

加筋对桩承式路堤荷载传递影响的三维有限元模拟

杨 涛¹, 盛志成¹, 陆振荣²

(1. 上海理工大学 环境与建筑学院, 上海 200093; 2. 同济大学建筑设计研究院(集团)有限公司, 上海 200092)

摘要: 建立了土拱效应分析的三维弹塑性有限元模型, 采用数值模拟方法研究了桩承式加筋路堤的荷载传递机理。计算结果表明, 路堤底部加筋增强了路堤荷载向桩帽上转移的能力。影响路堤荷载向桩帽上转移主要是土拱效应, 其次是加筋的拉膜效应。土拱效应与路堤加筋与否关系不大。加筋拉膜效应在土拱效应发挥后开始发挥, 桩帽边缘处底部加筋的拉应力最大。加筋拉膜效应随着加筋刚度和桩间距的增加而增大, 随着加筋位置的升高而减小。与底部加筋的桩承式路堤相比, 对于给定的桩帽-土差异沉降, 双层加筋桩承式路堤中加筋的拉膜效应增大, 第一层加筋的拉应力减小。第二层加筋铺设位置越高, 其拉应力越小, 最大拉应力点向桩帽中心方向移动。

关键词: 桩承式加筋路堤; 荷载传递; 土拱效应; 拉膜效应; 有限元法

中图分类号: TU 473 **文献标志码:** A

3D finite element simulation of the influence of reinforcements on load transfer behaviors of a piled embankment

YANG Tao¹, SHENG Zhicheng¹, LU Zhenrong²

(1. School of Environment and Architecture, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China;

2. Tongji Architectural Design (Group) Co., Ltd., Shanghai 200092, China)

Abstract: A 3D elastic-plastic finite element model for simulating the soil arching effect in a piled embankment with reinforcements was developed. The load transfer mechanism of the piled embankment with reinforcements was investigated numerically in detail by finite element method. The results show that the embedding of reinforcements in the piled embankment enhances the ability to transfer embankment loads to pile caps. Comparing the magnitude of transferred embankment load, much more embankment loads are transferred to pile caps by the soil arching effect than by the membrane effect. The installation of reinforcements has little influence on the soil arching effect. The membrane effect of the reinforcements appears after the full mobilization of the soil arching effect. The maximum tensile stress in the basal reinforcements occurs at the edge of the pile cap. The membrane effect increases with increasing the reinforcement stiffness and pile spacing, but reduces with increasing the installation height of reinforcements. For a given differential settlement between the pile cap and surrounding soil, the total membrane effect of a piled embankment with two layers of reinforcements is greater than that

收稿日期: 2019-06-15

基金项目: 广东省交通运输厅科技项目 (2011-02-021)

第一作者: 杨 涛(1962-), 男, 教授。研究方向: 复杂地基处理技术。E-mail: shyangtao@163.com

of a basal reinforced piled embankment. The tensile stress in the first layer of reinforcements is smaller than that in the basal reinforcement in the basal reinforced piled embankment. The higher the location of the second layer of reinforcements, the smaller the tensile stress, and the maximum tensile stress point will move towards to the center of the pile cap.

Keywords: *piled embankment with reinforcements; load transfer; soil arching effect; membrane effect; finite element method*

桩承式加筋路堤是新型的高速公路(铁路)软基处理技术,具有施工方便、工期短、侧向变形和工后沉降小等突出优点,已在国内外得到大量应用。

Han 等^[1]指出,桩承式加筋路堤较之传统的无筋桩承式路堤可降低桩的置换率超过 20%,经济效益明显。较之无筋桩承式路堤,桩承式加筋路堤承载机理要复杂得多,桩帽与桩间土间的荷载传递不仅受土拱效应的影响,还与加筋的拉膜效应密切相关。Hewlett 等^[2]进行了无筋桩承式路堤三维土拱效应模型试验,据此提出了球形土拱形态和相应的土拱效应计算模型。此后,许多学者对无筋桩承式路堤中土拱形态和效应等问题进行了较为深入的研究^[3-8]。对于桩承式加筋路堤,Chew 等^[9]和 Van Eekelen 等^[10]通过室内模型试验,实测了加筋的拉膜效应和相邻二桩条带间加筋表面土压力的分布,发现加筋增强了路堤荷载向桩帽上的传递,加筋上土压力呈倒三角形分布。曹卫平等^[11-12]、蔡德钧等^[13]和陈仁朋等^[14]进行了桩承式加筋路堤室内二、三维模型试验,研究了桩帽-土应力比随加筋拉膜效应、路堤高度和桩帽宽度等的变化规律,发现加筋对荷载向桩帽转移作用明显,路堤高度较小时更为显著。费康等^[15]通过桩承式加筋路堤三维模型试验,初步研究了加筋布设层数对土拱效应和路堤沉降等的影响。Chen 等^[16]进行了铁路桩承式路堤足尺模型试验,量测了加筋的拉力并与英国规范 BS8006 计算结果进行了比较。一些学者^[17-21]还进行了桩承式加筋路堤现场试验,通过桩帽和桩间土压力、加筋拉力、路堤沉降和地基土超静孔隙水压力等的观测,评价土拱效应、加筋拉膜效应及路堤沉降和地基土的固结特性,分析了桩帽净距对荷载传递的影响。

目前,桩承式加筋路堤承载机理的研究取得了大量成果,但由于带帽桩-地基土-路堤填料-加筋四者的相互作用非常复杂,人们对于加筋在路

堤荷载传递中的作用机制,特别是其位置和层数的影响尚缺乏深刻的认知。有鉴于此,本文采用三维弹塑性有限元数值方法,研究加筋、加筋刚度、加筋层数和布设位置等对路堤荷载传递特性的影响,研究成果对于揭示加筋拉膜效应机理、完善桩承式加筋路堤设计理论具有重要意义。

1 有限元模型

在大面积填筑的桩承式加筋路堤中,带方形桩帽的桩正方形布设,桩径为 d ,桩间距为 S ,桩帽边长为 a 。路堤高度为 H ,加筋距基底的距离为 z_1 。采用 Zhuang 等^[22]提出的简化数值模拟方法建立桩承式加筋路堤土拱分析的三维有限元模型:在桩承式加筋路堤的中部取出四根桩及桩间土上部的路堤填土进行分析,如图 1 所示。利用对称性,取其 1/4(即 ABCD 以上路堤)建立有限元模型,模型底部 EFGBCD 区域以下为桩间土,AEFG 区域以下为桩帽。桩间土对路堤的支撑作用通过人为控制作用于桩间土上方路堤底部支撑应力 σ_s 来模拟。 σ_s 的数值由路堤自重应力开始逐渐减小,使桩帽-土间产生差异沉降从而引发土拱效应和加筋的拉膜效应。当 σ_s 减小到桩帽-土差异沉降足够

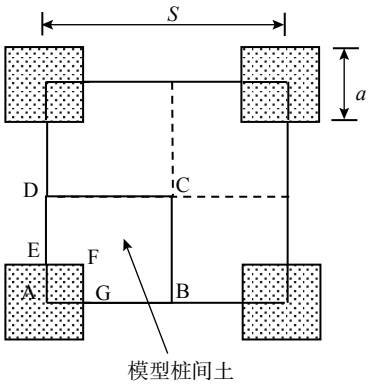


图 1 有限元模型平面图
Fig. 1 Plan sketch of the FEM model

大时可形成完整土拱。模型的基准尺寸如下: $H=5\text{ m}$, $S=2.5\text{ m}$, $a=1.0\text{ m}$, 格栅厚度 0.001 m 。单层土工格栅加筋时, 格栅距基底的距离 $z_1=0.1\text{ m}$ 。模型的 4 个竖直边界面都是对称面, 垂直于边界面的水平位移受到约束, 底部 1/4 桩帽区域受到竖直方向约束, 底部桩间土区域各方向自由。模型表面为路堤顶面, 各方向自由。

采用大型有限元软件 ABAQUS 进行桩承式加筋路堤数值分析。Satibi^[23]发现, 数值法分析桩承式路堤土拱效应时可采用简单的摩尔-库仑模型来模拟无粘性路堤土。故本文无粘性路堤填土采用摩尔-库仑模型, 模型参数如表 1 所示。土工格栅采用线弹性模型, 其基准刚度取 $J=2\text{ MN/m}$, 泊松比 $\mu=0.3$ 。路堤土采用 8 结点单元(C3D8)模拟, 单元总数 20 000 个, 结点总数 22 491 个。土工格栅采用 4 结点膜单元(M3D4 模拟)。考虑到格栅孔眼与路堤填土的“嵌锁”作用, 土工格栅与路堤填土采用“埋入式”接触。图 2 为基准尺寸的单层加筋桩承式路堤有限元模型网格示意图。

表 1 路堤填土材料参数

Tab.1 Parameters of embankment fill material

重度 $\gamma/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-3})$	初始侧压 力系数 K_0	弹性模量 E/MPa	泊松 比 μ	凝聚力 c/kPa	内摩擦角 $\varphi/(^{\circ})$
17	$1-\sin\varphi$	25	0.2	1.0	30

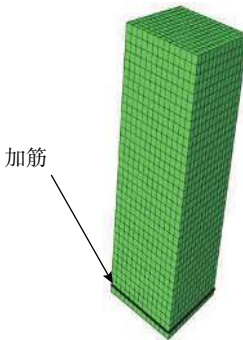


图 2 有限元网格
Fig.2 Finite element mesh

2 数值模型验证

为了验证本文有限元模型的合理性, 选择底部单层加筋的桩承式路堤进行算例分析。路堤高度 $H=3.5\text{ m}$ 。方形桩帽正方形布设, 宽度 $a=1.0\text{ m}$ 。桩间距 $S=2.5\text{ m}$ 。格栅刚度 $J=6\text{ MN/m}$, 铺设在桩帽以上 $z_1=0.1\text{ m}$ 处。路堤填土计算参数如表 1 所

示。图 3 给出了本文有限元模型(FEM)计算的桩间土竖向支撑应力 σ_s 随四桩中心 C 点沉降 δ_s 的变化曲线与 Zhuang^[24]有限元计算结果的比较。从图 3 中可见, 本文的有限元计算结果与 Zhuang^[24]的计算结果非常接近, 说明本文建立的有限元模型具有足够的精算精度, 可以用来进行桩承式加筋路堤承载机理的模拟分析。

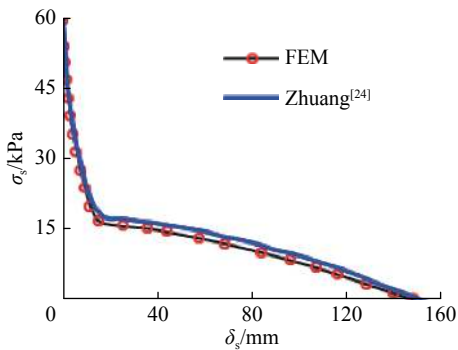


图 3 σ_s - δ_s 曲线的比较
Fig.3 Comparison of σ_s - δ_s curves

3 数值分析结果

3.1 单层加筋路堤

图 4 给出了底部加筋的桩承式路堤归一化的桩间土支撑应力 $\sigma_s/(\gamma H)$ 与归一化的桩帽-土最大差异沉降 $\delta_s/(S-a)$ 的关系曲线。为了便于比较, 图中还给出了无筋桩承式路堤的计算结果。从图 4 中可以看出, 当控制桩间土支撑应力 σ_s 从自重应力 $\gamma H=85\text{ kPa}$ 开始逐渐减小时, 桩帽-土差异沉降 δ_s 逐渐增大, 土拱效应逐渐发挥。无筋桩承式路堤在 $\delta_s/(S-a)=2.1\%$ 达到最大土拱状态, 此阶段桩承式无筋和加筋路堤的 $\sigma_s/\gamma H$ - $\delta_s/(S-a)$ 曲线几乎重合, 这说明加筋路堤最大土拱点对应的桩间土竖向应力 σ_G 与无筋路堤情况下的数值非常接近, 约为 21.7 kPa 。最大土拱点以前加筋的拉膜效应近乎尚未发挥, 据此可以推断: 桩承式加筋路堤土拱效应先发挥, 加筋拉膜效应在土拱效应完全发挥后才开始发挥, 土拱效应与无筋路堤相同。图 4 还表明, 由土拱效应转移到桩帽的桩间土应力为 63.3 kPa 。随着加筋拉膜效应的逐渐发挥, 桩间土支撑应力 σ_s 随桩帽-土差异沉降 δ_s 的增加近乎呈线性减小, 拉膜效应使桩间土承担的竖向应力在 $\sigma_G=21.7\text{ kPa}$ 基础上进一步减小, 拉膜效应远小于土拱效应。加筋拉膜效应的发挥与加筋和桩间土

的刚度有关,只有当桩间土刚度过小使桩帽-土差异沉降足够大($\delta_s/(S-a)=15.86\%$)时桩间土支撑应力才可能减小到零,此时桩间土不再承担路堤荷载,路堤荷载完全由桩帽和加筋承担。通常情况下桩承式加筋路堤中桩帽-土差异沉降达不到这样大的数值,桩间土总要承担部分路堤荷载。

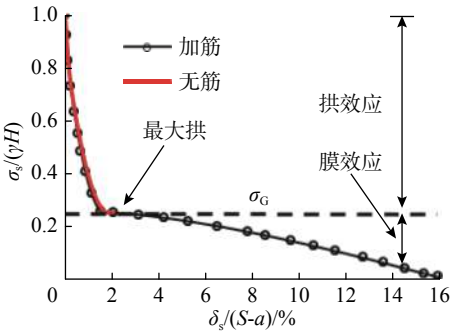


图4 $\sigma_s/(\gamma H)-\delta_s/(S-a)$ 关系曲线
Fig.4 $\sigma_s/(\gamma H)-\delta_s/(S-a)$ curve

图5给出了无筋和底部加筋桩承式路堤桩帽荷载分担比 β 随归一化桩帽-土差异沉降 $\delta_s/(S-a)$ 的变化曲线。从图5中可见, $\delta_s/(S-a)$ 小于2.1%时无筋与加筋桩承式路堤的桩帽荷载分担比曲线近乎完全重合,再一次说明加筋的拉膜效应是在土拱效应完全发挥后才开始发挥的。土拱效应完全发挥时桩帽荷载分担比达到78.1%。显然,土拱效应远大于加筋拉膜效应。

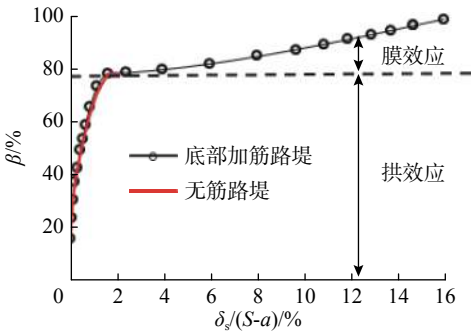


图5 $\beta-\delta_s/(S-a)$ 曲线的比较
Fig.5 Comparison of $\beta-\delta_s/(S-a)$ curves

图6给出了不同格栅刚度情况下单层底部加筋桩承式路堤的 $\sigma_s \sim \delta_s$ 曲线。从图6中可见,加筋刚度的变化对土拱效应的影响很小,但会影响加筋拉膜效应的发挥:格栅刚度越大,桩间土不承担路堤荷载($\sigma_s=0$)时需要的桩帽-土差异沉降 δ_s 数值越小。这就意味着对于给定的桩帽-土差异沉降 δ_s ,加筋刚度越大,加筋拉膜效应发挥得越大。

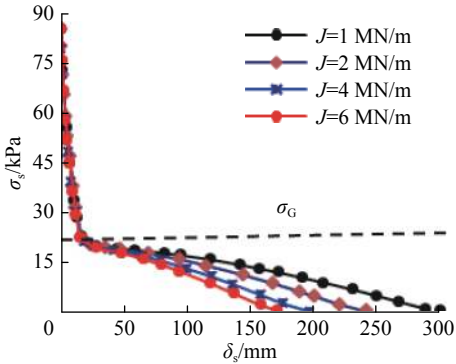


图6 格栅刚度对 $\sigma_s-\delta_s$ 曲线的影响
Fig.6 Effect of the stiffness of geogrid on $\sigma_s-\delta_s$ curves

图7给出了 $\sigma_s=0$ 时不同格栅刚度下底部加筋桩承式路堤四桩对角截面(过点A和C的竖直平面,见图1)上格栅拉应力 T 分布曲线,横坐标沿AC方向,桩帽中心A为原点, x 表示距A点的距离。从图7中可见,桩帽上方加筋的拉应力要大于桩间土上方加筋的拉应力,最大拉应力点出现在桩帽边缘附近。格栅拉应力随其刚度的增加而增大,桩帽上方格栅的拉应力的增幅较之桩间土上方格栅的更为显著。格栅刚度 J 从1 MN/m增加到6 MN/m,最大拉应力从110.8 MPa增大到167 MPa。

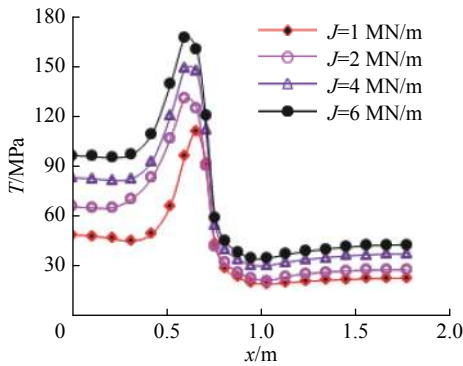


图7 格栅刚度对格栅拉应力的影响
Fig.7 Effect of the stiffness of geogrid on its tensile stress

图8给出了桩间距 S 对底部加筋桩承式路堤 $\sigma_s-\delta_s$ 曲线的影响, S 取2.0,2.5,3.0和3.5 m, $\sigma_{Gi}(i=1,2,3,4)$ 为各间距下最大土拱时桩间土的竖向支撑应力。从图8中可以看出,桩间距从 $S=2$ m增加到 $S=3.5$ m,最大土拱时桩间土的支撑应力从 $\sigma_{G1}=14.3$ kPa增加到 $\sigma_{G4}=31.7$ kPa。由于桩间土面积的增加,桩帽荷载分担比由87.4%降低到65.8%,说明路堤高度一定时土拱效应随桩间距的增加而逐渐减小,最大拉膜效应逐渐增大。从图8中还可以看出,桩的间距越大,土拱效应完

全发挥需要的桩帽-土差异沉降越大,达到 $\sigma_s=0$ 需要的桩帽-土差异沉降也越大。桩间距从2 m增加到3.5 m,土拱完全发挥时桩帽-土差异沉降从17 mm增加到41.4 mm, $\sigma_s=0$ 时差异沉降从137 mm增加到518 mm。

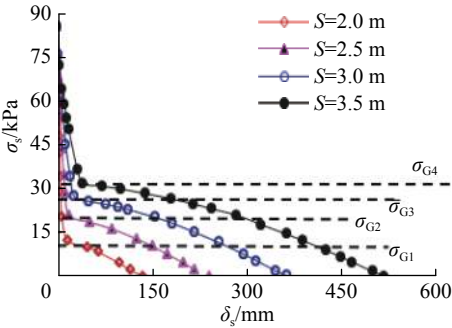


图8 桩间距对 σ_s - δ_s 曲线的影响
Fig.8 Effect of the pile spacing on σ_s - δ_s curves

为了研究单层加筋路堤中加筋位置的影响,图9给出了土工格栅铺设高度 z_1 分别为0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 1.0 m情况下的 σ_s - δ_s 曲线。图9表明,加筋的铺设位置对土拱效应的影响不大,但对加筋的拉膜效应有较大的影响。 $z_1=0.1$ m时桩间土支撑应力 σ_s 可以降低到零,加筋的拉膜效应可以发挥到最大。 z_1 超过0.3 m以后,即使格栅和地基土的刚度较小,桩间土的支撑应力 σ_s 也不会降低到零。对于给定的桩帽-土差异沉降,加筋的拉膜效应随着加筋位置的升高而逐渐减弱,当 $z_1 \geq 0.7$ m时, σ_s - δ_s 曲线与无筋桩承式路堤相应的曲线非常接近,说明此时加筋不会产生拉膜效应,对荷载传递没有影响。

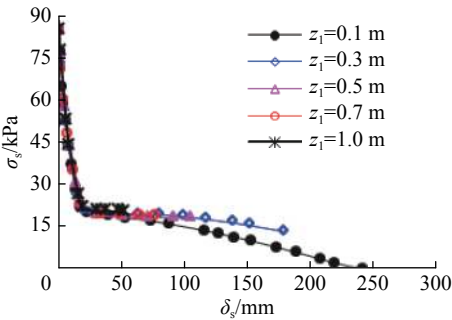


图9 z_1 取不同值时的 σ_s - δ_s 曲线
Fig.9 σ_s - δ_s curves with different values of z_1

3.2 双层加筋路堤

图10给出了双层加筋桩承式路堤的 σ_s - δ_s 曲线,第二层格栅位于基底以上的距离 z_2 分别取

0.3, 0.5, 0.7, 1.0 m。图10中也给出了单层底部加筋路堤相应的计算结果,此时 $z_1=0.1$ m。图10表明,对于底部加筋的单层和双层加筋桩承式路堤,如果加筋和地基土的刚度足够小,桩间土的支撑应力可以减小到零。单层、双层加筋桩承式路堤最大土拱出现时桩间土支撑应力 σ_G 的数值近乎相同,说明加筋层数的增加并没有显著改变桩承式加筋路堤的土拱效应。计算发现,达到最大土拱点以前单层、双层加筋路堤的 σ_s - δ_s 曲线几乎重合,超过最大土拱点以后,双层加筋路堤的 σ_s - δ_s 曲线移至单层加筋路堤曲线以下,这说明桩帽-土差异沉降相同时双层加筋路堤较之单层加筋路堤的拉膜效应要大。随着 z_2 的增加,双层加筋路堤的 σ_s - δ_s 曲线逐渐上移,当 $z_2 > 0.7$ m时,双层与单层加筋路堤的 σ_s - δ_s 曲线几乎重合,说明此时第二层格栅失去加筋作用,它不再产生拉膜效应。图10还表明,随着第二层格栅位置的升高,桩间土不承担路堤荷载($\sigma_s=0$)时需要的桩帽-土差异沉降逐渐增大。

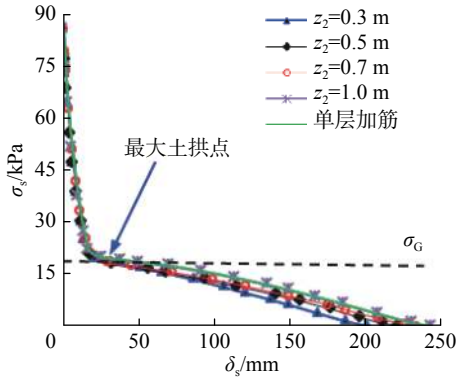


图10 双层加筋路堤 σ_s - δ_s 曲线
Fig.10 σ_s - δ_s curves for the piled embankment with two layers of geogrid

图11给出了 $\sigma_s=0$ 时单层、双层加筋桩承式路堤中四桩对角截面上底部加筋拉应力分布曲线的比较,此时底部加筋都铺设在 $z_1=0.1$ m处,双层加筋路堤中的第二层加筋铺设高度 $z_2=0.3$ m。图12给出了 $\sigma_s=0$ 时双层加筋路堤中第二层加筋铺设位置的变化对其自身拉应力分布曲线的影响。从这两幅图中可以看出,较之单层加筋桩承式路堤,双层加筋路堤中底部加筋的拉应力要小。随着第二层加筋铺设位置的升高,双层加筋路堤中第二层加筋的拉应力逐渐减小,最大拉应力点从桩帽边缘向桩帽中心移动。

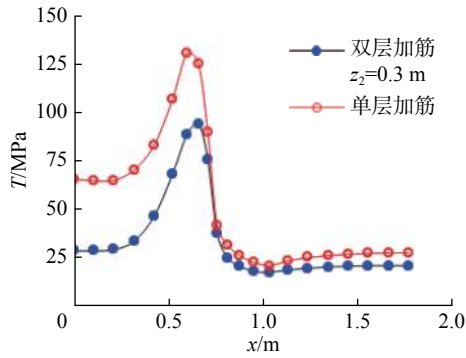


图 11 底层格栅拉应力曲线的比较

Fig.11 Comparison of tensile stresses in the basal geogrids

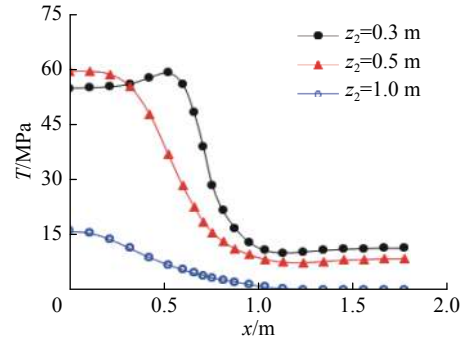


图 12 第二层格栅拉应力分布曲线

Fig.12 Tensile stress curves in the second layer geogrid with different values of z_2

4 结 论

- a. 路堤荷载从桩间土向桩帽传递，土拱效应是主要的，加筋拉膜效应是次要的。土拱效应不受加筋铺设位置、加筋刚度和加筋层数的影响。加筋拉膜效应在土拱效应完全发挥后开始发挥。
- b. 加筋拉膜效应的发挥取决于桩帽-土间的差异沉降。桩间土不承担路堤荷载时加筋拉膜效应发挥最大。
- c. 加筋最大拉膜效应随加筋刚度和桩间距的增加而增大，随加筋铺设高度的增加而减小。
- d. 桩帽上方加筋的拉应力要大于桩间土上方加筋的拉应力，底部加筋时桩帽边缘处加筋的拉应力最大。加筋拉应力随加筋刚度的增加而增大。
- e. 较之单层底部加筋桩承式路堤，底部加筋的双层加筋桩承式路堤加筋的最大拉膜效应增大。双层加筋路堤中底部加筋的拉应力小于单层加筋桩承式路堤中相同位置处加筋的拉应力。第二层加筋的铺设位置越高，其拉应力越小，且最大拉应力点向桩帽中心移动。

参考文献:

[1] HAN J, GABR M A. Numerical analysis of geosynthetic-reinforced and pile-supported earth platforms over soft soil[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2002, 128(1): 43–53.

[2] HEWLETT W J, RANDOLPH M F. Analysis of piled embankments[J]. *Ground Engineering*, 1988, 21(3): 12–18.

[3] HONG W P, LEE J H, LEE K W. Load transfer by soil arching in pile-supported embankments[J]. *Soils and Foundations*, 2007, 47(5): 833–843.

[4] ELLIS E A, ASLAM R. Arching in piled embankments: comparison of centrifuge tests and predictive methods[J]. *Ground Engineering*, 2009, 42(6): 28–31.

[5] JENCK O, DIAS D, KASTNER R. Three-dimensional numerical modeling of a piled embankment[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2009, 9(3): 102–112.

[6] 余闯, 刘松玉, 杜广印, 等. 桩承式路堤土拱效应的三维数值模拟[J]. *东南大学学报 (自然科学版)*, 2009, 39(1): 58–62.

[7] CHEN R P, XU Z Z, CHEN Y M, et al. Field tests on pile-supported embankments over soft ground[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2010, 136(6): 777–785.

[8] 芮瑞, 黄成, 夏元友, 等. 砂填料桩承式路堤土拱效应模型试验[J]. *岩土工程学报*, 2013, 35(11): 2082–2089.

[9] CHEW S H, PHOON H L. Geotextile reinforced piled embankment-full-scale model tests[C]//*Proceedings of the 3rd Asian Regional Conference on Geosynthetics*. 2004: 661–668.

[10] VAN EEKELN S J M, BEZUIJEN A, LODDER H J, et al. Model experiments on piled embankments. Part I[J]. *Geotextiles and Geomembranes*, 2012, 3(2): 69–81.

[11] 曹卫平, 陈仁朋, 陈云敏. 桩承式加筋路堤土拱效应试验研究[J]. *岩土工程学报*, 2007, 29(3): 436–441.

[12] 曹卫平, 胡伟伟. 桩承式加筋路堤三维土拱效应试验研究[J]. *岩土力学*, 2014, 35(2): 351–358.

[13] 蔡德钧, 闫宏业, 叶阳升, 等. 桩网支承路基结构中土拱效应及网垫受力的模型试验研究[J]. *铁道学报*, 2011, 33(11): 85–92.

[14] 陈仁朋, 汪炎卫, 陈金苗, 等. 桩承式加筋路堤土拱及格栅受力模型试验研究[J]. *地下空间与工程学报*, 2014, 10(6): 1275–1280.

[15] 费康, 陈毅, 王军军. 加筋形式对桩承式路堤工作性状影响的试验研究[J]. *岩土工程学报*, 2012, 34(12): 2312–2317.

[16] CHEN R P, WANG Y W, YE X W, et al. Tensile force of geogrids embedded in pile-supported reinforced embankment: a full-scale experimental study[J]. *Geotextiles and*

Geomembranes, 2016, 44(2): 157–169.

[17] VAN EEKELEN S J M, BEZUIJEN A, VAN DUIJNEN P, et al. Piled embankments using geosynthetic reinforcement in the Netherlands: design, monitoring & evaluation[C]//Proceedings of the 17th International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering. Alexandria, Egypt: IOS Press, 2009: 1690-1693.

[18] BRIANÇON L, SIMON B. Performance of pile-supported embankment over soft soil: full-scale experiment[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2012, 138(4): 551–561.

[19] 郑俊杰, 曹文昭, 董同新, 等. 中低压缩性土地区桩承式加筋路堤现场试验研究[J]. *岩土工程学报*, 2015, 37(9): 1549–1555.

[20] ZHANG C L, GUAN L J, LIU X F, et al. Arching in geogrid-reinforced pile-supported embankments over silty clay of medium compressibility: field data and analytical solution[J]. *Computers and Geotechnics*, 2016, 77: 11–25.

[21] 陈洋, 李国维, 杨涛, 等. 桩间距和桩帽宽度影响土拱效应的现场试验[J]. *上海理工大学学报*, 2017, 39(2): 170–175.

[22] ZHUANG Y, ELLIS E, YU H S. Three-dimensional finite-element analysis of arching in a piled embankment[J]. *Géotechnique*, 2012, 62(12): 1127–1137.

[23] SATIBI S. Numerical analysis and design criteria of embankments on floating piles[D]. Stuttgart: University of Stuttgart, 2009.

[24] ZHUANG Y. Numerical modelling of arching in piled embankments including the effects of reinforcement and subsoil[D]. Nottingham: University of Nottingham, 2009.

(编辑: 石 瑛)

(上接第 319 页)

$$\begin{aligned}\varepsilon^2(T) &\geq \frac{4m^3}{\sum_{i=1}^n d_i^2 - m} \geq \frac{4(n-1)^3}{(2d+1)(n-1) - dn} = \\ &\frac{4(n-1)^3}{d(n-2) + n - 1} \geq \frac{4(n-1)^3}{(d+1)(n-1)} = \\ &\frac{4(n-1)^2}{d+1} \geq (n-1)^2\end{aligned}$$

即 $\varepsilon(T) \geq n-1$ 。

若 T 有完美 $K_{1,s}$ -匹配时, 则 $\mu_s(T) = m(T) = \frac{n}{s+1}$ (其中, 树 T 最大度为 s , 即 $\Delta(T) = s$)。若 T 无完美 $K_{1,s}$ -匹配, 则有 $\mu_s(T) < \frac{n}{s+1}$, 故对任意 n 阶树 T , 均有 $\mu_s(T) \leq \frac{n}{s+1}$, 即 $n \geq (s+1)\mu_s(T)$, 从而 $\varepsilon(T) \geq n-1$, 故 $\varepsilon(T) \geq (s+1)\mu_s(T) - 1$ 。

参考文献:

[1] 何常香, 刘世琼. 星匹配数与 (无符号) 拉普拉斯特征值 [J]. *高校应用数学学报*, 2015, 30(3): 333–339.

[2] WONG D, WANG X L, CHU R. Lower bounds of graph energy in terms of matching number[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2018, 549(2): 276–286.

[3] CAPOROSSI G, CVETKOVIĆ D, GUTMAN I, et al. Variable neighborhood search for extremal graphs. 2. Finding graphs with extremal energy[J]. *Journal of Chemical Information and Modeling*, 1999, 39(6): 984–996.

[4] RADA J. Lower bounds for the energy of digraphs[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2010, 432(9): 2174–2180.

[5] RADA J, TINEO A. Upper and lower bounds for the energy of bipartite graphs[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2004, 289(2): 446–455.

[6] ZHOU B. Lower bounds for the energy of qusdrangle-free graphs[J]. *MATCH Commun Math Comput Chem*, 2006, 55(1): 91–94.

[7] ZHOU B, GUTMAN I, DE LA PEÑA J A, et al. On spectral moments and energy of graphs[J]. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 2007, 57(1): 183–191.

[8] DAY J, SO W. Graph energy change due to edge deletion[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2008, 428(8/9): 2070–2078.

(编辑: 石 瑛)