

非瞬时脉冲分数阶微分方程边值问题解的存在性与唯一性

郑雯静, 贾梅, 李庭乐

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 非瞬时脉冲所描述的突变会持续停留在一个有限的时间间隔内, 这种现象在临床医学、生物工程、化学和物理等领域都普遍存在。为了能够更深刻、更精确地反映事物的变化规律, 研究了一类具有非瞬时脉冲的分数阶微分方程边值问题解的存在性与唯一性。首先, 通过建立与边值问题等价的积分方程, 定义了算子, 并证明了其全连续性; 然后, 运用 Schauder 不动点定理得到了边值问题解存在的充分条件; 最后利用压缩映射原理得到解的唯一性定理。

关键词: 非瞬时脉冲; Caputo 分数阶导数; Schauder 不动点定理; 压缩映射原理

中图分类号: O 175 **文献标志码:** A

Existence and uniqueness of solutions for boundary value problems of fractional differential equations with non-instantaneous impulses

ZHENG Wenjing, JIA Mei, LI Tingle

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The mutation described by non-instantaneous pulses will stay in a limited time interval. This phenomenon is common in clinical medicine, bioengineering, chemistry, physics and other fields. In order to reflect the change law of things more profoundly and accurately, the existence and uniqueness of solutions for a class of boundary value problems of fractional differential equations with non-instantaneous impulses were studied. The operator was defined by establishing an integral equation equivalent to the boundary value problem, and its complete continuity was proved. By using Schauder fixed point theorem, the sufficient conditions for the existence of solutions of the boundary value problems were obtained. The uniqueness theorem of solutions was obtained by using the contraction mapping principle.

Keywords: non-instantaneous impulses; Caputo derivative; Schauder fixed point theorem; contraction mapping principle

收稿日期: 2019-06-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11171220)

第一作者: 郑雯静 (1994-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 常微分方程理论及其应用. E-mail: jokerzheng0201@163.com

通信作者: 贾梅 (1963-), 女, 副教授. 研究方向: 常微分方程理论及其应用. E-mail: jiamei-usst@163.com

1 问题的提出

分数阶微分方程在流体力学、化学、控制系统、热传导等自然科学领域中有着广泛的应用,受到广为关注^[1-6]。许多实际问题在发展的某些阶段会出现脉冲现象,因此,对于分数阶脉冲微分方程的研究,取得了许多研究成果,参见文献^[7-14]。由于有些问题在某点发生突变,并且这种变化会在特定的时间区间内持续,这就是所研究的非瞬时脉冲现象。

本文研究了一类非瞬时脉冲的 Caputo 型分数阶微分方程边值问题:

$$\begin{cases} {}^c D_{s_k^+}^\alpha u(t) = f(t, u(t)), t \in (s_k, t_{k+1}], k=0, 1, 2, \dots, m \\ {}^c D_{t_k^+}^\beta u(t) = g(t, u(t)), t \in (t_k, s_k], k=1, 2, \dots, m \\ \Delta u|_{t=t_k} = Q_k(t_k, u(t_k)), \Delta u|_{t=s_k} = 0, u'(s_k^+) = u'(s_k^-) = 0, \\ k=1, 2, \dots, m, \\ u'(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中, ${}^c D_{s^+}^\alpha, {}^c D_{t^+}^\beta$ 均为 Caputo 分数阶导数, $1 < \alpha, \beta \leq 2, 0 = s_0 < t_1 < s_1 < t_2 < \dots < s_m < t_{m+1} = 1$, $J = [0, 1], J' = J \setminus \{t_1, t_2, \dots, t_m\}, f, g, Q_k: J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数, $\Delta u|_{t=t_k} = \Delta u(t_k) = u(t_k^+) - u(t_k^-), \Delta u|_{t=s_k} = \Delta u(s_k) = u(s_k^+) - u(s_k^-), k=1, 2, \dots, m$ 。

2 预备知识与引理

有关分数阶导数和积分的定义及性质,可以参见文献^[1-3]。定义空间

$$PC(J, \mathbb{R}) := \{u: J \rightarrow \mathbb{R} | u \in C(J', \mathbb{R}), u(t_k) = u(t_k^-), u(t_k^+) \text{ 存在}, k=1, 2, 3, \dots, m\}$$

取范数 $\|u\|_{PC} = \sup_{t \in [0, 1]} |u(t)|$, 则 $PC(J, \mathbb{R})$ 为 Banach 空间。

定义 1 设 $u \in PC(J, \mathbb{R})$, 若 u 满足问题 (1) 各式, 那么称 u 是边值问题 (1) 的一个解。

引理 1 对于任意给定的 $y_k \in C[0, 1], k=0, 1, \dots, m, h_k \in C[0, 1], q_k$ 为常数, 如下边值问题

$$\begin{cases} {}^c D_{s_k^+}^\alpha u(t) = y_k(t), t \in (s_k, t_{k+1}], k=0, 1, 2, \dots, m \\ {}^c D_{t_k^+}^\beta u(t) = h_k(t), t \in (t_k, s_k], k=1, 2, \dots, m \\ \Delta u|_{t=t_k} = q_k, \Delta u|_{t=s_k} = 0, u'(s_k^+) = u'(s_k^-) = 0, \\ k=1, 2, \dots, m \\ u'(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

存在唯一解

$$u(t) = \begin{cases} I_{0+}^\alpha y_0(t) - \sum_{i=1}^{m+1} I_{s_{i-1}^+ y_{i-1}}^\alpha(t_i) - \sum_{i=1}^m (I_{t_i^+}^\beta h_i(s_i) - I_{t_i^+}^{\beta-1} h_i(s_i)(s_i - t_i)) - \sum_{i=1}^m q_i, t \in [0, t_1] \\ I_{s_k^+}^\alpha y_k(t) - \sum_{i=k+1}^{m+1} I_{s_{i-1}^+ y_{i-1}}^\alpha(t_i) - \sum_{i=k+1}^m (I_{t_i^+}^\beta h_i(s_i) - I_{t_i^+}^{\beta-1} h_i(s_i)(s_i - t_i)) - \sum_{i=k+1}^m q_i, \\ t \in (s_k, t_{k+1}], k=1, 2, \dots, m-1 \\ - \sum_{i=k+1}^{m+1} I_{s_{i-1}^+ y_{i-1}}^\alpha(t_i) + I_{t_k^+}^\beta h_k(t) - I_{t_k^+}^{\beta-1} h_k(s_k)(t - t_k) - \sum_{i=k}^m I_{t_i^+}^\beta h_i(s_i) + \sum_{i=k}^m I_{t_i^+}^{\beta-1} h_i(s_i)(s_i - t_i) - \sum_{i=k}^m q_i + q_k, \\ t \in (t_k, s_k], k=1, 2, \dots, m \\ I_{s_m^+}^\alpha y_m(t) - I_{s_m^+}^\alpha y_m(1), t \in (s_m, 1] \end{cases} \quad (3)$$

证明 当 $t \in [0, t_1]$ 时, 由 ${}^c D_{0+}^\alpha u(t) = y_0(t)$ 和 $u'(0) = 0$, 得

$$u(t) = I_{0+}^\alpha y_0(t) + c_0, u(t_1) = u(t_1^-) = I_{0+}^\alpha y_0(t_1) + c_0 \quad (4)$$

当 $t \in (t_1, s_1]$ 时, 考虑边值问题

$$\begin{cases} {}^c D_{t_1^+}^\beta u(t) = h_1(t), t \in (t_1, s_1] \\ u(t_1^+) = u(t_1^-) + q_1, u'(s_1^-) = 0 \end{cases}$$

由 $D_{t_1^+}^\beta(u(t)) = h_1(t), u'(s_1^-) = 0$, 可得

$$u(t) = I_{t_1^+}^\beta h_1(t) - I_{t_1^+}^{\beta-1} h_1(s_1)(t - t_1) + d_1$$

而 $u(t_1^+) = u(t_1^-) + q_1$, 所以

$$d_1 = u(t_1^-) + q_1 = I_{0+}^\alpha y_0(t_1) + c_0 + q_1 \quad (5)$$

即

$$u(t) = I_{t_1^+}^\beta h_1(t) - I_{t_1^+}^{\beta-1} h_1(s_1)(t - t_1) + I_{0+}^\alpha y_0(t_1) + q_1 + c_0 \quad (6)$$

$$u(s_1^-) = I_{t_1^+}^\beta h_1(s_1) - I_{t_1^+}^{\beta-1} h_1(s_1)(s_1 - t_1) + I_{0+}^\alpha y_0(t_1) + q_1 + c_0 \quad (7)$$

当 $t \in (s_1, t_2]$ 时, 考虑 Cauchy 问题

$$\begin{cases} {}^c D_{s_1^+}^\alpha u(t) = y_1(t) \\ u(s_1^+) = u(s_1^-), u'(s_1^+) = 0 \end{cases}$$

由 ${}^c D_{s_1^+}^\alpha u(t) = y_1(t), u'(s_1^+) = 0$ 可得, $u(t) = I_{s_1^+}^\alpha c_1$, 所以

$$u(s_1^+) = c_1 = u(s_1^-) = I_{t_1^+}^\beta h_1(s_1) - I_{t_1^+}^{\beta-1} h_1(s_1)(s_1 - t_1) + I_{0+}^\alpha y_0(t_1) + q_1 + c_0 \quad (8)$$

故

$$u(t) = I_{s_1+}^\alpha y_1(t) + I_{t_1+}^\beta h_1(s_1) - I_{t_1+}^{\beta-1} h_1(s_1)(s_1 - t_1) + I_{0+}^\alpha y_0(t_1) + q_1 + c_0 \quad (9)$$

现在考虑当 $k = 2, 3, \dots, m$ 时的一般情况。

当 $t \in (t_k, s_k]$ 时, 由边值问题

$$\begin{cases} {}^c D_{t_k+}^\beta u(t) = h_k(t) \\ u(t_k^+) = u(t_k^-) + q_k, u'(s_k^-) = 0 \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} u(t) = I_{t_k+}^\beta h_k(t) - I_{t_k+}^{\beta-1} h_k(s_k)(t - t_k) + d_k \\ d_k = u(t_k^-) + q_k = I_{s_{k-1}+}^\alpha y_{k-1}(t_k) + c_{k-1} + q_k \end{cases} \quad (10)$$

因此,

$$u(t) = I_{t_k+}^\beta h_k(t) - I_{t_k+}^{\beta-1} h_k(s_k)(t - t_k) + I_{s_{k-1}+}^\alpha y_{k-1}(t_k) + c_{k-1} + q_k \quad (11)$$

$$u(s_k^-) = I_{t_k+}^\beta h_k(s_k) - I_{t_k+}^{\beta-1} h_k(s_k)(s_k - t_k) + I_{s_{k-1}+}^\alpha y_{k-1}(t_k) + c_{k-1} + q_k \quad (12)$$

当 $t \in (s_k, t_{k+1}]$ 时, 根据 Cauchy 问题

$$\begin{cases} {}^c D_{s_k+}^\alpha u(t) = y_k(t) \\ u(s_k^+) = u(s_k^-), u'(s_k^+) = 0 \end{cases}$$

可得其解为

$$\begin{cases} u(t) = I_{s_k+}^\alpha y_k(t) + c_k \\ u(s_k^+) = c_k = u(s_k^-) = I_{t_k+}^\beta h_k(s_k) - I_{t_k+}^{\beta-1} h_k(s_k)(s_k - t_k) + I_{s_{k-1}+}^\alpha y_{k-1}(t_k) + c_{k-1} + q_k \end{cases} \quad (13)$$

于是

$$u(t) = I_{s_k+}^\alpha y_k(t) + I_{t_k+}^\beta h_k(s_k) - I_{t_k+}^{\beta-1} h_k(s_k)(s_k - t_k) + I_{s_{k-1}+}^\alpha y_{k-1}(t_k) + c_{k-1} + q_k \quad (14)$$

由式(13)可得

$$c_k - c_{k-1} = I_{t_k+}^\beta h_k(s_k) - I_{t_k+}^{\beta-1} h_k(s_k)(s_k - t_k) + I_{s_{k-1}+}^\alpha y_{k-1}(t_k) + q_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m$$

由递推公式可得, 当 $k = 1, 2, 3, \dots, m$ 时

$$c_k = \sum_{i=1}^k (I_{t_i+}^\beta h_i(s_i) - I_{t_i+}^{\beta-1} h_i(s_i)(s_i - t_i) + I_{s_{i-1}+}^\alpha y_{i-1}(t_i) + q_i) + c_0 \quad (15)$$

由边界条件 $u(1) = 0$, 可得

$$0 = u(1) = I_{s_m+}^\alpha y_m(1) + c_m = I_{s_m+}^\alpha y_m(1) + \sum_{i=1}^m (I_{t_i+}^\beta h_i(s_i) - I_{t_i+}^{\beta-1} h_i(s_i)(s_i - t_i) + I_{s_{i-1}+}^\alpha y_{i-1}(t_i) + q_i) + c_0$$

所以,

$$c_m = -I_{s_m+}^\alpha y_m(1), c_0 = -\sum_{i=1}^{m+1} I_{s_{i-1}+}^\alpha y_{i-1}(t_i) - \sum_{i=1}^m (I_{t_i+}^\beta h_i(s_i) - I_{t_i+}^{\beta-1} h_i(s_i)(s_i - t_i) + q_i) \quad (16)$$

代入式(15), 得

$$c_k = -\sum_{i=k+1}^m (I_{t_i+}^\beta h_i(s_i) - I_{t_i+}^{\beta-1} h_i(s_i)(s_i - t_i) + q_i) - \sum_{i=k+1}^{m+1} I_{s_{i-1}+}^\alpha y_{i-1}(t_i), \quad k = 1, 2, \dots, m-1 \quad (17)$$

将式(16)和式(17)分别代入式(4), (6), (9), (11), (14), 可得式(3)。证毕。

令

$$\chi(x, y, z) = \begin{cases} 1, & x \leq z \leq y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$W_1(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}.$$

$$\begin{cases} \chi(0, t, s)(t-s)^{\alpha-1} - \sum_{i=1}^{m+1} \chi(s_{i-1}, t_i, s)(t_i-s)^{\alpha-1}, \\ 0 \leq t \leq t_1, 0 \leq s \leq 1 \\ \chi(s_k, t, s)(t-s)^{\alpha-1} - \sum_{i=k+1}^{m+1} \chi(s_{i-1}, t_i, s)(t_i-s)^{\alpha-1}, \\ s_k < t \leq t_{k+1}, 0 \leq s \leq 1, k = 1, 2, \dots, m-1 \\ - \sum_{i=k+1}^{m+1} \chi(s_{i-1}, t_i, s)(t_i-s)^{\alpha-1}, t_k < t \leq s_k, 0 \leq s \leq 1, \\ k = 1, 2, \dots, m \\ \chi(s_m, t, s)(t-s)^{\alpha-1} - \chi(s_m, 1, s)(1-s)^{\alpha-1}, \\ s_m < t \leq 1, 0 \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (18)$$

$$W_2(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}.$$

$$\begin{cases} - \sum_{i=1}^m \chi(t_i, s_i, s)(s_i-s)^{\beta-2}((2-\beta)s_i + (\beta-1)t_i - s), \\ 0 \leq t \leq t_1, 0 \leq s \leq 1, \\ - \sum_{i=k+1}^m \chi(t_i, s_i, s)(s_i-s)^{\beta-2}((2-\beta)s_i + (\beta-1)t_i - s), \\ s_k < t \leq t_{k+1}, 0 \leq s \leq 1, k = 1, 2, \dots, m-1 \\ \chi(t_k, t, s)(t-s)^{\beta-1} - \sum_{i=k}^m \chi(t_i, s_i, s)(s_i-s)^{\beta-2} \\ ((2-\beta)s_i + (\beta-1)t_i - s) - (\beta-1)\chi(t_k, s_k, s) \cdot \\ (t-t_k)(s_k-s)^{\beta-2}, t_k < t \leq s_k, \\ 0 \leq s \leq 1, k = 1, 2, 3, \dots, m \\ 0, s_m < t \leq 1, 0 \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (19)$$

定义算子 $T, A, B, G: PC(J, \mathbb{R}) \rightarrow PC(J, \mathbb{R})$,

$$Au(t) = \int_0^1 W_1(t, s) f(s, u(s)) ds$$

$$Bu(t) = \int_0^1 W_2(t, s) g(s, u(s)) ds$$

$$Gu(t) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^m Q_i(t_i, u(t_i)), & t \in [0, t_1] \\ -\sum_{i=k+1}^m Q_i(t_i, u(t_i)), & t \in (t_k, t_{k+1}], \\ k = 1, 2, \dots, m-1 \\ 0, & t \in (t_m, 1] \end{cases}$$

$$Tu(t) = Au(t) + Bu(t) + Gu(t)$$

则 $T: PC(J, \mathbb{R}) \rightarrow PC(J, \mathbb{R})$ 。

引理 2 由式 (18) 和 (19) 定义的函数 $W_1(t, s)$, $W_2(t, s)$, 当 $t, s \in [0, 1]$ 时满足

$$|W_1(t, s)| \leq \frac{m+2}{\Gamma(\alpha)}, \quad |W_2(t, s)| \leq \frac{2(m+1)}{\Gamma(\beta)}$$

证明 当 $0 \leq t \leq t_1, 0 \leq s \leq 1$ 时,

$$|W_1(t, s)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(|\chi(0, t, s)(t-s)^{\alpha-1}| + \left| \sum_{i=1}^{m+1} \chi(s_{i-1}, t_i, s)(t_i-s)^{\alpha-1} \right| \right) \leq \frac{m+2}{\Gamma(\alpha)}$$

当 $s_k < t \leq t_{k+1}, 0 \leq s \leq 1, k = 1, 2, \dots, m-1$ 时,

$$|W_1(t, s)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(|\chi(s_k, t, s)(t-s)^{\alpha-1}| + \left| -\sum_{i=k+1}^{m+1} \chi(s_{i-1}, t_i, s)(t_i-s)^{\alpha-1} \right| \right) < \frac{m+2}{\Gamma(\alpha)}$$

当 $t_k < t \leq s_k, 0 \leq s \leq 1, k = 1, 2, \dots, m$ 时,

$$|W_1(t, s)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\left| \sum_{i=k+1}^m \chi(s_{i-1}, t_i, s)(t_i-s)^{\alpha-1} \right| + |\chi(s_m, 1, s)(1-s)^{\alpha-1}| \right) \leq \frac{m+1}{\Gamma(\alpha)} < \frac{m+2}{\Gamma(\alpha)}$$

当 $s_m < t \leq 1, 0 \leq s \leq 1$ 时,

$$|W_1(t, s)| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} |\chi(s_m, t, s)(t-s)^{\alpha-1}| - |\chi(s_m, 1, s)(1-s)^{\alpha-1}| \leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)}$$

综上, 当 $t, s \in [0, 1]$ 时, 有 $|W_1(t, s)| \leq \frac{m+2}{\Gamma(\alpha)}$ 。

同理可证, 当 $t, s \in [0, 1]$ 时, 有 $|W_2(t, s)| \leq \frac{2(m+1)}{\Gamma(\beta)}$ 。

证毕。

根据引理 1 易得下面引理 3 成立。

引理 3 $u \in PC(J, \mathbb{R})$ 是边值问题 (1) 的解当且

仅当 $u \in PC(J, \mathbb{R})$ 是算子 T 的不动点。

引理 4 算子 $T: PC(J, \mathbb{R}) \rightarrow PC(J, \mathbb{R})$ 全连续。

证明 设 $u_n, u \in PC(J, \mathbb{R}), n = 1, 2, \dots$, 且 $\|u_n - u\|_{PC} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 。因为 f, g, Q_k 是连续函数, 所以对任意 $s \in [0, 1]$ 有

$$f(s, u_n(s)) - f(s, u(s)) \rightarrow 0, g(s, u_n(s)) -$$

$$g(s, u(s)) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

$$Q_k(s, u_n(s)) - Q_k(s, u(s)) \rightarrow 0, k = 1, 2, \dots, m, n \rightarrow \infty$$

根据 Lebesgue 控制收敛定理易得 $\|Tu_n - Tu\|_{PC} \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$, 故 T 连续。

令 $r > 0, B_r = \{u \in PC(J, \mathbb{R}) : \|u\| \leq r\}$, 记 $M_f =$

$$\max_{(t,u) \in [0,1] \times [-r,r]} |f(t, u)|, \quad M_g = \max_{(t,u) \in [0,1] \times [-r,r]} |g(t, u)|, \quad M_Q = \max_{1 \leq k \leq m, u \in [-r,r]} |Q_k(t_k, u)|。对任意 $u \in B_r$, 根据引理 2 可得$$

$$|Tu(t)| = |Au(t) + Bu(t) + Gu(t)| \leq$$

$$\int_0^1 |W_1(t, s) f(s, u(s))| ds +$$

$$\int_0^1 |W_2(t, s) g(s, u(s))| ds + |Gu(t)| \leq$$

$$\frac{(m+2)M_f}{\Gamma(\alpha)} + \frac{2(m+1)M_g}{\Gamma(\beta)} + (m+1)M_Q$$

因此, $T(B_r)$ 一致有界。

由于 $(t-s)^{\alpha-1}, (t-s)^{\beta-1}$ 在 $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$ 上是连续的, 从而在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上是一致连续的, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在常数 $0 < \delta < \min \left\{ \frac{\Gamma(\alpha)\varepsilon}{2M_f+1}, \frac{\Gamma(\beta)\varepsilon}{3M_g+1} \right\}$, 使得当 $t_1', t_2', s \in J$ 且 $t_1' < t_2', |t_1' - t_2'| < \delta$ 时有

$$|(t_1' - s)^{\beta-1} - (t_2' - s)^{\beta-1}| < \frac{\Gamma(\beta)\varepsilon}{3M_g+1}$$

$$|(t_1' - s)^{\alpha-1} - (t_2' - s)^{\alpha-1}| < \frac{\Gamma(\alpha)\varepsilon}{2M_f+1}$$

因此, 当 $t_1' < t_2' \in [0, t_1], |t_1' - t_2'| < \delta$ 时,

$$|Tu(t_1') - Tu(t_2')| \leq |Au(t_1') - Au(t_2')| +$$

$$|Bu(t_1') - Bu(t_2')| + |Gu(t_1') - Gu(t_2')| \leq$$

$$\frac{M_f}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^{t_1'} ((t_2' - s)^{\alpha-1} - (t_1' - s)^{\alpha-1}) ds + \right.$$

$$\left. \int_{t_1'}^{t_2'} (t_2' - s)^{\alpha-1} ds \right) < \frac{M_f}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\varepsilon}{2M_f+1} + \frac{M_f\delta}{\Gamma(\alpha)} < \varepsilon$$

同理可证, 当 $t_1' < t_2' \in (s_k, t_{k+1}], |t_1' - t_2'| < \delta, k = 1, 2, \dots, m-1$ 时, $|Tu(t_1') - Tu(t_2')| < \varepsilon$ 。

当 $t_1' < t_2' \in (t_k, s_k], |t_1' - t_2'| < \delta, k = 1, 2, \dots, m$ 时,

$$\begin{aligned}
& |Tu(t'_1) - Tu(t'_2)| \leq |Au(t'_1) - Au(t'_2)| + \\
& |Bu(t'_1) - Bu(t'_2)| + |Gu(t'_1) - Gu(t'_2)| \leq \\
& \frac{M_g}{\Gamma(\beta)} \left(\int_{t_k}^{t'_1} |(t'_1 - s)^{\beta-1} - (t'_2 - s)^{\beta-1}| ds + \right. \\
& \left. \int_{t'_1}^{t'_2} (t'_2 - s)^{\beta-1} ds + \int_0^1 |(\beta-1)\chi(t_k, s_k, s)(t'_2 - t'_1) \cdot \right. \\
& \left. (s_k - s)^{\beta-2}| ds \right) \leq \frac{M_g}{\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\beta)}{3M_g + 1} + \frac{M_g}{\Gamma(\beta)} 2\delta < \varepsilon
\end{aligned}$$

当 $t'_1 < t'_2 \in (s_m, 1]$, $|t'_1 - t'_2| < \delta$ 时,

$$\begin{aligned}
& |Tu(t'_1) - Tu(t'_2)| \leq \\
& \frac{M_f}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_{s_m}^{t'_1} |(t'_1 - s)^{\alpha-1} - (t'_2 - s)^{\alpha-1}| ds + \right. \\
& \left. \int_{t'_1}^{t'_2} (t'_2 - s)^{\alpha-1} ds \right) \leq \frac{M_f}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\varepsilon}{2M_f + 1} + \frac{M_f}{\Gamma(\alpha)} \delta < \varepsilon
\end{aligned}$$

于是得到 $T(B_r)$ 在 $t \in [0, t_1]$, $(s_k, t_{k+1}]$, $(t_k, s_k]$, $k = 1, 2, \dots, m$ 时等度连续, 由 Arzela-Ascoli 定理可得 T 是紧算子。

综上所述, 可得 T 全连续。证毕。

3 边值问题解的存在性与唯一性

记

$$N_0 = \frac{m+2}{\Gamma(\alpha)}, N_1 = \frac{2(m+2)}{\Gamma(\beta)}, N_2 = m+1$$

假设:

H1 存在非负实数 $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1$, 常数 $\sigma, \theta, \gamma > 0$, 使得对任意的 $t \in J$ 及任意的 $u \in \mathbb{R}$ 有

$$|f(t, x)| \leq a_0 + a_1|u|^\sigma, |g(t, u)| \leq b_0 + b_1|u|^\theta,$$

$$|Q_k(t, u)| \leq l_0 + l_1|u|^\gamma, k = 1, 2, \dots, m$$

H2 存在常数 $L_1, L_2, L_3 \geq 0$, 使得对任意的 $t \in J$ 及任意的 $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ 有

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L_1|u_1 - u_2|$$

$$|g(t, u_1) - g(t, u_2)| \leq L_2|u_1 - u_2|$$

定理 1 假设 H1 成立, 且满足 $0 < \sigma, \theta, \gamma < 1$, 则边值问题 (1) 至少存在一个解。

证明 取

$$r_1 \geq \max\{1, 4(N_0a_0 + N_1b_0 + N_2l_0), (4N_0a_1)^{\frac{1}{1-\sigma}}, (4N_1b_1)^{\frac{1}{1-\theta}}, (4N_2l_1)^{\frac{1}{1-\gamma}}\}$$

$$D = \{u \in PC(J, \mathbb{R}) : \|u\|_{PC} \leq r_1\}$$

则 D 为 $PC(J, \mathbb{R})$ 中非空有界闭凸集。

对任意的 $u \in D$,

$$|Tu(t)| = |Au(t) + Bu(t) + Gu(t)| \leq$$

$$\int_0^1 |W_1(t, s)f(s, u(s))| ds +$$

$$\int_0^1 |W_2(t, s)g(s, u(s))| ds + |Gu(t)| <$$

$$\frac{(m+2)a_0}{\Gamma(\alpha)} + \frac{2(m+1)b_0}{\Gamma(\beta)} + (m+1)l_0 +$$

$$\frac{(m+2)a_1r_1^\sigma}{\Gamma(\alpha)} + \frac{2(m+1)b_1r_1^\theta}{\Gamma(\beta)} + (m+1)l_1r_1^\gamma <$$

$$N_0a_0 + N_1b_0 + N_2l_0 + N_0a_1r_1^\sigma +$$

$$N_1b_1r_1^\theta + N_2l_1r_1^\gamma \leq r_1$$

所以, $\|Tu\|_{PC} \leq r_1$, 故 $T(D) \subset D$ 。由引理 4 知 T 全连续, 故由 Schauder 不动点定理知 T 在 D 中至少存在一个不动点, 即边值问题 (1) 在 $PC(J, \mathbb{R})$ 中至少存在一个解。证毕。

定理 2 假设 H1 成立, 且满足 $\sigma = \theta = \gamma = 1$, 如果 $0 < N_0a_1 + N_1b_1 + N_2l_1 < 1$, 则边值问题 (1) 至少存在一个解。

证明 取 $r_2 \geq \frac{N_0a_0 + N_1b_0 + N_2l_0}{1 - (N_0a_1 + N_1b_1 + N_2l_1)}$, 令 $E = \{u \in PC(J, \mathbb{R}) : \|u\|_{PC} \leq r_2\}$, 则 E 为 $PC(J, \mathbb{R})$ 中非空有界闭凸集。

对任意的 $u \in E$ 有

$$|Tu(t)| = |Au(t) + Bu(t) + Gu(t)| \leq$$

$$\int_0^1 |W_1(t, s)f(s, u(s))| ds +$$

$$\int_0^1 |W_2(t, s)g(s, u(s))| ds + |Gu(t)| <$$

$$\frac{(m+2)a_0}{\Gamma(\alpha)} + \frac{2(m+1)b_0}{\Gamma(\beta)} + (m+1)l_0 +$$

$$\left(\frac{(m+2)a_1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{2(m+1)b_1}{\Gamma(\beta)} + (m+1)l_1 \right) r_2 <$$

$$N_0a_0 + N_1b_0 + N_2l_0 + N_0a_1r_2 + N_1b_1r_2 +$$

$$N_2l_1r_2 \leq r_2 \quad (20)$$

所以, $\|Tu\|_{PC} \leq r_2$, 故 $T(D) \subset D$ 。由引理 4 知 T 全连续, 故由 Schauder 不动点定理知 T 在 D 中至少存在一个不动点, 即边值问题 (1) 在 $PC(J, \mathbb{R})$ 中至少存在一个解。证毕。

定理 3 设 H2 成立, 且满足 $0 < N_0L_1 + N_1L_2 + N_2L_3 < 1$, 则边值问题 (1) 在 $PC(J, \mathbb{R})$ 上存在唯一解。

证明 对任意 $u_1, u_2 \in PC(J, \mathbb{R})$ 可得

$$|Tu_1(t) - Tu_2(t)| = |Au_1(t) - Au_2(t) +$$

$$Bu_1(t) - Bu_2(t) + Gu_1(t) - Gu_2(t)| \leq$$

$$\int_0^1 |W_1(t, s)| |f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))| ds +$$

$$\int_0^1 |W_2(t, s)| |g(s, u_1(s)) - g(s, u_2(s))| ds +$$

$$|Gu_1(t) - Gu_2(t)| <$$

$$\left(\frac{(m+2)L_1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{2(m+1)L_2}{\Gamma(\beta)} + (m+2)L_3 \right) \|u_1 - u_2\|_{PC} =$$

$$(N_0L_1 + N_1L_2 + N_2L_3) \|u_1 - u_2\|_{PC}$$

因为 $0 < N_0L_1 + N_1L_2 + N_2L_3 < 1$, 所以 T 为压缩映射, 因此, 可知边值问题(1)在 $PC(J, \mathbb{R})$ 上存在唯一解。证毕。

参考文献:

- [1] PODLUBNY I. Fractional differential equations[M]. San Diego: Academic Press, 1999.
- [2] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and applications of fractional differential equations[M]. Amsterdam: Elsevier, 2006.
- [3] 白占兵. 分数阶微分方程边值问题理论及应用 [M]. 北京: 中国科学技术出版社, 2013.
- [4] 李秀红, 寇春海, 刘晓波. 分数阶微分方程边值问题解的存在性 [J]. 东华大学学报(自然科学版), 2011, 37(2): 240–245.
- [5] 李燕, 刘锡平, 李晓晨, 等. 具逐项分数阶导数的积分边值问题正解的存在性 [J]. 上海理工大学学报, 2016, 38(6): 511–516.
- [6] YANG L, SHEN C F, XIE D P. Multiple positive solutions for nonlinear boundary value problem of fractional order differential equation with the Riemann-Liouville

derivative[J]. *Advances in Difference Equations*, 2014, 2014: 284.

- [7] AHMAD B, SIVASUNDARAM S. Existence of solutions for impulsive integral boundary value problems of fractional order[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2010, 4(1): 134–141.
- [8] 智二涛, 刘锡平, 李凡凡. 分数阶脉冲微分方程边值问题正解的存在性 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2014, 52(3): 482–488.
- [9] LIU X P, JIA M. Existence of solutions for the integral boundary value problems of fractional order impulsive differential equations[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2016, 39(3): 475–487.
- [10] MYSHKIS A D, SAMOILENKO A M. Systems with impulses in prescribed moments of the time[J]. *Mat. Sb.*, 1976, 74(1): 202–208.
- [11] 张莎, 贾梅, 李燕, 等. 分数阶脉冲微分方程三点边值问题解的存在性和唯一性 [J]. 山东大学学报(理学版), 2017, 52(2): 66–72.
- [12] WANG J R, ZHOU Y, FE KAN M. On recent developments in the theory of boundary value problems for impulsive fractional differential equations[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2012, 64(10): 3008–3020.
- [13] 陈辉, 贾梅, 何健堃. 一类具有非瞬时脉冲的分数阶微分方程积分边值问题解的存在性 [J]. 上海理工大学学报, 2017, 39(6): 521–527.
- [14] AGARWAL R, HRISTOVA S, O'REGAN D. Iterative techniques for the initial value problem for Caputo fractional differential equations with non-instantaneous impulses[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2018, 334: 407–421.

(编辑: 丁红艺)