

一种加权正交匹配追踪的盲多带信号重建方法

陈明夫, 渠刚荣, 石磊

(北京交通大学理学院, 北京 100044)

摘要: 为研究多带信号的时域采样点盲重建该多带信号, 将信号在适当大的包含其所有频带的频率区间上离散, 信号频域重建归结为稀疏信号恢复问题。基于压缩感知恢复所需采样点少且其恢复稀疏信号要求观测矩阵的限制等距常数足够小, 提出了一种改善观测矩阵的条件数, 从而改善其限制等距常数的加权方法, 以及相应的加权正交匹配追踪的盲多带信号重建方法, 该方法对一般的稀疏信号恢复也适用。模拟中, 对适当大的频率区间, 取满足重建误差范围的适当小的离散间隔。模拟结果验证了对盲多带信号重建和一般的稀疏信号的恢复, 提出的方法比直接用正交匹配追踪算法在相同条件下有更高的有效重建率。

关键词: 多带; 压缩感知; 条件数; 限制等距常数

中图分类号: O 24 **文献标志码:** A

A reweighted orthogonal matching pursuit method for blind multiband signal reconstruction

CHEN Mingfu, QU Gangrong, SHI Lei

(School of Science, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: Blind multiband signal reconstruction is the reconstruction of the multiband signal from sampling points in the time domain. The signal was discretized over an appropriately large frequency range containing all of its bands, and then signal reconstruction in frequency domain boils down to sparse signal recovery. Based on the fact that fewer sampling points were needed for compressed sensing recovery and the RIC (restricted isometry constant) of the observation matrix was required to be small enough to recover the sparse signal, a reweighted method was proposed to improve the condition number of the observation matrix so as to improve its RIC, as well as a corresponding reweighted OMP (orthogonal matching pursuit) scheme for blind multiband signal reconstruction. The proposed method was also applicable to the recovery of general sparse signals. In simulations, for an appropriately large frequency range, an appropriately small discrete interval satisfying the reconstruction error range was taken. The simulation results verify that for blind multiband signal reconstruction and the recovery of general sparse signals, the reweighted OMP scheme has a higher efficient reconstruction rate than the

收稿日期: 2019-10-29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (61671004)

第一作者: 陈明夫(1987-), 男, 博士研究生。研究方向: 图像重建。E-mail: 13118392@bjtu.edu.cn

通信作者: 渠刚荣(1961-), 男, 教授。研究方向: 图像重建。E-mail: grqu@bjtu.edu.cn

OMP algorithm directly used under the same conditions.

Keywords: *multiband; compressed sensing; condition number; restricted isometry constant*

香农采样定理是现代通讯和信号处理的理论基础, 它将模拟信号与离散表示法连接起来^[1]。对于信号 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, 如果当 $|\omega| > \sigma > 0$ 时, 其傅里叶变换 $F(\omega)$ 的值为 0, 那么信号 $f(t)$ 被称作 σ -带限的。这里: t 表示时间; $L^2(\mathbb{R})$ 表示实数域上的 Lebesgue 平方可积函数空间; ω 表示频率; σ 表示一个常数。香农采样定理说明一个 σ -带限的信号 $f(t)$ 能够从它所有的等步长 $h \leq 1/(2\sigma)$ 的采样点准确重建^[2]。

本文考虑一类多带信号, 其所有的频带都是连续的区间段, 且组合一起分布在一个宽的频谱内。信号的重建是在时间区间 $[-T, T]$ 内进行采样, 由这些采样点求出其频谱, 通过傅里叶逆变换重建原信号。在采样阶段, 如果已知频带位置及其宽度, 信号模型就定义了可能输入的子空间。为了在这种情况下进行有效的重建, Landau^[3]发展了一种等于带宽和的最小率, 它低于相应的 Nyquist 率, 并且对任意一种采样方法都适用。文献[4-5]分别把 Landau 的方法应用于低率均匀采样和周期非均匀采样, Lin 等^[6]把范围扩展到多带信号。

盲频谱系统 (spectrum-blind systems) 意味着既需要盲采样, 又需要盲重建。因为在采样之前探测频谱的支集通常不可能或代价太高难以实现, 所以研究盲频谱系统非常重要。盲频谱系统在一系列文章^[7-9]中被首次提出。这些工作不需要准确的支集, 但必须满足一个与多带模型的简单性质没有直接关系的数学条件, 即已知占用率的一个上界, 占用率定义为支集的勒贝格测度与支集谱跨度 (spectral span) 的勒贝格测度的比值。甚至当该条件满足时也不能保证准确的重建, 因为他们提出的采样率接近 Landau 最小率。文献[10]中, Mishali 等证明了有效的盲重建需要一个更高的采样率。文献[10-11]有相同的性质, 即都不需要对频带的位置作限制^[9]。Herley 等^[12]以及 Venkataramani 等^[13]提出一种半盲频谱系统, 在这种情况下, 信号以一种不依赖于频带位置的多陪集 (multi-coset) 采样策略进行采样。

压缩感知中的方法力求以次最优性为代价实现易于处理的恢复算法^[14-17], 其解决的经典问题是

离散且有限向量的恢复。虽然在文献[18-19]中研究了压缩感知结果对连续信号的适应性, 但这些论文并没有解决多带信号的情况。

盲多带信号重建的困难一方面在于, 各频带的位置是未知的, 这意味着取定适当的频率区间后, 该区间内的频谱都需要被恢复, 当连续的频谱被适当的间隔离散后, 直接重建要求采样点数等于离散点数, 采样代价高。考虑到离散点的幅值大部分是零, 可以将其视作特殊的稀疏向量, 其中数值不为零的元素聚集成频带数目部分, 且每个部分中都没有零元素, 因此可以用压缩感知技术以少的采样点来恢复该稀疏向量。以 OMP (orthogonal matching pursuit) 算法为例, 不仅要求观测矩阵满足 RIP (restricted isometry property), 还要求其 RIC (restricted isometry constant) 越小越好。因此, 盲多带信号重建的另一方面的困难是采样后得到的矩阵 A 作为观测矩阵其 RIC 不够小, 无法成功恢复稀疏向量。本文前期工作^[20]研究的对象是一般的带限信号, 用多次加权的方法改善线性方程组系数矩阵的条件数, 提出的加权 Landweber 方法对理论上严重不适定的带限信号外推有明显的改进, 该加权方法可以改善条件数。文献[21]的研究结果证明了条件数越小、RIC 也越小, 因此, 该方法也可以用于压缩感知技术解决盲多带信号重建问题中。

1 盲多带信号重建

首先, 建立一个多带信号的模型。假设 $f(t)$ 是一个时域连续的函数, 其傅里叶变换

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1)$$

是分段连续的。对于一个给定的 $\tau > 0$, 把 $F(\omega)$ 在区间 $[\alpha_\chi, \beta_\chi]$ ($-\tau < \alpha_\chi < \beta_\chi < \tau$, $\chi = 1, 2, \dots, N$) 内所有的点的集合记为 B_χ , 这里, 令 $\alpha_{N+1} = \tau$ 。如果 $F(\omega)$ 在区间 $(\beta_\chi, \alpha_{\chi+1})$ 内所有的点都是 0, 那么这些点的非空集合被记作 O_χ 。如果 $F(\omega)$ 在区间 $[-\tau, \alpha_1]$ 内所有的点都是 0, 那么这些点的非空集合被记作 O_0 。把区间 $[-\tau, \tau]$ 内的所有点的集合记作 D 。

定义 1 集合 M 包含所有满足以下条件的带限信号 $f(t)$:

a. $f(t)$ 对于频率区间段 $[-\tau, \tau]$ 是带限的, 这里 τ 是给定的;

b. 所有的 α_χ 和 $\beta_\chi (\chi = 1, 2, \cdots, N)$ 都是未知的, $D = O_0 \cup B_1 \cup O_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_N \cup O_N \cup \{\tau\}$;

c. B_N 是已知的, 这里 $B_N = (\beta_1 - \alpha_1) + (\beta_2 - \alpha_2) + \cdots + (\beta_N - \alpha_N)$ 。

由条件 a, 知道对于 $|\omega| > \tau$,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = 0 \tag{2}$$

经过傅里叶逆变换,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau}^{\tau} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{3}$$

令 $P_\chi(\omega)$ 是频率区间 $[\alpha_\chi, \beta_\chi]$ 的特征函数, 则

$$P_\chi(\omega) = \begin{cases} 1, & \alpha_\chi \leq \omega \leq \beta_\chi \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{4}$$

分段连续的 $F(\omega)$ 在区间 $[-\tau, \tau]$ 内能够被表示成

$$F(\omega) = \sum_{\chi=1}^N F(\omega) P_\chi(\omega) \tag{5}$$

对于 $\alpha_\chi \leq \omega \leq \beta_\chi$, 令 $F_\chi(\omega) = F(\omega) P_\chi(\omega)$ 。对于每个 $F_\chi(\omega)$ 都没有与其相关的信息, 并且所有的 α_χ 和 $\beta_\chi (\chi = 1, 2, \cdots, N)$ 都是未知的。由定积分的可加性

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_1(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} F_2(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \cdots + \int_{\alpha_N}^{\beta_N} F_N(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right) \tag{6}$$

要从 N -带信号 $f(t)$ 在时间区间 $[-T, T]$ 内的采样点重建它, 考虑半离散等式

$$\frac{1}{2\pi} \left(\int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_1(\omega) e^{i\omega t_j} d\omega + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} F_2(\omega) e^{i\omega t_j} d\omega + \cdots + \int_{\alpha_N}^{\beta_N} F_N(\omega) e^{i\omega t_j} d\omega \right) = f(t_j), t_j \in S_T \tag{7}$$

这里, $S_T = \{t_j, j = 1, 2, \cdots, M_T\}$ 是采样点的集合。

在均匀随机采样的情况下, t_j 在区间 $[-T, T]$ 内是均匀随机分布的。给定集合 S_T 后, 需要以同样的间隔来离散式 (7) 中的 N 个积分, 以此来求解式 (7)。

根据文献 [21] 中的定理 2, 离散间隔取定后, 由时域上的采样点可以求出频域上的离散点, 然后作傅里叶逆变换得到重建信号, 当离散间隔趋于零时, 重建信号一致收敛到原信号。对适当大的 $[-\tau, \tau]$ 内的 $F(\omega)$ 离散化的时候, 取满足重建误差

范围的适当小的离散间隔 $\Delta\omega > 0$, 则有

$$\frac{1}{2\pi} \left(\sum_{k=\lfloor \frac{\alpha_1}{\Delta\omega} \rfloor}^{\lfloor \frac{\beta_1}{\Delta\omega} \rfloor} F_1(k\Delta\omega) e^{ik\Delta\omega t_j} \sum_{k=\lfloor \frac{\alpha_2}{\Delta\omega} \rfloor}^{\lfloor \frac{\beta_2}{\Delta\omega} \rfloor} F_2(k\Delta\omega) e^{ik\Delta\omega t_j} + \cdots + \sum_{k=\lfloor \frac{\alpha_N}{\Delta\omega} \rfloor}^{\lfloor \frac{\beta_N}{\Delta\omega} \rfloor} F_N(k\Delta\omega) e^{ik\Delta\omega t_j} \right) \Delta\omega \approx f(t_j) \tag{8}$$

其中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示向下取整。由定义 1 中的条件 c, N 个频带宽度的和 B_N 是已知的。把区间 $[-\tau, \tau]$ 内的离散点数和 N 个频带中的离散点数分别记作 N_τ 和 N_b , 则

$$N_\tau = 2 \left\lfloor \frac{\tau}{\Delta\omega} \right\rfloor + 1 \tag{9}$$

$$N_b = \left\lfloor \frac{B_N}{\Delta\omega} \right\rfloor + 2(N-1) \tag{10}$$

为了重建带限信号 $f(t)$, 要求得

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\frac{N_\tau-1}{2}}^{\frac{N_\tau-1}{2}} X(k) e^{ik\Delta\omega t_j} \Delta\omega = f(t_j) \tag{11}$$

的解 $X(k)$ 。

由式 (9) 和 (10), N_τ 维向量 $\mathbf{x} = \left(X\left(-\frac{N_\tau-1}{2}\right), X\left(-\frac{N_\tau-3}{2}\right), \cdots, X\left(\frac{N_\tau-1}{2}\right) \right)^T$ 中只有 N_b 个非 0 元素。因为各频带的位置是未知的, 直接解式 (11) 要求采样点数等于区间 $[-\tau, \tau]$ 内的离散点数 N_τ 。考虑到 N_τ 维向量 $\mathbf{x}$ 是 N_b -稀疏的, 可以用压缩感知技术以少的采样点求解式 (11)。假设采样点数 M_T 满足

$$2N_b \leq M_T \leq N_\tau \tag{12}$$

且

$$\Delta\omega \leq \pi \tag{13}$$

加入式 (13) 的原因是 $e^{ik\Delta\omega t_j}$ 对于变量 $k\Delta\omega t_j$ 是周期的, 且周期为 2π 。要求解的式 (11) 可以简化成

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{14}$$

式中, 式 (11) 的系数矩阵被视作观测矩阵 $\mathbf{A}$; $\mathbf{x}$ 是待求解的 N_b -稀疏向量; $\mathbf{b} = [f(t_1), f(t_2), \cdots, f(t_{M_T})]^T$ 是观测值。压缩感知中的恢复算法要求观测矩阵 $\mathbf{A}$ 满足 RIP。

定义 2 [22] 矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m_0 \times N_0}$ 的第 s 个限制等距常数 $\delta_s = \delta_s(\mathbf{A})$ 是使得

$$(1-\delta) \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \leq (1+\delta) \|\mathbf{x}\|_2^2 \tag{15}$$

对所有 s 稀疏向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{N_0}$ 成立的最小的 $\delta \geq 0$ 。 δ_s 还可以由

$$\delta_s = \max_{S \subset [N_0], \text{card}(S) \leq s} \|A_S^* A_S - I\|_{2 \rightarrow 2} \quad (16)$$

等价地给出,这里 $[N_0]$ 表示不超过 N_0 的自然数的集合, S 是 $[N_0]$ 的一个子集, $\text{card}(S)$ 表示集合 S 的基数, I 表示单位矩阵。如果对于适当的 s , δ_s 是小的,那么 A 满足限制等距性质。

假设 $A \in \mathbb{C}_r^{m_0 \times N_0}$,且 $A^* A$ 的特征值为

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_r \geq \mu_{r+1} = \cdots = \mu_{m_0} = 0 \quad (17)$$

称 $\sigma_i = \sqrt{\mu_i}$, $i = 1, \dots, r$,为矩阵 A 的奇异值,其中 r 是矩阵 A 的秩。式(16)说明每个列子矩阵 A_S ($S \subset [N_0]$, $\text{card}(S) \leq s$)的所有奇异值都在区间 $[1 - \delta_s, 1 + \delta_s]$ 内。

压缩感知中的算法可以分为优化算法、贪婪算法、阈值算法,这3类算法的精确恢复都依赖于观测矩阵 A 的性质。以贪婪算法中的OMP算法为例,观测矩阵 A 的RIC要足够小,其精确恢复的充分条件为 $\delta_{s+1} \leq \frac{1}{\sqrt{s+1}}$ ^[21]。本文的目标是通过多次加权改进观测矩阵的条件数从而改进其RIC。把条件数记作 $\kappa(\cdot)$,矩阵 A 的任意 s 列组成的所有子矩阵的Gram矩阵的正特征值中最大、最小的值分别记作 $\mu_{S_{\max}}(A)$, $\mu_{S_{\min}}(A)$,则

$$\begin{cases} \mu_{S_{\max}}(A) := \max_{|S|=s} \{\mu_{\max}(A_S^* A_S)\} \\ \mu_{S_{\min}}(A) := \max_{|S|=s} \{\mu_{\min}(A_S^* A_S)\} \end{cases} \quad (18)$$

在文献[21]中,王倩等给出定理1和定理2并且证明了:a.观测矩阵的 $\frac{\mu_{S_{\max}}}{\mu_{S_{\min}}}$ 越小, δ_s 越小;b.对于观测矩阵的条件数适当大的情况,基于奇异值分解,对观测矩阵加权得到新的奇异值相同的观测矩阵(此时它的条件数为1)比原观测矩阵有更小的 $\frac{\mu_{S_{\max}}}{\mu_{S_{\min}}}$,所以加权后得到的新观测矩阵的RIC小于原观测矩阵的RIC,从而改进了重建的结果。

为了改进矩阵 $A^* A$ 的条件数,提出如下的加权方法。令

$$A_0 = A^* A, b_0 = A^* b \quad (19)$$

$$\begin{cases} A_k = (a_{k-1} \mu_{k-1, \max} I - A_{k-1}) A_{k-1} \\ b_k = (a_{k-1} \mu_{k-1, \max} I - A_{k-1}) b_{k-1} \end{cases} \quad (20)$$

这里 $\mu_{k-1, \max}$ 表示 A_{k-1} 的最大特征值,并且对于 $k \in N^+$, $1 < a_{k-1} < 2$,令 $\mu_{k-1, \min}$ 表示 A_{k-1} 的最小正特征值,那么 $\kappa(A_k) = \frac{\mu_{k, \max}}{\mu_{k, \min}}$ 。

引理1^[20] 令 $\{v_{0,l}\}_{l=0}^m$ 是有限个正数组成的一个数列。对于 $k \in N^+$, $1 < a_{k-1} < 2$,如果有限列

$\{v_{k,l}\}_{l=0}^m$ 的项 $v_{k,l}$ 满足 $v_{k,l} = (a_{k-1} v_{k-1, \max} - v_{k-1, l}) v_{k-1, l}$,那么有

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{v_{k, \max}}{v_{k, \min}} = 1 \quad (21)$$

这里 $v_{k, \max} = \max\{v_{k,l}\}_{l=0}^m$, $v_{k, \min} = \min\{v_{k,l}\}_{l=0}^m$ 。

定理1^[20] 令 $\{\mu_{0,l}\}_{l=0}^m$ 是 A_0 按数量级递减的不同正特征值,且 $\{p_l\}_{l=0}^m$ 是对应的代数重数,对于 $k \in N^+$, $1 < a_{k-1} < 2$,由式(20)及 $\kappa(A_k)$ 的符号意义,有

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \kappa(A_k) = 1 \quad (22)$$

证明 令 $\{u_{z,l} | z = 1, \dots, p_l, l = 0, \dots, m\}$ 是不同正特征值对应的特征向量, $U_l = (u_{1,l}, \dots, u_{p_l,l})$ 且 $U = (U_0, \dots, U_l)$ 。如果0作为 A_0 的一个特征值有代数重数 q ,令 v_n 是对应的特征向量, $1 \leq n \leq q$ 。记 $V = (v_1, \dots, v_q)$, O_q 为 q 阶零矩阵。根据Hermitian矩阵可酉对角化的性质,

$$U^* A_0 U = \text{diag}(\mu_{0,0} I_{p_0}, \dots, \mu_{0,m} I_{p_m}, O_q) \quad (23)$$

$$U^* (a_0 \mu_{0,0} I - A_0) U = \text{diag}((a_0 \mu_{0,0} - \mu_{0,0}) I_{p_0}, \dots, (a_0 \mu_{0,0} - \mu_{0,m}) \mu_{0,m} I_{p_m}, O_q) \quad (24)$$

这里 $a_0 \mu_{0,0} - \mu_{0,0} < \dots < a_0 \mu_{0,0} - \mu_{0,m}$, $0 < a_0 < 1$ 。一次加权能够表示成

$$(a_0 \mu_{0,0} I - A_0) A_0 x = (a_0 \mu_{0,0} I - A_0) b_0 \quad (25)$$

对于相同的 U ,对角矩阵 $(a_0 \mu_{0,0} I - A_0)$ 的正特征值是增加的,从小到大;而对角矩阵 A_0 的正特征值是减少的,从大到小。条件数 $\kappa(A_1)$ 被改善。因为 A_k 能够被同样的 U 对角化,所以有 $\{\mu_{k,l}\}_{l=0}^m = \{(a_{k-1} \mu_{k-1, \max} - \mu_{k-1, l}) \mu_{k-1, l}\}_{l=0}^m$ 。定理1由引理1得到。

文献[20]中的 A_0 是实对称矩阵,其特征值都是正数。本文中,因为在区间 $[-T, T]$ 内均匀随机采样,所以 A_0 是Hermitian矩阵,其特征值中可能有0。这是本文的证明与文献[20]证明的不同之处。令 $H_0 = A A^*$, $H_k = (a_{k-1} \varphi_{k-1, \max} I - H_{k-1}) H_{k-1}$,其中 $\varphi_{k-1, \max}$ 是 H_{k-1} 的最大特征值,那么结合式(20)和奇异值分解定理,可以得到新的观测矩阵 Φ_k 和新的观测值 d_k ,其中 Φ_k 满足 $\Phi_k^* \Phi_k = A_k$ 且 $\Phi_k \Phi_k^* = H_k$ 。多次加权后得到的约束方程

$$\Phi_k x = d_k \quad (26)$$

与式(14)等价,用压缩感知技术恢复 $x = \left(X \left(-\frac{N_\tau - 1}{2} \right), X \left(-\frac{N_\tau - 3}{2} \right), \dots, X \left(\frac{N_\tau - 1}{2} \right) \right)^T$ 。令

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\frac{N_{\tau}-1}{2}}^{\frac{N_{\tau}-1}{2}} X(k) e^{ik\Delta\omega t} \cdot \Delta\omega = \tilde{f}(t) \tag{27}$$

$\tilde{f}(t)$ 是原信号的重建。因为本文方法有式(22)这样的结果，所以加权次数 k 适当大的话，就改进了观测矩阵的条件数，从而改善其 RIC。对于同样的采样点，未加权的 OMP 算法不能重建时，只要 Φ_k 满足相应的 RIC 要求，加权的 OMP 方法就能从式(26)中准确恢复 x ，进而由式(27)得到满足重建误差要求的 $\tilde{f}(t)$ 。

提出一种加权的 OMP 方法之前，回顾一下 OMP 算法。

初始化： $S^0=\varnothing$ ， $\mathbf{x}^0=0$ 。

迭代：重复下列步骤直到停止准则 $n=N_b$ 满足

a. $S^{n+1}=S^n\cup\{j_{n+1}\}$, $j_{n+1}=\arg\max_{j\in\{1,2,\cdots,N\}}\left\{\left\|\mathbf{A}^S(\mathbf{y}-\mathbf{A}\mathbf{x}^n)\right\|_j\right\}$;

b. $\mathbf{x}^{n+1}=\arg\min_{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^n}\left\{\left\|\mathbf{y}-\mathbf{A}\mathbf{z}\right\|_2,\text{supp}(\mathbf{z})\subset S^{n+1}\right\}$ 。

加权的 OMP 方法：如果观测矩阵 $\mathbf{A}$ 不能用 OMP 算法成功恢复 $\mathbf{x}$ ，那么 k 次加权后可以得到新的观测矩阵 Φ_k 和新的约束方程(26)。接下来

初始化： $S^0=\varnothing$ ， $\mathbf{x}^0=0$ 。

迭代：重复下列步骤直到停止准则 $n=N_b$ 满足

a. $S^{n+1}=S^n\cup\{j_{n+1}\}$, $j_{n+1}=\arg\max_{j\in\{1,2,\cdots,N\}}\left\{\left\|\left(\Phi_k^S(\mathbf{d}_k-\Phi_k\mathbf{x}^n)\right)\right\|_j\right\}$;

b. $\mathbf{x}^{n+1}=\arg\min_{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^n}\left\{\left\|\mathbf{d}_k-\Phi_k\mathbf{z}\right\|_2,\text{supp}(\mathbf{z})\subset S^{n+1}\right\}$ 。

2 数值模拟

模拟的多带信号是

$F(\omega)=$

$2,$	$-16.341\ 0\leq\omega\leq-15.838\ 2$
$100\omega/419+4.8,$	$-11.313\ 0\leq\omega\leq-10.810\ 2$
$-4\ 000\omega/1\ 257-28,$	$-9.427\ 5\leq\omega\leq-8.799\ 0$
$4\ 000\omega/125\ 7+4,$	$-1.257\leq\omega\leq-0.628\ 5$
$2\sin((1\ 000\omega/1\ 257-1)\pi),$	$1.257\leq\omega\leq1.885\ 5$
$4\ 000\omega/1\ 257-32,$	$10.056\ 0\leq\omega\leq10.684\ 5$
$91/3-10\ 000\omega/3\ 771,$	$10.684\ 5\leq\omega\leq11.438\ 7$
$2\cos((1\ 000\omega/1\ 257-14)\pi),$	$17.598\ 0\leq\omega\leq18.226\ 5$

频谱中包含了矩形、三角形、正弦等典型频带，同时它满足定义 1。模拟信号在给定频率区间内的频谱如图 1 所示。模拟中，对适当大的频率区间内的频谱进行离散化时，取满足实际重建误差范围的适当小的离散间隔。离散间隔取定之后，频率区间内的离散点数和幅值非零的离散点

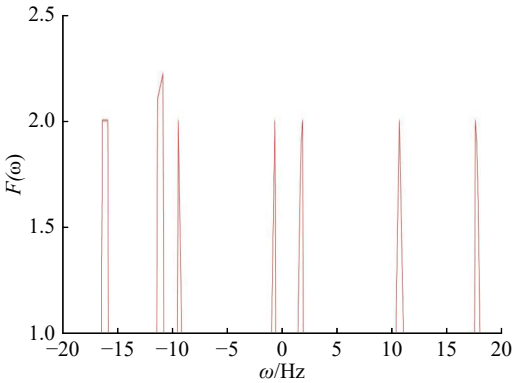


图 1 模拟信号在给定频率区间内的频谱

Fig. 1 Spectrum of the simulated signal in a given frequency range

数就确定下来。

给定 $\tau=20$ ，对于式(11)， $\Delta\omega=0.125\ 7$ ， $N_{\tau}=319$ ， $N_b=40$ 。采样后，式(11)的系数矩阵 $\mathbf{A}$ 被视作观测矩阵，式(14)是约束方程。 k 次加权后，得到新的观测矩阵 Φ_k 和新的约束方程(26)。对于 $k\in N^+$ ， $a_k=1.013$ 。如果能从式(14)或式(26)精确恢复 $\mathbf{x}$ ，那么由式(27)就能得到误差范围内的重建信号。当观测矩阵的 RIC 适当大时，未加权的 OMP 算法不能恢复 $\mathbf{x}$ 。对于同样的采样点，只要经过 k 次加权后得到的新观测矩阵 Φ_k 满足相应的 RIC 条件，提出的加权的 OMP 方法就能精确恢复 $\mathbf{x}$ ，进而成功实现盲多带信号重建。因此在同样条件下，加权的 OMP 方法比未加权的 OMP 算法有更高的重建率。把重建率记作 E ，指的是 100 次模拟实验中有效重建次数所占的百分比。在图 2~4 中，紫色的线代表加权的 OMP 方法，蓝色的线代表未加权的 OMP 算法。

首先，保持采样点的个数不变，改变采样区

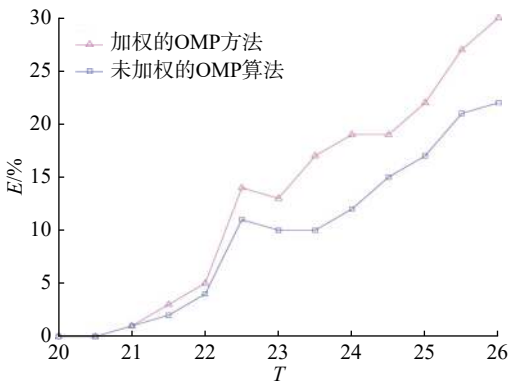


图 2 有效重建率随增大的采样区间的变化

Fig. 2 Changes of the rate of efficient reconstruction with the increasing size of the sampling interval

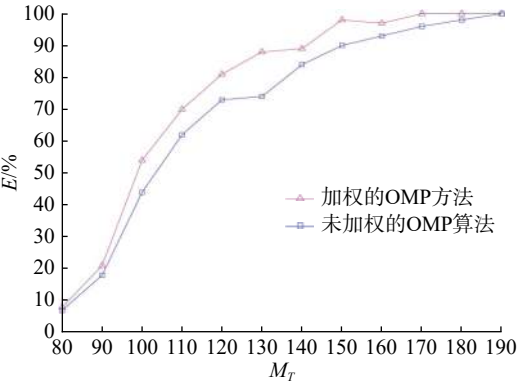


图 3 有效重建率随增加的采样点数的变化

Fig. 3 Changes of the rate of efficient reconstruction with the increasing number of the sampling points

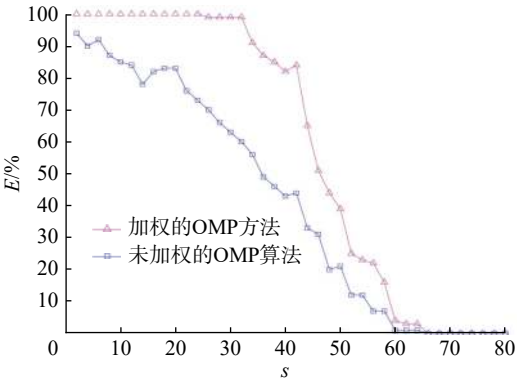


图 4 有效重建率随增加的稀疏度的变化

Fig. 4 Changes of the rate of the efficient reconstruction with the increasing sparsity

间 $[-T, T]$ 的大小。本文取的采样点数 $M_T = 80$ 是可能成功恢复所允许的最少采样点数，加权次数 $k = 15$ 。

图 2 显示，采样点数不变，采样点相同的条件下，加权的 OMP 方法比未加权的 OMP 算法有更高的有效重建率。接下来，保持采样区间 $[-T, T]$ 的大小不变，改变采样点的个数。取 $T = 22$ ，加权次数 $k = 15$ 。

图 3 显示，采样区间不变，采样点相同的条件下，与未加权的 OMP 算法相比，加权的 OMP 方法的有效重建率更高。

本文提出的加权的 OMP 方法不仅能够用于盲多带信号重建，还能够改善压缩感知中常见的观测矩阵的 RIC，改进对一般的稀疏向量的恢复结果。现有的 Gaussian 随机矩阵、Bernoulli 矩阵、Toeplitz 矩阵和稀疏随机矩阵都是满足 RIP 的，模拟结果显示加权 OMP 方法比未加权的 OMP 算法有略高一些的有效重建率。为了进一步验证加权的 OMP 方法的有效性，选择均匀随机矩阵作为模

拟的对象，而均匀随机矩阵不满足 RIP，其元素独立地服从开区间 $(0, 1)$ 上的均匀分布。用 Matlab 生成大小为 160×512 的均匀随机矩阵，测量数 $M_1 = 160$ ，信号长度 $N_1 = 512$ ，稀疏信号 $\mathbf{x}_1$ 的支集 S_1 是随机从 $\{1, 2, \dots, N_1\}$ 的所有大小为 s_1 的子集中选取的。 $\mathbf{x}_{1\omega}$ ， $\omega \in S_1$ ，独立同分布地服从标准高斯分布。对于每一个稀疏度 $s_1 \in \{2, 4, 6, \dots, 80\}$ ，实验重复 100 次。加权次数 $k = 15$ 。

图 4 显示，对于不满足 RIP 的均匀随机矩阵，加权的 OMP 方法比未加权的 OMP 算法有明显高的有效重建率。

3 结 论

盲多带信号重建的问题在一定条件下可以用压缩感知技术恢复频域上的稀疏向量后作傅里叶逆变换来解决。根据文献[23]中的定理 2，离散间隔取定之后，由时域上的采样点可以求出频域上的离散点，再对其作傅里叶逆变换就得到重建信号，离散间隔趋于零时，重建信号一致收敛于原信号。本文在对频谱进行离散时，取满足重建误差范围的适当小的离散间隔，从而适当大的频率区间内的离散点数和幅值非 0 的离散点数被确定。研究问题的驱动：一是用尽可能少的采样点得到有效的盲多带信号重建，直接重建要求采样点数等于离散点数，而 OMP 算法需要采样点数不少于两倍的稀疏度；二是用加权法通过改善观测矩阵的条件数，从而改善其 RIC，当观测矩阵因为 RIC 适当大而不能用于重建时，多次加权后得到的等价观测矩阵只要满足相应的 RIC 要求就能用于得到有效的重建，这样本文提出的加权的 OMP 方法比未加权的 OMP 算法^[22]有更高的重建率。由时域上的采样点恢复频域上的稀疏向量的线性方程组可以简化成 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 。如果采样点数非常多，那么由 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 导出的 $\mathbf{A}^* \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^* \mathbf{b}$ 能够直接计算，因为此时 $\mathbf{A}^* \mathbf{A}$ 是一个酉矩阵。通过改善 $\mathbf{A}^* \mathbf{A}$ 的条件数进而改善 $\mathbf{A}$ 的条件数，把 $\mathbf{A}^* \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^* \mathbf{b}$ 两侧同时乘以一个与 $\mathbf{A}^* \mathbf{A}$ 有关的加权矩阵，加权过程重复多次。结合加权同样次数的 $\mathbf{AA}^*$ 和奇异值分解定理可以得到等价观测矩阵 Φ 以及等价约束方程 $\Phi \mathbf{x} = \mathbf{d}$ 。多次加权后得到的新的观测矩阵 Φ 的条件数变小，其 RIC 也变小。在模拟阶段，比较加权的 OMP 方法与未加权的 OMP 算法的有效重建率。频域上，给定适当大的频率区间，取定满足实际重建误差范围的适当小的离散间隔；时域

上,在区间 $[-T, T]$ 内均匀随机采样。首先,保持采样点的个数不变,改变采样区间 $[-T, T]$ 的大小。接下来,保持采样区间 $[-T, T]$ 的大小不变,改变采样点的个数。为了验证加权的OMP方法还能够改善一般的观测矩阵的RIC,用Matlab软件生成大小为 160×512 的均匀随机矩阵作为观测矩阵,而均匀随机矩阵不满足RIP。因此最后,对于每一个稀疏度模拟100次,每次以同一个均匀随机矩阵,对同一个随机的稀疏向量进行恢复,改变稀疏度。模拟结果验证了同样条件下,加权的OMP方法比未加权的OMP算法有更高的有效重建率。

参考文献:

- [1] UNSER M. Sampling-50 years after Shannon[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2000, 88(4): 569–587.
- [2] SHANNON D. A mathematical theory of communication[J]. *The Bell System Technical Journal*, 1948, 27(3): 379–423.
- [3] LANDAU H J. Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions[J]. *Acta Mathematica*, 1967, 117(1): 37–52.
- [4] VAUGHAN R G, SCOTT N L, WHITE D R. The theory of bandpass sampling[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1991, 39(9): 1973–1984.
- [5] KOHLENBERG A. Exact interpolation of band-limited functions[J]. *Journal of Applied Physics*, 1953, 24(12): 1432–1436.
- [6] LIN Y P, VAIDYANATHAN P P. Periodically nonuniform sampling of bandpass signals[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 1998, 45(3): 340–351.
- [7] FENG P, BRESLER Y. Spectrum-blind minimum-rate sampling and reconstruction of multiband signals[C]// *Proceedings of 1996 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. Atlanta: IEEE, 1996: 1688–1691.
- [8] BRESLER Y, FENG P. Spectrum-blind minimum-rate sampling and reconstruction of 2-D multiband signals[C]// *Proceedings of 3rd IEEE International Conference on Image Processing*. Lausanne: IEEE, 1996: 701–704.
- [9] VENKATARAMANI R, BRESLER Y. Further results on spectrum blind sampling of 2D signals[C]// *Proceedings 1998 International Conference on Image Processing*. Chicago: IEEE, 1998: 752–756.
- [10] MISHALI M, ELDAR Y C, ELRON A J. Xampling: signal acquisition and processing in union of subspaces[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(10): 4719–4734.
- [11] FENG P. Universal minimum-rate sampling and spectrum-blind reconstruction for multiband signals[D]. Urbana-Champaign: University of Illinois at Urbana-Champaign, 1998.
- [12] HERLEY C, WONG P W. Minimum rate sampling and reconstruction of signals with arbitrary frequency support[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1999, 45(5): 1555–1564.
- [13] VENKATARAMANI R, BRESLER Y. Perfect reconstruction formulas and bounds on aliasing error in sub-nyquist nonuniform sampling of multiband signals[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2000, 46(6): 2173–2183.
- [14] CHEN J, HUO X M. Theoretical results on sparse representations of multiple-measurement vectors[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(12): 4634–4643.
- [15] COTTER S F, RAO B D, ENGAN K, et al. Sparse solutions to linear inverse problems with multiple measurement vectors[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(7): 2477–2488.
- [16] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289–1306.
- [17] CANDÈS E J, ROMBERG J, TAO T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(2): 489–509.
- [18] TROPP J A, WAKIN M B, DUARTE M F, et al. Random filters for compressive sampling and reconstruction[C]// *Proceedings of 2006 IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing Proceedings*. Toulouse: IEEE, 2006: 872–875.
- [19] LASKA J N, KIROLOS S, DUARTE M F, et al. Theory and implementation of an analog-to-information converter using random demodulation[C]// *Proceedings of 2007 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. New Orleans: IEEE, 2007: 1959–1962.
- [20] CHEN M F, QU G R, SHI L. The reweighted landweber scheme for the extrapolation of band-limited signals[J]. *Signal Processing*, 2019, 164: 340–344.
- [21] WANG Q, QU G R. Restricted isometry constant improvement based on a singular value decomposition-weighted measurement matrix for compressed sensing[J]. *IET Communications*, 2017, 11(11): 1706–1718.
- [22] FOUCART S, RAUHUT H. A mathematical introduction to compressive sensing[M]. New York: Birkhäuser, 2013.
- [23] SCHLEBUSCH H J, SPLETTSTOSSER W. On a conjecture of J. L. C. sanz and T. S. Huang[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1985, 33(6): 1628–1630.