , 使得当 $r \in I$ 时, 有 $T(r, f) \leq T(r, g)$, 现分 3 种情况来讨论。

情形 1 当 $b \neq 0$, 且 $a = b$ 时。

a. 如果 $b = -1$, 则由式(13)可得, $U'V' = P^2$, 即 $f^n f' g^n g' \equiv P^2$ 。由引理 7 和引理 8 可知, $f(z) = \lambda_1 e^{\lambda \int P(z) dz}$, $g(z) = \lambda_2 e^{-\lambda \int P(z) dz}$, 且满足 $(\lambda_1 \lambda_2)^{n+1} \lambda^2 = -1$, 其中, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$ 为非零常数, 或者, $f(z) = tg(z)$, 其中, t 为常数, 且满足 $t^{n+1} = 1$ 。

b. 如果 $b \neq -1$, 则由式(13)可得

$$U' = \frac{(1+b)P\left(V' - \frac{P}{1+b}\right)}{bV'} \quad (14)$$

由式(14)可得

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{V' - \frac{P}{b+1}}\right) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{U'}\right) \quad (15)$$

结合式(13)、式(15)和引理 2, 可得

$$(n+1)T(r, g) = T(r, V) \leq \overline{N}(r, V) + N_2\left(r, \frac{1}{V}\right) +$$

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{V' - \frac{P}{b+1}}\right) - N_0\left(r, \frac{1}{V''_1}\right) + S(r, g) \leq$$

$$\overline{N}(r, g) + N_2\left(r, \frac{1}{V}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{U'}\right) + S(r, g) \leq$$

$$\overline{N}(r, g) + N_2\left(r, \frac{1}{g}\right) + \overline{N}(r, f) + N_2\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f) + S(r, g)$$

因为, $n > 22$, 可得矛盾。因此, 情形 1 的 b 不成立。

情形 2 当 $b \neq 0$, 且 $a \neq b$ 时。

a. 如果 $b = -1$, 显然 $a \neq 0$, 则由式(13)可得

$$\frac{U'}{P} = \frac{a}{a+1-\frac{V'}{P}} \tag{16}$$

由式(16)可得

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{\frac{V'}{P} - (a+1)}\right) = \overline{N}(r, f) + O(\log r) \tag{17}$$

与情形 1 的 b 中的讨论类似, 可得矛盾。

b. 如果 $b \neq -1$, 则由式(13)可得

$$\frac{U'}{P} - \left(1 + \frac{1}{b}\right) = \frac{-a}{b^2\left(\frac{V'}{P} + \frac{a-b}{b}\right)} \tag{18}$$

由式(18)可得

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{\frac{V'}{P} + \frac{a-b}{b}}\right) = \overline{N}\left(r, \frac{U'}{P} - \left(1 + \frac{1}{b}\right)\right) = \overline{N}(r, f) + O(\log r)$$

与情形 1 的 b 中的讨论类似, 可得矛盾。因此, 情形 2 不成立。

情形 3 当 $b = 0$ 时。

由式(13)可得

$$V = aU + (1-a)p_1(z) \tag{19}$$

这里 $p_1(z)$ 是一个多项式, 且满足 $T(r, f) = T(r, g) + S(r, f)$, 假设 $a \neq 1$, 由式(19)和第二基本定理可得

$$\begin{aligned} (n+1)T(r, g) &= T(r, V) \leq \overline{N}(r, V) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{V}\right) + \\ &\overline{N}\left(r, \frac{1}{V - (1-a)p_1(z)}\right) + S(r, g) \leq \\ &\overline{N}(r, g) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, g) \end{aligned} \tag{20}$$

与情形 1 的 b 中的讨论类似, 可得矛盾, 故假设

不成立, 即 $a = 1$ 。因此, $U = V$, 即

$$f = tg, \quad t^{n+1} = 1$$

定理 5 证毕。

参考文献:

[1] YI H X, YANG C C. Uniqueness theory of meromorphic functions[M]. Beijing: Science Press, 1995: 1-28.

[2] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982: 8-33.

[3] HAYMAN W K. Meromorphic functions[M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[4] FANG M L, HUA X H. Entire functions that share one value[J]. Journal of Nanjing University Mathematics Biquarterly, 1996, 13(1): 44-48.

[5] YANG C C, HUA X H. Uniqueness and value-sharing of meromorphic functions[J]. Annales Academiae Scientiarum Fennicae-Mathematica, 1997, 22(2): 395-406.

[6] FANG M L, QIU H L. Meromorphic functions that share fixed-points[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002, 268(2): 426-439.

[7] QIU H L. Further results of meromorphic functions that share a polynomial[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2011, 26(3): 448-452.

[8] LAHIRI I, SARKAR A. Uniqueness of a meromorphic function and its derivative[J]. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 2004, 5(1): 20-21.

[9] BANERJEE A. Meromorphic functions sharing one value[J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2005, 2005(22): 3587-3598.

[10] BHOOSNURMATH S S, DYAVANAL R S. Uniqueness and value-sharing of meromorphic functions[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2007, 53(8): 1191-1205.

[11] 高灵. 非线性微分多项式分担非零多项式和分担公共值的亚纯函数的唯一性[D]. 青岛: 中国海洋大学, 2010.

(编辑: 石 瑛)