

七阶 Kaup-Kupershmidt 方程的 经典李群分析和精确解

卢毅辉, 胡恒春

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 为丰富七阶 Kaup-Kupershmidt (KK) 方程的解, 利用经典李群分析得到了七阶 Kaup-Kupershmidt (KK) 方程对应的无穷小, 进而得到了两种不同形式的约化方程, 最后, 通过对约化方程进行求解, 得到了有理函数解、雅可比椭圆函数解、双曲函数解、三角函数解和幂级数解, 同时, 给出了幂级数解的收敛性的证明。

关键词: 七阶 KK 方程; 经典李群分析; 精确解

中图分类号: O 175.24 **文献标志码:** A

Classical Lie group analysis and exact solutions of the seventh-order Kaup-Kupershmidt equation

LU Yihui, HU Hengchun

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The classical Lie group analysis was used to obtain the corresponding infinitesimals of the seventh-order Kaup-Kupershmidt (KK) equation, and two different reduction equations were obtained. Many different forms of exact solutions of the seventh-order KK equation were achieved by solving the reduction equations, such as the rational function solution, the Jacobi elliptic function solution, the hyperbolic function solutions, the trigonometric function solutions and the power series solution, meanwhile, the convergence of the power series in the solution was proved.

Keywords: seventh-order Kaup-Kupershmidt equation; classical Lie group analysis; exact solutions

1 问题的提出

非线性发展方程可以描述自然界中的各种非线性现象, 并且在物理、化学和生物等学科中都有广泛的应用。因此, 研究这些非线性发展方程

的解及解的性质具有重要的理论和现实意义。到目前为止, 学者们已经提出许多有效的方法来研究非线性模型的可积性质和精确解, 例如: 反散射方法、Hirota 双线性方法、扩展的 $\tanh$ 方法、指数展开法、Painlevé 分析法等^[1-10]。

收稿日期: 2019-06-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11471215)

第一作者: 卢毅辉 (1992-), 男, 硕士研究生。研究方向: 孤立子理论与可积系统。E-mail: 656040309@qq.com

通信作者: 胡恒春 (1976-), 女, 副教授。研究方向: 孤立子理论与可积系统。E-mail: hhengchun@163.com

KdV 型方程是最经典的可积模型之一, 它可以描述浅水波、等离子体中的离子声波和大气或海洋中的内波。同时, KdV 方程族中描述表面波和内部波、重力-毛细管波以及水波与浮冰间相互作用的高阶可积元等问题也得到了广泛的研究^[11]。

这里, 研究高阶 KdV 型方程之一的七阶 Kaup-Kupershmidt(KK)方程^[12-13], KK 方程形式如下:

$$u_t + 2016u^3u_x + 630u_x^3 + 2268uu_xu_{2x} + 504u^2u_{3x} + 252u_{2x}u_{3x} + 147u_xu_{4x} + 42uu_{5x} + u_{7x} = 0 \quad (1)$$

这是七阶非线性方程

$$u_t + au^3u_x + bu_x^3 + cuu_xu_{2x} + du^2u_{3x} + eu_{2x}u_{3x} + fu_xu_{4x} + guu_{5x} + u_{7x} = 0 \quad (2)$$

通过固定常数

$$a = 2016, b = 630, c = 2268, d = 504, e = 252, f = 147, g = 42$$

得到的一个特殊情形。方程(2)被 Pomeau^[14]用来讨论标准 KdV 方程在奇异摄动作用下的结构稳定性, 并且是在小波幅下, 通过对欧拉方程在三阶以下的简单波运动的渐近展开而得到的^[15]。此外, 高阶色散项和非线性的相互作用在物理学中有重要应用^[16]。不同于 KdV 方程, 方程(2)还较好地描述了较短波长陡波的演化过程。在文献[17-18]中已给出了方程(1)的 Cole-Hopf 变换、Lax 对、Hirota 双线性形式和孤子解。目前为止, 未见通过经典李群分析来研究方程(1)的文献。

本文通过群变换求得了方程(1)对应的无穷小及相应的约化方程, 并采用不同的求解方法对约化方程进行求解, 得到了有理函数解、雅可比椭圆函数解、双曲函数解、三角函数解和幂级数解, 最后, 对后期工作进行了展望。

2 七阶 KK 方程的对称和对称约化

首先, 考虑单参数李群的无穷小变换

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x + \varepsilon\xi(x, t, u), t \rightarrow t + \varepsilon\tau(x, t, u), \\ u &\rightarrow u + \varepsilon\eta(x, t, u) \end{aligned} \quad (3)$$

式中, ε 为无穷小参数。

该变换群的向量场可以表示为

$$V = \xi(x, t, u)\partial_x + \tau(x, t, u)\partial_t + \eta(x, t, u)\partial_u \quad (4)$$

式中, ξ, τ, η 为 x, t, u 的待定函数。

方程(1)的对称方程为

$$\text{Pr } V^{(7)}(\Delta)|_{\Delta=0} = 0$$

式中, $\text{Pr } V^{(7)}$ 表示 V 的七阶延拓, 并且

$$\Delta = u_t + 2016u^3u_x + 630u_x^3 + 2268uu_xu_{2x} + 504u^2u_{3x} + 252u_{2x}u_{3x} + 147u_xu_{4x} + 42uu_{5x} + u_{7x}$$

这个延拓 $\text{Pr } V$ 依赖于方程

$$\text{Pr } V^{(7)} = \eta\partial u + \eta^x\partial u_x + \eta^{2x}\partial u_{2x} + \cdots + \eta^{7x}\partial u_{7x}$$

系数函数 $\eta^{kx}(k=1, 2, \cdots, 7)$ 由

$$\eta^{kx} = D_x^k(\eta - \tau u_t - \xi u_x) + \tau u_{kxt} + \xi u_{(k+1)x}, k = 1, 2, \cdots, 7$$

在这里 D_x 表示全微分算子, 定义为

$$D_x = \partial x + u_x\partial u + u_{tx}\partial u_t + u_{2x}\partial u_x + \cdots$$

将上述延拓公式代入方程(1)的李对称条件, 然后令 u 及其偏导数的系数为0, 得到以下超定方程组:

$$\begin{aligned} \xi_t &= \xi_u = \xi_{xx} = \tau_x = \tau_u = \eta_x = \eta_t = \eta_{uu} = 0, \\ \eta + u\eta_u + u\tau_t - 3u\xi_x &= 0, \eta_u - 5\xi_x + \tau_t = 0, \\ u\tau_t - u\xi_x + 3\eta &= 0, u\tau_t + 2\eta - 3u\xi_x = 0, \\ \tau_t - 7\xi_x &= 0, \tau_t + 2\eta_u - 3\xi_x = 0 \end{aligned}$$

求解得到

$$V = (c_1x + c_3)\frac{\partial}{\partial x} + (7c_1t + c_2)\frac{\partial}{\partial t} + (-2c_1u)\frac{\partial}{\partial u} \quad (5)$$

那么, 方程(1)的无穷小生成子构成由以下线性无关算子张成的三维李代数:

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial x}, V_2 = \frac{\partial}{\partial t}, V_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + 7t\frac{\partial}{\partial t} - 2u\frac{\partial}{\partial u}$$

经过直接计算, 3个算子的李括号运算是封闭的, 具体结果如下:

$$[V_1, V_1] = [V_2, V_2] = [V_3, V_3] = 0,$$

$$[V_1, V_2] = -[V_2, V_1] = 0,$$

$$[V_1, V_3] = -[V_3, V_1] = V_1,$$

$$[V_2, V_3] = -[V_3, V_2] = 7V_2$$

方程(1)的对应于无穷小生成子的单参数群 g_i

$$\begin{aligned} g_1 &: (x + \varepsilon, t, u), g_2 : (x, t + \varepsilon, u), \\ g_3 &: (xe^\varepsilon, te^{7\varepsilon}, ue^{-2\varepsilon}) \end{aligned} \quad (6)$$

式中: g_1, g_2 表示方程(1)解的时空平移不变性; g_3 表示方程(1)解的伽利略伸缩不变性。从式(6)容易看出方程(1)有解。

$$u_1 = f(x - \varepsilon, t), u_2 = f(x, t - \varepsilon), u_3 = e^{-2\varepsilon}f(xe^{-\varepsilon}, te^{-7\varepsilon})$$

函数 f 是方程(1)的任意已知解。接下来, 从特征方程

$$\frac{dx}{c_1x + c_3} = \frac{dt}{7c_1t + c_2} = \frac{du}{-2c_1u}$$

入手可以求得相似变换和相似变量,进而得到方程(1)的约化方程。下面通过选取不同的任意常数分别讨论:

a. 当 $c_1=0$ 时,得方程(1)对应的相似变量和相似变换

$$z=x-kt, u(x,t)=f(z), (k=c_3/c_2, c_2\neq 0)$$

且 $f(z)$ 满足常微分方程

$$\begin{aligned} &-kf'+2\,016f^3f'+630f'^3+2\,268ff'f''+ \\ &504f^2f^{(3)}+252f''f^{(3)}+147f'f^{(4)}+ \\ &42ff^{(5)}+f^{(7)}=0 \end{aligned} \tag{7}$$

b. 当 $c_1\neq 0$ 时,得到对应的相似变量和相似变换

$$z=\frac{x+\frac{c_3}{c_1}}{\left(t+\frac{c_2}{7c_1}\right)^{\frac{1}{7}}}, u(x,t)=\frac{f(z)}{\left(t+\frac{c_2}{7c_1}\right)^{\frac{2}{7}}}$$

且 $f(z)$ 满足常微分方程

$$\begin{aligned} &-\frac{2}{7}f-\frac{1}{7}zf'+2\,016f^3f'+630f'^3+ \\ &2\,268ff'f''+504f^2f^{(3)}+252f''f^{(3)}+ \\ &147f'f^{(4)}+42ff^{(5)}+f^{(7)}=0 \end{aligned} \tag{8}$$

3 约化方程的求解

上文通过群变换得到了方程(1)对应的无穷小和约化方程,本节将用扩展 tanh 方法、微分方程展开法、幂级数法来寻求约化方程的精确解。

3.1 利用扩展的 tanh 方法来求解约化方程(7)

该算法由 Wazwa 在文献 [4] 中提出。假设方程(7)的解可以写成如下形式:

$$f(z)=\sum_{i=-n}^n A_i H(z)^i$$

这里 $H(z)$ 应满足黎卡提方程

$$H'(z)=1-H^2(z)$$

且有解

$$H(z)=\tanh z$$

平衡方程(7)中最高阶导数项与最高阶非线性

$$\text{b. } k=-\frac{72h_0h_2P_2^4+63P_2^2P_1^2h_2^2+216P_2^3P_1^2h_0+189P_2P_1^4h_2+18P_2^3+P_1h_1h_2+8P_2^3h_2^3-27P_2^4+h_1^2+189h_1^6}{6P_2^3}$$
$$h_3=-4P_1, h_4=-2P_2, P_0=-\frac{1}{12}\frac{3P_1^2+2P_2h_2}{P_2}$$

式中, h_0, h_1, h_2, P_1, P_2 为任意常数。任意常数的不同选取对应于不同的精确解,得出如下结果。

项,可以确定正整数 n 的值, A_i 是待定的系数。主项平衡得到 $n=2$,因此,方程(7)的解具有形式

$$\begin{aligned} f(z) &= A_{-2}\tanh^{-2}z + A_{-1}\tanh^{-1}z + \\ &A_0 + A_1\tanh z + A_2\tanh^2z \end{aligned} \tag{9}$$

将方程(9)代入方程(7),并且令 $\tanh^i(z)$ 的系数等于0,得到3种类型的精确解:

$$\text{a. } u(x,t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\tanh^2\left(x+\frac{4}{3}t\right)$$
$$\text{b. } u(x,t)=-\frac{1}{2}\tanh^{-2}\left(x+\frac{256}{3}t\right)+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\tanh^2\left(x+\frac{256}{3}t\right)$$
$$\text{c. } u(x,t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\tanh^{-2}\left(x+\frac{4}{3}t\right)$$

3.2 利用微分方程展开法来求解方程(7)的精确解

假设方程(7)的解有以下形式

$$f(z)=\sum_{i=1}^n P_i\phi^i(z)+P_0$$

ϕ' 是下面一阶常微分方程的解

$$\phi'(z)=\varepsilon\sqrt{\sum_{j=0}^r h_j\phi^j} \tag{10}$$

式中: $\varepsilon=\pm 1$; r 是一个正整数; $P_i, h_0, \cdots, h_r$ 是待定常数。

通过平衡方程(7)中的 $f^{(7)}$ 和 $ff^{(5)}$,可以得到 n 和 r 的关系

$$r=n+2$$

这里,仅考虑 $r=4$,那么 $n=2$,因此方程(7)的解可以表示为

$$f=P_2\phi^2+P_1\phi+P_0 \tag{11}$$

取 $\varepsilon=1$,将方程(11)和(10)代入方程(7)并令 $\phi^i\phi'$ 的系数为0,可以得到相应的代数方程,解之得:

$$\text{a. } k=-\frac{1}{48}h_3^3-\frac{9}{32}h_3^2h_0+\frac{3}{32}h_1h_2h_3, P_0=\frac{1}{24}h_2,$$
$$P_1=-\frac{1}{8}h_3, P_2=h_4=0$$

式中, h_0, h_1, h_2, h_3 为任意常数。

情形 1

$$\text{a. } h_0=h_1=h_4=0, h_2>0$$

$$f = -\frac{1}{24}h_2 + \frac{1}{8}h_2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{h_2}}{2}z\right)$$

$$\text{b. } h_0 = h_1 = h_4 = 0, h_2 < 0$$

$$f = -\frac{1}{24}h_2 + \frac{1}{8}h_2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{-h_2}}{2}z\right)$$

$$\text{c. } h_0 = h_1 = h_4 = h_2 = 0$$

$$f = -\frac{1}{8z^2}$$

$$\text{d. } h_4 = 0, h_3 > 0$$

$$f = -\frac{1}{24}h_2 + \frac{1}{8}h_3 \wp\left(\frac{\sqrt{h_3}}{2}z, g_2, g_3\right)$$

式中, $z = x - kt$, $g_2 = -4h_1/h_3$, $g_3 = -4h_0/h_3$, 且 $\wp$ 表示魏尔斯特拉斯雅可比椭圆函数。

情形 2 取 $P_1 = 0$, 那么 $h_3 = 0$, 当 $h_1 = h_3 = 0$ 时, 有以下 7 组雅可比椭圆函数解:

$$\text{a. } h_2 = 2m^2 - 1, h_0 = 1 - m^2, h_4 = -m^2$$

$$f = -\frac{1}{6}h_2 - \frac{1}{2}h_4(\operatorname{cn}(z))^2$$

$$\text{b. } h_2 = 2m^2 - 1, h_0 = -m^2, h_4 = 1 - m^2$$

$$f = -\frac{1}{6}h_2 - \frac{1}{2}h_4(\operatorname{nc}(z))^2$$

$$\text{c. } h_2 = 2m^2 - 1, h_0 = 1, h_4 = (m^2 - 1)m^2$$

$$f = -\frac{1}{6}h_2 - \frac{1}{2}h_4(\operatorname{sd}(z))^2$$

$$\text{d. } h_2 = 2m^2 - 1, h_0 = (m^2 - 1)m^2, h_4 = 1$$

$$f = -\frac{1}{6}h_2 - \frac{1}{2}h_4(\operatorname{ds}(z))^2$$

$$\text{e. } h_2 = \frac{1-2m^2}{2}, h_0 = h_4 = \frac{1}{4}$$

$$f = -\frac{1}{6}h_2 - \frac{1}{2}h_4(\operatorname{ns}(z) \pm \operatorname{cs}(z))^2$$

$$\text{f. } h_2 = \frac{1-2m^2}{2}, h_0 = h_4 = \frac{1-m^2}{4}$$

$$f = -\frac{1}{6}h_2 - \frac{1}{2}h_4(\operatorname{nc}(z) \pm \operatorname{sc}(z))^2$$

$$\text{g. } h_2 = \frac{1-2m^2}{2}, h_0 = \frac{m^2}{4}, h_4 = \frac{1}{4}$$

$$f = -\frac{1}{6}h_2 - \frac{1}{2}h_4(\operatorname{ns}(z) \pm \operatorname{ds}(z))^2$$

对于情形 2, 也有钟状孤波解、三角函数周期解、扭状孤波解, 均可从情形 1 中通过适当的变换推导出来。此外, 当 $h_1 = h_3 = 0$, $h_0 = h_4 = 1$, $h_2 = -2$ 时, 该方法就退化为扩展的 $\tanh$ 法。

3.3 方程(8)的幂级数解

对于约化方程(8), 考虑到其复杂性, 这里用幂级数法来研究它的精确解, 即寻找以下形式的幂级数解

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \quad (12)$$

将式(12)代入方程(8), 比较 z^n 的系数, 可以得到以下递推公式

$$\begin{aligned} C_{n+7} = & -\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)} \left[-\frac{2}{7}C_n - \frac{1}{7}nC_{n+} \right. \\ & 2016 \sum_{j=0}^i \sum_{i=0}^k \sum_{k=0}^n C_j C_{i-j} C_{k-i} C_{n-k+1} (n-k+1) + \\ & 630 \sum_{i=0}^k \sum_{k=0}^n C_{i+1} C_{k-i+1} C_{n-k+1} (i+1)(k-i+1)(n-k+1) + \\ & 2268 \sum_{i=0}^k \sum_{k=0}^n C_{i+1} C_{k-i+1} C_{n-k+2} (k-i+1)(n-k+2)(n-k+1) + \\ & 504 \sum_{i=0}^k \sum_{k=0}^n C_i C_{k-i} C_{n-k+3} (n-k+3)(n-k+2)(n-k+1) + \\ & 252 \sum_{k=0}^n C_{k+2} C_{n-k+3} (k+2)(k+1)(n-k+3)(n-k+2)(n-k+1) + \\ & 147 \sum_{k=0}^n C_{k+1} C_{n-k+4} (k+1)(n-k+4)(n-k+3)(n-k+2)(n-k+1) + \\ & \left. 42 \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k+5} (n-k+5)(n-k+4)(n-k+3)(n-k+2)(n-k+1) \right] \end{aligned}$$

因此, 对于任意选定的常数 $C_i (i = 0, 1, \dots, 6)$, 序列 $\{C_n\}_{n=0}^\infty$ 的每一项都可以由递推公式唯一确定。

$$|C_{n+7}| \leq 2 \cdot 268 \left(\sum_{j=0}^i \sum_{i=0}^k \sum_{k=0}^n |C_j| |C_{i-j}| |C_{k-i}| |C_{n-k+1}| + \sum_{k=0}^n |C_k| |C_{n-k+5}| + \sum_{i=0}^k \sum_{k=0}^n |C_{i+1}| |C_{k-i+1}| |C_{n-k+1}| + \right. \\ \left. \sum_{i=0}^k \sum_{k=0}^n |C_{i+1}| |C_{k-i+1}| |C_{n-k+2}| + \sum_{i=0}^k \sum_{k=0}^n |C_i| |C_{k-i}| |C_{n-k+3}| + \sum_{k=0}^n |C_{k+2}| |C_{n-k+3}| + \right. \\ \left. \sum_{k=0}^n |C_{k+1}| |C_{n-k+4}| + |C_n| \right), n = 0, 1, 2, \dots$$

现在, 重新定义一个幂级数

$$\delta = R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n z^n$$

取 $|r_0| = |C_0|, \dots, |r_6| = |C_6|$, 且

$$r_{n+7} = 2 \cdot 268 \left(\sum_{j=0}^i \sum_{i=0}^k \sum_{k=0}^n r_j r_{i-j} r_{k-i} r_{n-k+1} + \sum_{k=0}^n r_k r_{n-k+5} + \sum_{i=0}^k \sum_{k=0}^n r_{i+1} r_{k-i+1} r_{n-k+1} + \right. \\ \left. \sum_{i=0}^k \sum_{k=0}^n r_{i+1} r_{k-i+1} r_{n-k+2} + \sum_{i=0}^k \sum_{k=0}^n r_i r_{k-i} r_{n-k+3} + \sum_{k=0}^n r_{k+2} r_{n-k+3} + \right. \\ \left. \sum_{k=0}^n r_{k+1} r_{n-k+4} + r_n \right), n = 0, 1, 2, \dots$$

容易看出 $|C_n| \leq |r_n|$ 。换句话说, 幂级数 $\delta = R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n z^n$ 是幂级数 (12) 的强级数。利用数学分析的相关知识可知幂级数 $\delta = R(z)$ 有正的收敛半径。事实上, 通过计算, 有

为了确保幂级数 (12) 的收敛性, 下面给出幂级数 (12) 的收敛性证明。

$$R(z) = r_0 + r_1 z + r_2 z^2 + r_3 z^3 + r_4 z^4 + r_5 z^5 + r_6 z^6 +$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_{n+7} z^{n+7} = r_0 + r_1 z + r_2 z^2 + r_3 z^3 + r_4 z^4 + r_5 z^5 +$$

$$r_6 z^6 + 2 \cdot 268 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \sum_{i=0}^k \sum_{k=0}^n r_j r_{i-j} r_{k-i} r_{n-k+1} + \right.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n r_k r_{n-k+5} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \sum_{k=0}^n r_{i+1} r_{k-i+1} r_{n-k+1} +$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \sum_{k=0}^n r_{i+1} r_{k-i+1} r_{n-k+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \sum_{k=0}^n r_i r_{k-i} r_{n-k+3} +$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n r_{k+2} r_{n-k+3} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n r_{k+1} r_{n-k+4} + r_n \Big) z^{n+7}$$

进一步考虑隐函数方程

$$F(z, \delta) = \delta - r_0 - r_1 z - r_2 z^2 - r_3 z^3 - r_4 z^4 - r_5 z^5 - r_6 z^6 - \\ 2 \cdot 268 [z^6 R^3 (R - r_0) + z^4 (R - r_0)^3 + z^3 (R - r_0)^2 \cdot \\ (R - r_0 - r_1 z) + z^4 R^2 (R - r_0 - r_1 z - r_2 z^2) + \\ z^2 (R - r_0 - r_1 z) (R - r_0 - r_1 z - r_2 z^2) + \\ z^2 (R - r_0) (R - r_0 - r_1 z - r_2 z^2 - r_3 z^3) + \\ z^2 R (R - r_0 - r_1 z - r_2 z^2 - r_3 z^3 - r_4 z^4) + z^7 R] = 0$$

由于 $F(z, \delta)$ 在 $(0, r_0)$ 的邻域内是解析函数且 $F(0, r_0) = 0$, $F'_\delta(0, r_0) = 1 \neq 0$, 通过隐函数定理^[19]可知, $\delta = R(z)$ 在点 $(0, r_0)$ 邻域内是解析的且有正的收敛半径, 也就是说在点 $(0, r_0)$ 邻域内幂级数 (12) 是收敛的。再由判别级数收敛的比较判别法可知, 幂级数解 (12) 是方程 (8) 的精确解, 具体表达形式如下所示:

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{C_0}{A} + \frac{C_1 z}{A} + \frac{C_2 z^2}{A} + \frac{C_3 z^3}{A} + \frac{C_4 z^4}{A} + \frac{C_5 z^5}{A} + \frac{C_6 z^6}{A} - \\
 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)} \left[-\frac{2}{7} C_n - \frac{1}{7} n C_n + \right. \\
 & 630 \sum_{i=0}^k \sum_{k=0}^n C_{i+1} C_{k-i+1} C_{n-k+1} (i+1)(k-i+1)(n-k+1) + \\
 & 2 \ 268 \sum_{i=0}^k \sum_{k=0}^n C_{i+1} C_{k-i+1} C_{n-k+2} (k-i+1)(n-k+2)(n-k+1) + \\
 & 504 \sum_{i=0}^k \sum_{k=0}^n C_i C_{k-i} C_{n-k+3} (n-k+3)(n-k+2)(n-k+1) + \\
 & 252 \sum_{k=0}^n C_{k+2} C_{n-k+3} (k+2)(k+1)(n-k+3)(n-k+2)(n-k+1) + \\
 & 147 \sum_{k=0}^n C_{k+1} C_{n-k+4} (k+1)(n-k+4)(n-k+3)(n-k+2)(n-k+1) + \\
 & \left. 42 \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k+5} (n-k+5)(n-k+4)(n-k+3)(n-k+2)(n-k+1) \right] \frac{z^{n+7}}{A}
 \end{aligned}$$

式中, $A = \left(t + \frac{c_2}{7c_1} \right)^{\frac{2}{7}}$, $z = \frac{x + \frac{c_3}{c_1}}{\left(t + \frac{c_2}{7c_1} \right)^{\frac{1}{7}}}$.

4 结 论

通过经典李群方法对七阶 KK 方程进行了研究, 得到了该方程对应的无穷小, 进而得到了不同形式的约化方程。最后, 通过求解约化方程得到了多种形式的精确解, 包括有理解、椭圆函数解、三角函数解、双曲函数解、幂级数解, 且给出了幂级数解收敛性的证明。

通过本文的分析可以看出, 在解决非线性发展方程时, 可以通过李群变换法巧妙地对原偏微分方程进行约化, 进而通过对约化方程的求解来获得原方程的解。但是随着方程维数的增加, 其约化难度将会变得困难许多。另外, 如何对得到的约化方程进行有效处理使其转化为我们熟知的方程, 亦即探讨约化方程与已知方程的联系是一个难点问题。目前对约化方程的处理大多借助于函数展开, 例如, 扩展的 tanh 展开法、Riccati 展开法、微分方程展开法、幂级数法等。但是, 能否通过某些适当的变换将约化方程巧妙地转化为我们容易解决的方程或者是否有更为有效的方法来约化方程值得今后深入研究。

参考文献:

[1] ABLOWITZ M J, CLARKSON P A. Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering[M]. Cambridge,

UK: Cambridge, 1992.

- [2] HIROTA R. Direct methods in soliton theory[M]// BULLOUGH P K, CAUDREY P J. Solitons. Berlin: Springer, 1980: 157-176.
- [3] GÓMEZ S C A, SALAS S A H. Exact solutions for a reaction diffusion equation by using the generalized tanh method[J]. *Scientia et Technica*, 2007, 13(35): 409-410.
- [4] WAZWAZ A M. The extended tanh method for new solitons solutions for many forms of the fifth-order KdV equations[J]. *Applied Mathematics and Computations*, 2007, 184(2): 1002-1014.
- [5] HE J H, ZHANG L N. Generalized solitary solution and compacton-like solution of the Jaulent-Miodek equations using the exp-function method[J]. *Physics Letters A*, 2008, 372(7): 1044-1047.
- [6] WEISS J, TABOR M, CARNEVALE G. The Painlevé property for partial differential equations[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1983, 24(3): 522-526.
- [7] WAZWAZ A M. Exact solutions for the ZK-MEW equation by using the tanh and sine-cosine methods[J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 2005, 82(6): 699-708.
- [8] ZHANG Y Y, LIU X Q, WANG G W. Symmetry reductions and exact solutions of the (2+1)-dimensional Jaulent-Miodek equation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2012, 219(3): 911-916.
- [9] BLUMAN G W, KUMEI S. Symmetries and differential equations[M]. New York: Springer Verlag, 1989.
- [10] HIROTA R. Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons[J]. *Physical Review Letters*, 1971, 27(18): 1192-1194.