

三维实李代数的分类

胡建华, 栗菲菲, 刘静

(上海理工大学理学院, 上海 200093)

摘要: 根据李代数的导代数的性质及同构条件完成三维实李代数的分类。当导代数维数为 0 和 1 时, 由李括号运算的性质及基的变换可将李代数分为三类: $L(3,0)$, $L(3,-1)$, $L(3,1)$ 。当导代数维数为 2 和 3 时, 根据内导子对应矩阵特征值的性质可将李代数分为五类: $L(3,2,a)$, $L(3,3)$, $L(3,4,c)$, $L(3,5)$, $L(3,6)$ 。

关键词: 李代数; 导代数; 同构

中图分类号: O 152 **文献标志码:** A

Classification of three-dimensional real Lie algebra

HU Jianhua, LI Feifei, LIU Jing

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The classification of three-dimensional real Lie algebra was completed according to the properties of derivative algebras and isomorphic conditions of Lie algebra. When the dimension of derivative algebra is 0 or 1, Lie algebra can be divided into three types, $L(3,0)$, $L(3,-1)$ and $L(3,1)$, according to the properties of Lie bracket operation and the transformation of basis. When the dimension of derivative algebra is 2 or 3, Lie algebras can be divided into five types, $L(3,2,a)$, $L(3,3)$, $L(3,4,c)$, $L(3,5)$, $L(3,6)$, according to the properties of eigenvalues of matrix corresponding to internal derivations.

Keywords: Lie algebra; derivative algebra; isomorphism

李代数的分类问题是李代数结构理论的核心内容。经典的李代数理论^[1-3]利用根系理论完整地给出了特征为 0 的代数闭域上的有限维半单李代数分类。但对于特征为 p 或非代数闭域上的李代数分类还有许多未解决的问题。而对于这些李代数的研究, 总是从低维开始的。文献^[4-7]利用同构

定理研究了低维的可解李代数和幂零李代数分类问题。实数域是特征为 0 的数域, 但它是非代数闭域, 因此, 实李代数的结构与复李代数的完全不同。本文研究三维实李代数的分类问题, 利用同构定理, 根据导代数的维数^[8-10]给出三维实李代数的完整分类。

收稿日期: 2019-04-16

基金项目: 上海理工大学教师教学发展研究基金资助项目 (LXYJY07)

第一作者: 胡建华(1978-), 女, 讲师。研究方向: 代数。E-mail: smilydragon2011@163.com

1 基础知识

定义 1^[1] 设 L 是域 F 上的向量空间, 定义一个李乘运算(记为 $[\cdot, \cdot]$): 对 $\forall x, y \in L$, 有 $[x, y] \in L$, 且满足:

a. $[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y] = \lambda_1 [x_1, y] + \lambda_2 [x_2, y], \forall \lambda_1, \lambda_2 \in F, x_1, x_2, y \in L$;

b. $[x, x] = 0, \forall x \in L$;

c. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \forall x, y, z \in L$.

就称 L 为域 F 上的李代数。

定义 2^[1] 设 L 是一李代数, $[L, L]$ 是李代数的子代数, 称为 L 的导代数, 记为 L' 。

记 $\text{ad } x: L \rightarrow L$ 为伴随表示, 可诱导出线性表示 $\text{ad } x: L' \rightarrow L'$ 。 $\text{ad } x$ 称为内导子。

引理 1 对任意 $Y \in L'$, $\text{tr}(\text{ad } Y) = 0$ 。

证明 因为, $Y \in L'$, 存在 $Y_1, Y_2 \in L$, 使 $[Y_1, Y_2] = Y$, 所以,

$$\begin{aligned} \text{ad } Y &= \text{ad } [Y_1, Y_2] = [\text{ad } Y_1, \text{ad } Y_2] = \\ &= \text{ad } Y_1 \text{ad } Y_2 - \text{ad } Y_2 \text{ad } Y_1 \text{tr}(\text{ad } Y) = \\ &= \text{tr}(\text{ad } Y_1 \text{ad } Y_2) - \text{tr}(\text{ad } Y_2 \text{ad } Y_1) = 0 \end{aligned}$$

定理 1^[1] 令 L_1 和 L_2 是 2 个 n 维李代数, $n < \infty$, 若它们存在一组对应基, 其对应的结构常数相等, 则 L_1 和 L_2 同构。

同构的 2 个李代数, 它们的导代数的维数相同。

文献[1,3]在同构意义下给出了一维、二维实李代数的分类。一维实李代数只有一类, $L = \text{span}\{e_1\}$, 是交换李代数, 满足 $[e_1, e_1] = 0$, 记为 $L(1, 0)$ 。二维实李代数 $L = \text{span}\{e_1, e_2\}$ 有两类。一类是交换的, 满足 $[e_1, e_2] = 0$, 记为 $L(2, 0)$; 另一类是非交换的, 满足 $[e_1, e_2] = e_1$, 记为 $L(2, 1)$ 。

现根据导代数的维数分别讨论三维实李代数在同构意义下的分类。

2 三维实李代数的分类

2.1 导代数维数为 0 和 1

若导代数 L' 是 0 维的, 即 $\dim L' = 0$, 则 $L = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ 为交换李代数, $[L, L] = 0$, 满足 $[e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = 0, [e_2, e_3] = 0$, 记为 $L(3, 0)$ 。

若导代数 L' 为 1 维的, 即 $\dim L' = 1$, 则存在非零元素 $X_1 \in L'$, 使得 $L' = \text{span}\{X_1\}$ 。将 X_1 扩张成 L 的一组基 $\{X_1, X_2, X_3\}$, 则存在不全为零的数 $a, b, c \in \mathbf{R}$ 使

$$[X_1, X_2] = aX_1, [X_1, X_3] = bX_1, [X_2, X_3] = cX_1$$

假设 $a \neq 0$ 。构造一组新的基 $e_1 = X_1, e_2 = \frac{1}{a}X_2, e_3 = aX_3 - bX_2 + cX_1$, 则有 $[e_1, e_2] = e_1, [e_1, e_3] = 0, [e_2, e_3] = 0$, 该李代数可以看作两李代数的直和 $L(2, 1) \oplus L(1, 0)$, 记为 $L(3, -1)$ 。当 $b \neq 0$ 时, 交换 X_2 和 X_3 , 经计算可以得到相同李代数。若 $c \neq 0, a = b = 0$ 。令 $e_1 = X_2, e_2 = X_3, e_3 = cX_1$, 则 $[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = 0, [e_2, e_3] = 0$ 。将满足该运算的李代数记为 $L(3, 1)$ 。

2.2 导代数维数为 2

若导代数 L' 是 2 维的, 即 $\dim L' = 2$, 构造 L' 的一组基 $\{Y, Z\}$, 扩充为 L' 的一组基 $\{X, Y, Z\}$ 。设 $[Y, Z] = \alpha Y + \beta Z, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, 考虑 $\text{ad } Y: L' \rightarrow L', \text{ad } Z: L' \rightarrow L'$ 在基 $\{Y, Z\}$ 下的矩阵

$$(\text{ad } Y)_{\{Y, Z\}} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, (\text{ad } Z)_{\{Y, Z\}} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

由引理 1 可知, $\beta = 0, \alpha = 0$, 所以, 有 $[Y, Z] = 0$, 故 $[X, Y] \neq 0, [X, Z] \neq 0$ 。因此, $\text{ad } X: L' \rightarrow L'$ 为同构映射, 即 $\text{ad } X$ 是可逆的, 其特征值必不为零, 现分 3 种情况讨论。

a. $\text{ad } X$ 有 2 个不同的实特征值。

设 λ_1, λ_2 是 $\text{ad } X$ 的 2 个不同的实特征值, 则 $\text{ad } X$ 在实数域上可对角化,

$$(\text{ad } X)_{\{Y, Z\}} \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

因此, 在 L' 中存在一组基 $\{e_1, e_2\}$, 使得 $\text{ad } X \cdot e_1 = [X, e_1] = \lambda_1 e_1, \text{ad } X \cdot e_2 = [X, e_2] = \lambda_2 e_2, [e_1, e_2] = 0$ 。令 $e_3 = -\frac{1}{\lambda_1}X$, 则有 $[e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = e_1, [e_2, e_3] = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}e_2$ 。令 $a = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, a \neq 0$, 则有 $[e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = e_1, [e_2, e_3] = ae_2$ 。将满足此运算的李代数记为 $L(3, 2, a)$ 。

命题 1 三维实李代数 $L(3, 2, a)$ 和 $L(3, 2, a')$ 同构的充要条件是 $a = a'$ 或 $a = \frac{1}{a'}$ 。

证明 只需证 $L(3, 2, a) \cong L(3, 2, \frac{1}{a})$ 的情况。设 $L(3, 2, \frac{1}{a})$ 的基为 $\{e_1, e_2, e_3\}$, 满足 $[e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = e_1, [e_2, e_3] = \frac{1}{a}e_2, a \neq 0$ 。构造一组新基: $e_1' = e_2, e_2' = e_1, e_3' = xe_3$, 则有 $[e_1', e_2'] = 0, [e_1', e_3'] = e_1', [e_2', e_3'] = ae_2'$, 即 $L(3, 2, a) \cong L(3, 2, \frac{1}{a})$ 。所以, $L(3, 2, a)$ 中的 a 只需满足 $0 < |a| \leq 1$ 。

b. $\text{ad } X$ 有 1 个重数为 2 的实特征值。

假设 $\text{ad } X$ 中重数为 2 的实特征值为 λ , 若 $\text{ad } X$ 可

对角化, 即

$$(\text{ad } X)_{\{Y,Z\}} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

则在 L' 中必存在一组基 $\{e_1, e_2\}$, 使得 $\text{ad } X \cdot e_1 = [X, e_1] = \lambda e_1$, $\text{ad } X \cdot e_2 = [X, e_2] = \lambda e_2$, $[e_1, e_2] = 0$ 。令 $e_3 = -\frac{1}{\lambda}X$, 则有 $[e_1, e_2] = 0$, $[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = e_2$, 即 $L(3, 2, 1)$, 所以, 该李代数 $L \subset L(3, 2, a)$ 。

若 $\text{ad } X$ 不可对角化, 即

$$(\text{ad } X)_{\{Y,Z\}} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

因此, 存在一组基 $\{e_1, e_2\}$, 使得 $\text{ad } X \cdot e_1 = [X, e_1] = \lambda e_1$, $\text{ad } X \cdot e_2 = [X, e_2] = e_1 + \lambda e_2$, $[e_1, e_2] = 0$ 。令 $e_3' = -\frac{1}{\lambda}X$, $e_1' = \frac{1}{\lambda}e_1$, $e_2' = e_2$, 有 $[e_1', e_2'] = 0$, $[e_1', e_3'] = e_1'$, $[e_2', e_3'] = e_1' + e_2'$, 将满足此运算的李代数记为 $L(3, 3)$ 。

c. $\text{ad } X$ 有 2 个复共轭特征值。

因为实多项式的虚根共轭成对出现, 设 $\text{ad } X$ 的 2 个复共轭特征值分别为 $\lambda, \bar{\lambda}$, 则 $\text{ad } X$ 在复数域上是可对角化的, 有

$$(\text{ad } X)_{\{Y,Z\}} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$$

因此, 存在 $e_1, e_2 \in L'$, 使得 $(\text{ad } X)(e_1 + ie_2) = \lambda(e_1 + ie_2)$ 。令 $\lambda = a + ib$, $a, b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$, 不妨设 a, b 同号, 否则, 取 $\bar{\lambda}$ 即可。因为, $(\text{ad } X)(e_1 + ie_2) = \text{ad } X \cdot e_1 + i \text{ad } X \cdot e_2$, 并且有 $\lambda(e_1 + ie_2) = ae_1 - be_2 + i(ae_2 + be_1)$, 所以, 得到 $\text{ad } X \cdot e_1 = ae_1 - be_2$, $\text{ad } X \cdot e_2 = be_1 + ae_2$ 。令 $X' = \frac{1}{b}X$, 则有 $\text{ad } \frac{1}{b}X \cdot e_1 = \frac{a}{b}e_1 - e_2$, $\text{ad } \frac{1}{b}X \cdot e_2 = e_1 + \frac{a}{b}e_2$ 。构造一组新的基, 令 $e_3 = -\frac{1}{b}X$, $c = \frac{a}{b}$, $c \geq 0$, 则有 $[e_1, e_2] = 0$, $[e_1, e_3] = ce_1 - e_2$, $[e_2, e_3] = e_1 + ce_2$, 将满足此运算的李代数记为 $L(3, 4, c)$ 。

命题 2 李代数 $L(3, 4, c) \cong L(3, 4, c')$, 当且仅当 $c = c'$ 。

情况 c 的分类结果与扩基时选取的 X 无关。

设 $\{X_1, Y, Z\}$ 是 L 的一组基, 则 $\text{ad } X_1 : L' \rightarrow L'$ 为同构的, 若 L 中存在另一组基 $\{X_2, Y, Z\}$, 令 $X_2 = kX_1 + lY + mZ$, 则有 $\text{ad } X_2 = k \text{ad } X_1 + l \text{ad } Y + m \text{ad } Z$, 因此, 有 $\text{ad } X_2|_{L'} = k \text{ad } X_1|_{L'}$, 它们的特征值仅相差 k 倍, 故选取不同扩基时, 情况 a 中的 $a = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ 和情况 c 中的 $c = \frac{a}{b}$ 不变, 情况 b 中的结论与特征值无关。

若取 $\lambda = a + ib$, a, b 的符号相反, 可得李代数

$L(3, 4, -c)$, $c < 0$, 因此, $L(3, 4, -c) \cong L(3, 4, c)$ 。

这里 $\text{ad } X$ 只能在复数域上可对角化, 在实数域上不能对角化, 从而在实数域上 $L(3, 2, a)$ 不同构于 $L(3, 4, c)$ 。但在复数域上, 对于给定的 c , 有 $L(3, 4, c) \cong L\left(3, 2, \frac{c-i}{c+i}\right)$ 。令 $e_1' = e_1 + ie_2$, $e_2' = e_1 - ie_2$, $e_3' = \frac{1}{c+i}e_3$, 经计算可得 $[e_1', e_2'] = 0$, $[e_1', e_3'] = e_1'$, $[e_2', e_3'] = \frac{c-i}{c+i}e_2'$ 。由于 $c \in \mathbf{R}$, 且 $\left|\frac{c-i}{c+i}\right| = 1$, 该李括号运算满足 $L(3, 2, a)$ 的运算。

2.3 导代数维数为 3

若导代数 L' 的维数为 3, 即 $\dim L' = 3$, 取 L 的一组基 $\{X', Y', Z'\}$ 。因为, $\dim L' = 3$, 所以, $[X', Y'], [X', Z'], [Y', Z']$ 线性无关。因为, 每一个基元素出现 2 次, 所以, $\text{ad } X', \text{ad } Y', \text{ad } Z'$ 的秩为 2, 从而对任意 $H \in L$, 内导子 $\text{ad } H$ 的秩为 2 维。

引理 2 设 3 维李代数 L 的导代数维数为 3, 若 $\text{ad } H$ 有 2 个实特征值, 则必存在某 $H' \in L$, 使得 $\text{ad } H'$ 有非零特征值。

证明 若 $\text{ad } H$ 有非零特征值, 结论显然成立。

若 $\text{ad } H$ 的特征值全为零, 则 $\text{ad } H$ 是幂零的, 即存在一组基 $B: H, H', H''$, 使得

$$(\text{ad } H)_B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a, c \neq 0$$

即 $\text{ad } H \cdot H' = aH \Rightarrow (\text{ad } H')H = -aH$, 所以, H 为 $\text{ad } H'$ 的非零特征值 $-a$ 的特征向量。

a. $\text{ad } H$ 有 2 个实特征值。

由引理 2, 不妨设 $\text{ad } H$ 有非零特征值为 λ , M 为其对应的特征向量, 即 $\text{ad } H \cdot M = \lambda M$ 。因为, $L' = L$, 即 $H \in L'$ 。因此, 有 $\text{tr}(\text{ad } H) = 0$ 。所以, 必存在向量 N 使得 $\text{ad } H \cdot N = -\lambda N$ 。

$$(\text{ad } H)_{\{M, N\}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

由 Jacobi 等式可知, $[H, [M, N]] = -[M, [N, H]] - [N, [H, M]] = 0$ 。又 $[H, H] = 0$, 所以, 有 $\ker(\text{ad } H) = \text{span}\{H\}$, 设 $[M, N] = dH, d \neq 0$ 。令 $M' = \frac{1}{\lambda d}M, N' = N$, $H' = \frac{1}{\lambda}H$, 则有 $[M', N'] = H', [M', H'] = -M', [N', H'] = N'$ 。再令 $e_1 = N', e_2 = H', e_3 = 2M'$, 则有 $[e_1, e_2] = e_1$, $[e_1, e_3] = -2e_2, [e_2, e_3] = e_3$, 将满足该运算的李代数记为 $L(3, 5)$ 。

b. $\text{ad } H$ 有一对共轭特征值。

设 $\text{ad } H$ 的共轭特征值为 λ 和 $\bar{\lambda}$ 。由 $\text{tr}(\text{ad } H) = 0$

可知 $\lambda + \bar{\lambda} = 0$, 故 λ 为纯虚数。设 $\lambda = mi, m \neq 0 \in \mathbf{R}$ 且不妨设 $m > 0$, 则存在 $M + iN$, 使 $(\text{ad } H)(M + iN) = im(M + iN)$, 即 $[H, M + iN] = -mN + imM = [H, M] + i[H, N]$, 因此, 有 $[H, N] = mM, [H, M] = -mN$ 。又因为, $[M, N] \in \ker(\text{ad } H) = \text{span}\{H\}$, 设 $[M, N] = lH, l \neq 0$ 。令 $M' = \frac{1}{\sqrt{|ml|}}M, N' = -\frac{1}{\sqrt{|ml|}}N, H' = \frac{1}{m}H$, 则 $[M', N'] = -\frac{l}{|l|}H', [H', M'] = N', [H', N'] = -M'$ 。

如果 $l > 0$, 则有 $[M', N'] = -H'$ 。令 $e_1 = M' - H', e_2 = N', e_3 = M' + H'$, 则有 $[e_1, e_2] = e_1, [e_1, e_3] = -2e_2, [e_2, e_3] = e_3$, 由李括号运算可知该类李代数属于 $L(3, 5)$ 。

现设 $l < 0$, 则 $[M', N'] = H'$ 。令 $e_1 = M', e_2 = N', e_3 = H'$, 则有 $[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = -e_2, [e_2, e_3] = e_1$, 将满足该运算的李代数记为 $L(3, 6)$ 。

当 $l > 0$ 和 $l < 0$ 时, 只是改变了 $[X', Y']$ 的符号, 但产生了两类不同的李代数, 这两类李代数在实数域是不同构的, 但在复数域则同构。将 b 中的基 M' 用 iM' 代替, N' 用 iN' 代替, 再进行讨论, 即可得出在复数域上这两类李代数同构, 属于一类李代数。

最后, 将以上关于三维实李代数的讨论总结为定理 2。

定理 2 在同构意义下, 3 维实李代数有如下 8 类:

- a. $L(3, 0)$: $[e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = 0, [e_2, e_3] = 0$;
- b. $L(3, -1)$: $[e_1, e_2] = e_1, [e_1, e_3] = 0, [e_2, e_3] = 0$;
- c. $L(3, 1)$: $[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = 0, [e_2, e_3] = 0$;
- d. $L(3, 2, a)$: $[e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = e_1, [e_2, e_3] = ae_2,$

$0 < |a| \leq 1$;

- e. $L(3, 3)$: $[e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = e_1, [e_2, e_3] = e_1 + e_2$;
- f. $L(3, 4, c)$: $[e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = ce_1 - e_2, [e_2, e_3] = e_1 + ce_2, c \geq 0$;
- g. $L(3, 5)$: $[e_1, e_2] = e_1, [e_1, e_3] = -2e_2, [e_2, e_3] = e_3$;
- h. $L(3, 6)$: $[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = -e_2, [e_2, e_3] = e_1$ 。

参考文献:

[1] HUMPHREYS J E. Introduction to Lie algebras and representation theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1972.

[2] 苏育才, 卢才辉, 崔一敏. 有限维半单李代数简明教程[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[3] JACOBSON N. Lie algebras[M]. New York: Interscience Publishers, 1962.

[4] DE GRAAF W A. Classification of 6-dimensional nilpotent Lie algebras over fields of characteristic not 2[J]. [Journal of Algebra](#), 2007, 309(2): 640–653.

[5] SCHNEIDER C. A computer-based approach to the classification of nilpotent Lie algebras[J]. [Experimental Mathematics](#), 2005, 14(2): 153–160.

[6] DE GRAAF W A. Classification of solvable Lie algebras[J]. [Experimental Mathematics](#), 2005, 14(1): 15–25.

[7] STRADE H. Lie algebras of small dimension[J]. [Mathematics](#), 2006, 15(1): 1–37.

[8] FRIEDBERG S H, INSEL A J, SPENCE L E. Linear algebra[M]. 3rd ed. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1997.

[9] 胡建华, 赵卫萍. 一类特殊幂零李代数的结构[J]. 上海理工大学学报, 2015, 37(3): 215–219.

[10] HALL B C. Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction[M]. New York: Springer-Verlag, 2003.

(编辑: 石 瑛)