

关于星匹配数的图能量下界

王蒙蒙, 何常香

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 对图 G 的能量 $\varepsilon(G)$ 与 $K_{1,s}$ -匹配数 $\mu_s(G)$ 之间的关系进行了研究。证明了对于一般图 G 有 $\varepsilon(G) \geq 2\sqrt{s}\mu_s(G)$ 成立, 进一步地, 若其子图满足一定的条件, 则有 $\varepsilon(G) \geq 2\sqrt{s}\mu_s(G) + \frac{\sqrt{5}}{5}c_1(G)$, 其中 $c_1(G)$ 表示 G 中的奇圈数。还证明了若 n 阶树 T 的最大度小于等于 3, 有 $\varepsilon(T) \geq (s+1)\mu_s(T) - 1$ 成立。

关键词: 图; 能量; $K_{1,s}$ -匹配

中图分类号: O 157.5 **文献标志码:** A

Lower bounds of graph energy in terms of star matching number

WANG Mengmeng, HE Changxiang

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The relationship between the energy $\varepsilon(G)$ and the $K_{1,s}$ -matching number $\mu_s(G)$ of a graph G was focused. It is proved that $\varepsilon(G) \geq 2\sqrt{s}\mu_s(G)$. Furthermore, if each subgraph of G satisfies some special conditions, then $\varepsilon(G) \geq 2\sqrt{s}\mu_s(G) + \frac{\sqrt{5}}{5}c_1(G)$, where $c_1(G)$ is the number of odd cycles in G . In addition, if the maximum degree of the tree T is no more than 3, then $\varepsilon(T) \geq (s+1)\mu_s(T) - 1$.

Keywords: graph; energy; $K_{1,s}$ -matching

1 问题的提出

设 G 是一个简单图, 即没有环和重边的图, $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 和 $E(G)$ 分别表示 G 的顶点集和边集, 并且令 $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$ 表示 G 的邻接矩阵。其中, 若 $v_i v_j \in E(G)$, $a_{ij} = 1$; 否则, $a_{ij} = 0$ 。对于 $V(G)$ 的任一子集 U , 以 $G - U$ 表示删除 U 中的顶点以及与之相关联的所有边而得到的图。若 H 是 G 的诱导子图, 将用 $G - H$ 来表示诱导子图 $G - V(H)$ 。 G 的子图 $G - H$ 也称为 H 在 G 中的补图, 记为 $\bar{H}$ 。若 $x \in$

$V(G - H)$, 以 $H + x$ 表示 G 中 $V(H) \cup \{x\}$ 的诱导子图。若 E_0 是 $E(G)$ 的子集, 则 $G - E_0$ 表示在 G 中去掉 E_0 中所有边得到的子图。若 $G - E_0$ 不连通, 则称 E_0 为 G 的割集。

本文用 P_n , C_n , K_n 分别表示恰有 n 个顶点的路、圈、完全图, $K_{s,n-s}$ 表示二部点数分别为 s 和 $n-s$ 的完全二部图。在 G 中无公共顶点的 2 个星图 $K_{1,s}$ 称为是相互独立的。 G 中相互独立的 $K_{1,s}$ 构成的集合称为 G 的一个 $K_{1,s}$ -匹配^[1]。例如, $K_{1,1}$ -匹配就是一般的匹配, $K_{1,2}$ -匹配就是 P_3 -匹配。 G 的所有

收稿日期: 2019-04-18

第一作者: 王蒙蒙 (1995-), 女, 硕士研究生。研究方向: 图论。 E-mail: 2806489516@qq.com

通信作者: 何常香 (1979-), 女, 教授。研究方向: 图论。 E-mail: changxianghe@hotmail.com

$K_{1,s}$ -匹配中含有 $K_{1,s}$ 的最大个数称为 G 的 $K_{1,s}$ -匹配数, 记为 $\mu_s(G)$, 并称此 $K_{1,s}$ -匹配为 G 的最大 $K_{1,s}$ -匹配。若点 v 是 G 中的某个最大 $K_{1,s}$ -匹配 $M(G)$ 中的顶点, 则称 $M(G)$ 饱和了点 v 。若最大 $K_{1,s}$ -匹配饱和了 G 中的全部顶点, 则称 G 有完美 $K_{1,s}$ -匹配。

图 G 的能量 $\varepsilon(G)$ 定义为 G 的邻接矩阵 $A(G)$ 的所有特征值的绝对值之和。除了文献[2]中得到的关于匹配数的图能量下界, 还有以下常见的结论:

a. 文献[3]证明了恰有 m 条边的所有图 G 的能量 $\varepsilon(G) \geq 2\sqrt{m}$, 文献[4]将这个结果拓展到有向图 D , 证明了有向图 D 的能量 $\varepsilon(D) \geq \sqrt{2c_2}$, 其中, c_2 是 D 中长度为2的闭途径的个数。

b. 文献[5]证明了: 若 G 是具有 m 条边的二分图, 设 $\pm\mu_1, \dots, \pm\mu_N$ 为 G 的特征值, 令 $M_k = 2 \sum_{i=1}^N \mu_i^k$, 若 $q = \frac{M_4}{2}$, 则 $\varepsilon(G) \geq 2m \sqrt{\frac{m}{q}}$, 即 q 是4阶谱矩的一半时此式成立。

c. 文献[6]证明了: 若 G 不含长为4的圈作为诱导子图, 则 $\varepsilon(G) \geq 2 \frac{\sqrt{2\delta\Delta}}{2(\delta+\Delta)-1} \sqrt{2mn}$, 其中, n 为 G 的顶点数, m 为 G 的边数, δ 和 Δ 分别为 G 的最小度和最大度。

d. 文献[7]证明了: 若 G 为至少有一条边的图, 设 r, s, t 为任意偶数, 若 $4r = s + t + 2$, 则

$$\varepsilon(G) \geq \frac{M_r^2(G)}{\sqrt{M_s(G)M_t(G)}} \quad (1)$$

式中, $M_k(G)$ 为 G 中长为 k 的闭途径的个数。

2 关于 $K_{1,s}$ -匹配数的图能量下界

设 $S \subseteq V(G)$, $\bar{S}$ 是 S 在 $V(G)$ 中的补集, 以 $[S, \bar{S}]$ 表示一端在 S 中、另一端在 $\bar{S}$ 中的所有边构成的集合。文献[8]中得到了关于图能量的2个结论, 为引理1和引理2。

引理1^[8] 若 E_0 是简单图 G 的割集, 则 $\varepsilon(G - E_0) \leq \varepsilon(G)$ 。

引理2^[8] 设 H 是图 G 的诱导子图, $E_0 = [H, \bar{H}]$, 若 E_0 非空, 并且 E_0 中的所有边都恰与 $\bar{H}$ 中的某一个点相关联, 则 $\varepsilon(G - E_0) < \varepsilon(G)$ 。

引理3 设 G_1 和 G_2 是 G 的2个互补诱导子图, 若 $[v(G_1), v(G_2)]$ 是一个星图, 且 G_1 有完美 $K_{1,s}$ -匹配, 则 $\mu_s(G) = \mu_s(G_1) + \mu_s(G_2)$ 。

证明 设 $M_1(G), M_2(G)$ 分别是 G_1 和 G_2 的最大 $K_{1,s}$ -匹配, 则 $M_1(G) \cup M_2(G)$ 是 G 的一个 $K_{1,s}$ -匹配, 故有 $\mu_s(G) \geq \mu_s(G_1) + \mu_s(G_2)$ 。

现证明 $\mu_s(G) \leq \mu_s(G_1) + \mu_s(G_2)$ 。

设 $M(G)$ 是 G 的一个最大 $K_{1,s}$ -匹配, 由于 $M(G) \cap E(G_1)$ 至多覆盖 G_1 中的所有点, 所以, 对于 $M(G) \cap E(G_1)$ 中 $K_{1,s}$ -匹配的个数(记为 $s(M(G) \cap E(G_1))$), 有 $s(M(G) \cap E(G_1)) \leq \mu_s(G_1)$ 。类似地, 有 $s(M(G) \cap E(G_2)) \leq \mu_s(G_2)$ 。

令 $E_0 = [v(G_1), v(G_2)]$, 若 $M(G) \cap E_0 = \emptyset$, 则

$$\begin{aligned} \mu_s(G) &= s(M(G)) = s(M(G) \cap E(G_1)) + \\ &\quad s(M(G) \cap E(G_2)) \leq \mu_s(G_1) + \mu_s(G_2) \end{aligned}$$

若 $M(G) \cap E_0 \neq \emptyset$, 由于 G_1 有完美 $K_{1,s}$ -匹配, 而 $M(G) \cap E_0 \neq \emptyset$, 故 G_1 中有点未被 $M(G) \cap E(G_1)$ 覆盖, 所以, $M(G) \cap E(G_1)$ 不是 G_1 的最大 $K_{1,s}$ -匹配, 从而有 $s(M(G) \cap E(G_1)) < \mu_s(G_1)$, 即 $s(M(G) \cap E(G_1)) \leq \mu_s(G_1) - 1$, 故有

$$\begin{aligned} \mu_s(G) &= s(M(G)) \leq \mu_s(G_1) - 1 + 1 + \\ &\quad \mu_s(G_2) = \mu_s(G_1) + \mu_s(G_2) \end{aligned}$$

综上所述, 有 $\mu_s(G) = \mu_s(G_1) + \mu_s(G_2)$ 成立。

定理1 设图 G 的 $K_{1,s}$ -匹配数为 $\mu_s(G)$, 则 $\varepsilon(G) \geq 2\sqrt{s}\mu_s(G)$, 当 G 是一些 $K_{1,s}$ 及孤立点的不交并时等号成立。

证明 设 $\rho(K_{1,s})$ 为 $K_{1,s}$ 的谱半径, 则有 $\rho(K_{1,s}) \geq \sqrt{s}$ 。由于 $K_{1,s}$ 恰有1个正特征值, 故有 $\varepsilon(K_{1,s}) = 2\rho(K_{1,s}) \geq 2\sqrt{s}$ 。

由于 G 的 $K_{1,s}$ -匹配数为 $\mu_s(G)$, G 经适当去割集后可得到 $\mu_s(G)$ 个顶点不相交的 $K_{1,s}$ 。由引理1可知

$$\varepsilon(G) \geq \mu_s(G) \varepsilon(K_{1,s}) = 2\mu_s(G) \sqrt{s}$$

故 $\varepsilon(G) \geq 2\sqrt{s}\mu_s(G)$ 成立。

当图 $G = K_{1,s}$ 时, 有等式 $\varepsilon(G) = 2\sqrt{s}$ 成立。根据上述结论可知, 当 G 是一些 $K_{1,s}$ 及孤立点的不交并时, 不等式 $\varepsilon(G) \geq 2\mu_s(G) \sqrt{s}$ 等号成立, 即 $\varepsilon(G) = 2\mu_s(G) \sqrt{s}$ 。

若图 G 中含有奇圈, 当 G 满足 $\varepsilon(G) \geq 2\sqrt{s}\mu_s(G) + \frac{\sqrt{5}}{5}c_1(G)$ 时, 称其满足能量 $K_{1,s}$ -匹配条件。

引理4 设 H, K 是图 G 的2个互补诱导子图, 如果 G 满足如下条件之一:

a. $\mu_s(G) = \mu_s(H) + \mu_s(K)$, $c_1(G) = c_1(H) + c_1(K)$, 且 H, K 都满足能量 $K_{1,s}$ -匹配条件;

b. $\mu_s(G) = \mu_s(H) + \mu_s(K)$, $c_1(G) = c_1(H) + c_1(K) + 1$, K 满足能量 $K_{1,s}$ -匹配条件, 且

$$\varepsilon(H) \geq 2\sqrt{s}\mu_s(H) + \frac{\sqrt{5}}{5}c_1(H) + \frac{\sqrt{5}}{5}$$

则

$$\varepsilon(G) \geq 2\sqrt{s}\mu_s(G) + \frac{\sqrt{5}}{5}c_1(G)$$

证明 a. 由于

$$\varepsilon(H) \geq 2\sqrt{s}\mu_s(H) + \frac{\sqrt{5}}{5}c_1(H)$$

$$\varepsilon(K) \geq 2\sqrt{s}\mu_s(K) + \frac{\sqrt{5}}{5}c_1(K)$$

由引理1可得

$$\varepsilon(G) \geq \varepsilon(G - E_0) = \varepsilon(H) + \varepsilon(K)$$

故有

$$\mu_s(G) = \mu_s(H) + \mu_s(K), c_1(G) = c_1(H) + c_1(K)$$

即

$$\varepsilon(G) \geq 2\sqrt{s}\mu_s(G) + \frac{\sqrt{5}}{5}c_1(G)$$

b. 设 $E_0 = [v(H), v(K)]$, 由于

$$\varepsilon(G) \geq \varepsilon(G - E_0) = \varepsilon(H) + \varepsilon(K)$$

$$\varepsilon(H) \geq 2\sqrt{s}\mu_s(H) + \frac{\sqrt{5}}{5}c_1(H) + \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\varepsilon(K) \geq 2\sqrt{s}\mu_s(K) + \frac{\sqrt{5}}{5}c_1(K)$$

又

$$\mu_s(G) = \mu_s(H) + \mu_s(K), c_1(G) = c_1(H) + c_1(K) + 1$$

故有

$$\varepsilon(G) \geq 2\sqrt{s}(\mu_s(H) + \mu_s(K)) +$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5}(c_1(H) + c_1(K) + 1) = 2\sqrt{s}\mu_s(G) + \frac{\sqrt{5}}{5}c_1(G)$$

即

$$\varepsilon(G) \geq 2\sqrt{s}\mu_s(G) + \frac{\sqrt{5}}{5}c_1(G)$$

定理2 设图 G 恰有 $c_1(G)$ 个奇圈, 且 G 的圈 (若有的话) 是两两顶点不相交的, 设 G_1, G_2 是 G 的 2 个互补诱导子图, 且满足如下条件:

a. $E_0 = [v(G_1), v(G_2)]$ 是一个星图;

b. E_0 中的边均是 G 的割边;

c. G_1 有完美 $K_{1,s}$ -匹配;

d. G_1, G_2 满足能量 $K_{1,s}$ -匹配条件;

则

$$\varepsilon(G) \geq 2\sqrt{s}\mu_s(G) + \frac{\sqrt{5}}{5}c_1(G)$$

证明 由于 $E_0 = [v(G_1), v(G_2)]$ 是一个星图, 且 E_0 中的边不属于任何一个圈, 又 G_1 有完美 $K_{1,s}$ -匹配, 那么, 由引理3可得

$$\mu_s(G) = \mu_s(G_1) + \mu_s(G_2), c_1(G) = c_1(G_1) + c_1(G_2)$$

又由引理4可知

$$\varepsilon(G_1) \geq 2\sqrt{s}\mu_s(G_1) + \frac{\sqrt{5}}{5}c_1(G_1)$$

$$\varepsilon(G_2) \geq 2\sqrt{s}\mu_s(G_2) + \frac{\sqrt{5}}{5}c_1(G_2)$$

结合不等式

$$\varepsilon(G) \geq \varepsilon(G - E_0) = \varepsilon(G_1) + \varepsilon(G_2)$$

有

$$\varepsilon(G) \geq 2\sqrt{s}\mu_s(G) + \frac{\sqrt{5}}{5}c_1(G)$$

引理5 若 n 阶图 G 的边数为 m , 长为 4 的圈的个数为 q , $d_1, d_2, \dots, d_n$ 为 G 的度序列, 则

$$\varepsilon^2(G) \geq \frac{8m^3}{2 \sum_{i=1}^n d_i^2 - 2m + 8q}$$

证明 由式(1)可知, 当 $r = t = 2, s = 4$ 时, 对一般图 G , 有 $\varepsilon(G) \geq \sqrt{\frac{(M_2(G))^3}{M_4(G)}}$ 。由于 $M_k(G)$ 的值为图 G , 为 k 的闭途径的个数, 故有

$$M_2(G) = 2m \quad (2)$$

$$M_4(G) = 2 \sum_{i=1}^n d_i^2 - 2m + 8q \quad (3)$$

若 G 的度序列记为 $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, 记最大度为 $\Delta(G)$, 则有

$$d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2 \leq 2m(\Delta(G) + 1) - n\Delta(G)$$

由式(2)和式(3)可得

$$\varepsilon^2(G) \geq \frac{(M_2(G))^3}{M_4(G)} = \frac{8m^3}{2 \sum_{i=1}^n d_i^2 - 2m + 8q} \quad (4)$$

故结论成立。

若 G 是一棵最大度不超过 3 的树, 可以得到这类图的关于星匹配数的能量下界。

定理3 设 T 是一棵最大度不超过 3 的树, 则 $\varepsilon(T) \geq (s+1)\mu_s(T) - 1$ 。

证明 对于 n 阶树 T , 由引理5可知, 当 $\Delta(T) \leq 3$ 时, $q = 0, m = n - 1$,

由式(4)和 $\sum_{i=1}^n d_i^2 \leq 2m(\Delta(G) + 1) - n\Delta(G)$, 令 $d = \Delta(G)$, 可得

(下转第 367 页)

Geomembranes, 2016, 44(2): 157–169.

- [17] VAN EEKELEN S J M, BEZUIJEN A, VAN DUIJNEN P, et al. Piled embankments using geosynthetic reinforcement in the Netherlands: design, monitoring & evaluation[C]//Proceedings of the 17th International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering. Alexandria, Egypt: IOS Press, 2009: 1690–1693.
- [18] BRIANÇON L, SIMON B. Performance of pile-supported embankment over soft soil: full-scale experiment[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2012, 138(4): 551–561.
- [19] 郑俊杰, 曹文昭, 董同新, 等. 中低压缩性土地区桩承式加筋路堤现场试验研究[J]. *岩土工程学报*, 2015, 37(9): 1549–1555.
- [20] ZHANG C L, GUAN L J, LIU X F, et al. Arching in geogrid-reinforced pile-supported embankments over silty

clay of medium compressibility: field data and analytical solution[J]. *Computers and Geotechnics*, 2016, 77: 11–25.

- [21] 陈洋, 李国维, 杨涛, 等. 桩间距和桩帽宽度影响土拱效应的现场试验[J]. *上海理工大学学报*, 2017, 39(2): 170–175.
- [22] ZHUANG Y, ELLIS E, YU H S. Three-dimensional finite-element analysis of arching in a piled embankment[J]. *Géotechnique*, 2012, 62(12): 1127–1137.
- [23] SATIBI S. Numerical analysis and design criteria of embankments on floating piles[D]. Stuttgart: University of Stuttgart, 2009.
- [24] ZHUANG Y. Numerical modelling of arching in piled embankments including the effects of reinforcement and subsoil[D]. Nottingham: University of Nottingham, 2009.

(编辑: 石 瑛)

(上接第 319 页)

$$\begin{aligned}\varepsilon^2(T) &\geq \frac{4m^3}{\sum_{i=1}^n d_i^2 - m} \geq \frac{4(n-1)^3}{(2d+1)(n-1) - dn} = \\ &\frac{4(n-1)^3}{d(n-2) + n - 1} \geq \frac{4(n-1)^3}{(d+1)(n-1)} = \\ &\frac{4(n-1)^2}{d+1} \geq (n-1)^2\end{aligned}$$

即 $\varepsilon(T) \geq n-1$ 。

若 T 有完美 $K_{1,s}$ -匹配时, 则 $\mu_s(T) = m(T) = \frac{n}{s+1}$ (其中, 树 T 最大度为 s , 即 $\Delta(T) = s$)。若 T 无完美 $K_{1,s}$ -匹配, 则有 $\mu_s(T) < \frac{n}{s+1}$, 故对任意 n 阶树 T , 均有 $\mu_s(T) \leq \frac{n}{s+1}$, 即 $n \geq (s+1)\mu_s(T)$, 从而 $\varepsilon(T) \geq n-1$, 故 $\varepsilon(T) \geq (s+1)\mu_s(T) - 1$ 。

参考文献:

- [1] 何常香, 刘世琼. 星匹配数与 (无符号) 拉普拉斯特征值[J]. *高校应用数学学报*, 2015, 30(3): 333–339.
- [2] WONG D, WANG X L, CHU R. Lower bounds of graph energy in terms of matching number[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2018, 549(2): 276–286.

- [3] CAPOROSSI G, CVETKOVIĆ D, GUTMAN I, et al. Variable neighborhood search for extremal graphs. 2. Finding graphs with extremal energy[J]. *Journal of Chemical Information and Modeling*, 1999, 39(6): 984–996.
- [4] RADA J. Lower bounds for the energy of digraphs[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2010, 432(9): 2174–2180.
- [5] RADA J, TINEO A. Upper and lower bounds for the energy of bipartite graphs[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2004, 289(2): 446–455.
- [6] ZHOU B. Lower bounds for the energy of qusdrangle-free graphs[J]. *MATCH Commun Math Comput Chem*, 2006, 55(1): 91–94.
- [7] ZHOU B, GUTMAN I, DE LA PEÑA J A, et al. On spectral moments and energy of graphs[J]. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 2007, 57(1): 183–191.
- [8] DAY J, SO W. Graph energy change due to edge deletion[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2008, 428(8/9): 2070–2078.

(编辑: 石 瑛)