

Poisson 代数的平凡扩张的模导子

朱 灿, 梁嘉威, 李耀飞

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 设 A 是 Poisson 代数, M 是 A 上的左 Poisson 模, 则在 A 通过 M 的平凡扩张代数 $A \ltimes M$ 上存在 Poisson 结构。当 M 取成 A 本身或其线性对偶 A^* 时, 则平凡扩张代数 $A \ltimes A^*$ 和 $A \ltimes A$ 都是 Frobenius Poisson 代数。计算了这两类 Frobenius Poisson 代数的模导子, 这个结果可视作有限维代数的平凡扩张的 Nakayama 自同构在 Poisson 代数中对应的结论。

关键词: Poisson 代数; 平凡扩张; 模导子

中图分类号: O 151.21 **文献标志码:** A

Modular derivation of the trivial extension of Poisson algebras

ZHU Can, LIANG Jiawei, LI Yaofei

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: Let A be a Poisson algebra, M be a left Poisson module over A . Then, there is a Poisson algebra structure on the trivial extension algebra $A \ltimes M$ of A by M . Assuming that M is A itself or the linear dual A^* of A , then both $A \ltimes A^*$ and $A \ltimes A$ are Frobenius Poisson algebras. The modular derivation for these two classes of the trivial extension of Poisson algebras was calculated. These results can be viewed as the corresponding conclusions on the Nakayama automorphism of the trivial extension of finite dimensional algebras.

Keywords: Poisson algebras; trivial extension; modular derivation

Poisson 结构自然地出现在数学和物理的很多研究领域, 如量子力学、辛几何、非交换代数几何及量子群等。对光滑 Poisson 代数而言, 模导子是一个重要的不变量, 其建立起 Poisson 上同调群和同调群之间的 Poincaré 对偶^[1]。文献 [2] 中定义了 Frobenius Poisson 代数的模导子, 在其 Poisson 上同调群和同调群建立了类似光滑 Poisson 代数的 Poincaré 对偶。在正则代数的研究中, Nakayama

自同构是一个重要的不变量。文献 [3] 利用 Kontsevich 的形变量子化, 给出了光滑 Poisson 的两种形变对应的模导子和 Nakayama 自同构的关系。结合代数的平凡扩张是代数中常见的构造, 在环论及表示论中发挥重要作用^[4-7]。由文献 [8] 可知 Poisson 代数通过 Poisson 模的平凡扩张仍具有 Poisson 代数结构。本文研究两类 Poisson 代数平凡扩张的模导子, 这个结果可视作结合代数的两类平凡扩张的

收稿日期: 2019-07-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11771085, 11871125); 上海市科委科研计划项目 (19ZR1434600)

第一作者: 朱 灿 (1981-), 男, 副教授。研究方向: 代数学。E-mail: czhu@usst.edu.cn

Nakayama 自同构在 Poisson 代数范畴的对应的形式。

在本文中, k 总是一个域, 所有代数和模都是在这个基域上的。如不加说明, 张量积也是在基域上的张量积。

1 已有结论及相关准备

1.1 Poisson 代数

定义 1^[1] 设 A 是域 k 上的交换代数, 若在 A 还有一个 k 线性运算 $(x, y) \mapsto \{x, y\}$ 使得:

a. $(A, \{-, -\})$ 是域 k 上的李代数;

b. 这个二元运算满足 Leibniz 法则, 即对任意的 $x, y, z \in A$, 都有 $\{xy, z\} = x\{y, z\} + y\{x, z\}$, 则称 A 是 Poisson 代数, 其中, $\{-, -\}$ 称为 Poisson 括号, 常将 Poisson 代数 A 记作 $(A, \{-, -\})$ 。

现给出 2 个 Poisson 代数的例子。

例 1 设 $A = k[x, y]$, 定义 Poisson 括号为

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$$

则 $(A, \{-, -\})$ 是一个 Poisson 代数。

例 2 设正整数 $n \geq 2$, 设 $A = k[x_1, \dots, x_n]$, 任意 n 阶反对称矩阵 $\lambda = (\lambda_{ij})$ 。定义 $\{x_i, x_j\} = \lambda_{ij} x_i x_j$, $1 \leq i < j \leq n$, 则 A 是一个 Poisson 代数, 常称之为 Poisson 量子空间, 记作 $P_n^\lambda(k)$ 。

1.2 Poisson 模

现介绍 Poisson 代数上的 Poisson 模及其性质。

定义 2^[9] 设 $(A, \{-, -\})$ 是一个 Poisson 代数。右 A 模 M 被称作 Poisson 代数 A 上的右 Poisson 模, 如果存在一个双线性映射 $\{-, -\}_M: M \times A \rightarrow M$ 满足如下条件:

a. $(M, \{-, -\}_M)$ 是李代数 $(A, \{-, -\})$ 上的右李模;

b. 对任意的 $a, b \in A, x \in M$, 满足 $\{xa, b\}_M = \{x, b\}_M a + x\{a, b\}$;

c. 对任意的 $a, b \in A, x \in M$, 满足 $\{x, ab\}_M = \{x, b\}_M a + \{x, a\}_M b$ 。

类似地, 有左 Poisson 模的定义。

给定 Poisson 代数 A , 在其上有自然的右 (或者左) Poisson 模结构。给定 A 上的 2 个右 Poisson 模 $(M, \{-, -\}_M)$ 和 $(N, \{-, -\}_N)$, k -线性映射 $f: M \rightarrow N$ 称作一个 Poisson 模同态, 如果满足对任意的 $m \in M, a \in A$, 有

$$f(m \cdot a) = f(m) \cdot a, \quad f(\{m, a\}_M) = \{f(m), a\}_N$$

命题 1^[10] 假设 $(M, \{-, -\}_M)$ 是 Poisson 代数 A 上的右 Poisson 模。通过以下作用可以定义在 $M^* := \text{Hom}_k(M, k)$ 上的左 Poisson 模结构:

$$a \cdot \alpha: M \rightarrow k, (a \cdot \alpha)(m) := \alpha(m \cdot a)$$

$$\{a, \alpha\}_{M^*}: M \rightarrow k, \{a, \alpha\}_{M^*}(m) := \alpha(\{m, a\}_M)$$

其中, $a \in A, \alpha \in M^*, m \in M$ 。

同理, 也可以由左 Poisson 模 M 得到 M^* 上的右 Poisson 模结构。

命题 2^[10] 令 $(N, \{-, -\}_N)$ 是 Poisson 代数 A 上的右 Poisson 模, M 是一个右 A 模。假设 $f: M \rightarrow N$ 是一个右 A 模同构。那么, 通过以下方式:

$$\{m, a\}_M := f^{-1}(\{f(m), a\}_N), \quad \forall a \in A, m \in M$$

使 M 成为一个右 Poisson 模。此时, $f: M \rightarrow N$ 是一个 Poisson 模同构。

1.3 Frobenius 代数及 Nakayama 自同构

定义 3^[11] 有限维 k -代数 A 称为 Frobenius 代数, 如果存在右 A 模同构 $A \cong A^*$, 其中, $A^* = \text{Hom}_k(A, k)$ 。称同构映射 $\sigma: A \rightarrow A^*$ 为 Frobenius 同构。

命题 3^[10] 设 A 是有限维 k 代数, 则以下等价:

a. A 是 Frobenius 代数。

b. 存在非退化双线性对, $\langle -, - \rangle: A \times A \rightarrow k$ 满足 $\langle ab, c \rangle = \langle a, bc \rangle, \forall a, b, c \in A$ 。

称这个双线性对为 Frobenius 对。

例 3 数域 k 上的全矩阵代数 $M_n(k)$ 是 Frobenius 代数, 其 Frobenius 对为 $\langle a, b \rangle = \text{tr}(ab)$ 。其中, tr 为矩阵的迹。

现介绍 Frobenius 代数的 Nakayama 自同构。

命题 4^[11] 设 A 是 Frobenius 代数, 其 Frobenius 对为 $\langle -, - \rangle$, 则存在自同构 $\nu \in \text{Aut}(A)$, 使

a. 对任意的 $a, b \in A$, 有 $\langle a, b \rangle = \langle \nu(b), a \rangle$;

b. 对任意的 $a, b \in A$, 有 $\langle a, b \rangle = \langle \nu(a), \nu(b) \rangle$;

并且 ν 在相差一个内自同构的意义下是唯一的。称同构映射 ν 是 Frobenius 代数 A 的 Nakayama 自同构。

推论 1 设 A 是 Frobenius 代数, 其 Frobenius 对为 $\langle -, - \rangle$ 。若 $\forall a, b \in A, \langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$, 则其 Nakayama 自同构为恒等映射, 称这样的代数为对称 Frobenius 代数。

在例 3 中, 这个 Frobenius 代数的 Nakayama 自同构为恒等映射。

1.4 Frobenius Poisson 代数及模导子

定义 4^[10] 若 A 既是 Frobenius 代数, 又是 Poisson 代数, 称 A 是 Frobenius Poisson 代数。

现介绍 Frobenius Poisson 代数及几个性质，证明过程见文献 [9]。

命题 5^[10] 对 $\forall a, b \in A, \langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$ 。

命题 6^[10] $A^* := \text{Hom}_k(A, k)$ 是 A 上的右 Poisson 模，Poisson 模结构为

$$\{-, -\}_{A^*} : A^* \times A \rightarrow A^*, (f, a) \mapsto \{f, a\}_{A^*}$$

其中， $\{f, a\}_{A^*}(b) := f(\{a, b\})$ 。

设 A 是 Frobenius Poisson 代数，因此，有右 A -模同构 $\sigma : A \cong A^*$ ，则由命题 2 可知，命题 6 中的 A^* 上的右 Poisson 模结构给出了 A 上一个新的右 Poisson 模结构

$$\{x, a\}_D = \sigma^{-1}(\{\sigma(x), a\}_{A^*}), \forall x, a \in A$$

为了区别，将这个 Poisson 模记作 $(A_D, \{-, -\}_D)$

现介绍符号 D 的含义。

命题 7^[2] 设 A 是 Frobenius Poisson 代数，定义映射 $D : A \rightarrow A, a \mapsto \{1, a\}_D$ 。则映射 D 具有以下性质：

- a. 映射 D 是导子，即 $D(ab) = D(a)b + aD(b), a, b \in A$ 。
- b. $\{x, a\}_D = \{x, a\} + D(a)x$ ，其中， $x, a \in A$ 。
- c. 对所有的 $a, b \in A, \langle D(a), b \rangle = \langle 1, \{a, b\} \rangle = -\langle D(b), a \rangle$ 。
- d. 对所有的 $a, b, c \in A, \langle a, \{b, c\} \rangle = \langle \{a, b\}, c \rangle + \langle aD(b), c \rangle$ 。
- e. 映射 D 是 Poisson 导子，即 $D(\{a, b\}) = \{D(a), b\} + \{a, D(b)\}, a, b \in A$ 。

证明过程见文献 [2]。

定义 5^[2] 命题 7 中的映射 D 称为 Frobenius Poisson 代数 A 的模导子。

例 4 设 $A = k[X_1, \cdots, X_n] / (X_i^2, 1 \leq i \leq n)$ ，其中，Poisson 括号为

$$\{x_i, x_j\} = x_i x_j, \quad 1 \leq i < j \leq n$$

其中， x_i 表示 $X_i (1 \leq i \leq n)$ 对应的剩余类。则代数 A 是维数为 2^n 的线性空间，其有一组基为

$$\{1\} \cup \{x_{i_1} \cdots x_{i_k} | 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

则 A 是 Frobenius Poisson 代数。它的 Frobenius 同构为 $\sigma : A \rightarrow A^*$ ，其中， $\sigma(1) : \sum c_{i_1 \cdots i_k} x_{i_1} \cdots x_{i_k} \mapsto c_{1,2,\cdots,n}$ 。不难得出， $D(x_i) = (n+1-2i)x_i, 1 \leq i \leq n$ 。

2 代数的平凡扩张

命题 8^[8] 设 A 是结合代数， M 是 A - A 双模。在线性空间直积 $A \times M$ 上定义乘积

$$((a, m), (b, n)) := (ab, an + mb)$$

这里 $a, b \in A, m, n \in M$ ，则 $A \times M$ 是一个代数。称之为 A 通过 M 的平凡扩张，记作 $A \ltimes M$ 。

定义 6 设 A 是结合代数， M 是 A - A 双模。如果 A 通过 M 的平凡扩张 $A \ltimes M$ 是 Frobenius 代数，则称这个扩张是 Frobenius 平凡扩张。

命题 9 平凡扩张代数 $A \ltimes M$ 作为向量空间的维数等于 A 作为向量空间的维数与 M 作为向量空间的维数之和。

证明 由线性空间直积的维数可得。

现考虑两种常见的 Frobenius 平凡扩张，求出它们的 Nakayama 自同构，见定理 1 和定理 2。

定理 1 设 A 是有限维代数， A^* 是 A 的对偶空间，记 $B = A \ltimes A^*$ ，则

- a. B 是 Frobenius 代数；
- b. B 的 Nakayama 自同构为恒等映射。

证明 B 上的非退化双线性型为

$$\langle (a, f), (b, g) \rangle = f(b) + g(a), \quad a, b \in A, f, g \in A^*$$

剩下的证明由直接计算可得。

定理 2 设 A 是有限维 Frobenius 代数，记 $B = A \ltimes A$ ，则

- a. B 为 Frobenius 代数；
- b. B 的 Nakayama 自同构为 $v_B(a, b) = (v_A(a), v_A(b))$ ，其中， v_A 是代数 A 的 Nakayama 自同构。

证明 a. 由于 A 是 Frobenius 代数，则存在左模同构 $f : A \rightarrow A^*$ 。而 A 上的 Frobenius 对定义为 $\langle a, b \rangle = f(b)(a)$ 。定义 B 上的双线性型为

$$\begin{aligned} \langle (a_1, b_1), (a_2, b_2) \rangle &= f(b_2)(a_1) + f(a_2)(b_1) = \\ &= \langle a_1, b_2 \rangle + \langle b_1, a_2 \rangle, \quad \forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in A \end{aligned}$$

易知该双线性非退化且满足对 $\forall a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in A$ ，都有

$$\langle (a_1, b_1)(a_2, b_2), (a_3, b_3) \rangle = \langle (a_1, b_1), (a_2, b_2)(a_3, b_3) \rangle$$

从而 B 为 Frobenius 代数。

b. 现求其 Nakayama 自同构。取 A 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ ，因为，Frobenius 对是双线性的，所以，有

$$\begin{aligned} \forall a, b \in A, \langle a, b \rangle &= \langle v_A(b), a \rangle \Leftrightarrow \\ &= \langle v_{\alpha_i}, \alpha_k, \langle \alpha_k, \alpha_i \rangle = \langle v_A(\alpha_i), \alpha_k \rangle \end{aligned}$$

因为， B 有一组基为 $(\alpha_1, 0), \cdots, (\alpha_n, 0), (0, \alpha_1), \cdots, (0, \alpha_n)$ ，于是，对 $\forall 1 \leq k \leq n$ ，有，

$$\langle (\alpha_k, 0), (\alpha_i, 0) \rangle = 0 = \langle (v_A(\alpha_i), 0), (\alpha_k, 0) \rangle$$

以及

$$\langle (0, \alpha_k), (\alpha_i, 0) \rangle = \langle \alpha_i, \alpha_k \rangle =$$

$$\langle v_A(\alpha_i), \alpha_k \rangle = \langle (v_A(\alpha_i), 0), (0, \alpha_k) \rangle$$

从而可以得到

$$v_B(\alpha_i, 0) = (v_A(\alpha_i), 0)$$

类似地, 有

$$\langle (\alpha_k, 0), (0, \alpha_i) \rangle = \langle \alpha_k, \alpha_i \rangle =$$

$$\langle v_A(\alpha_i), \alpha_k \rangle = \langle (0, v_A(\alpha_i)), (\alpha_k, 0) \rangle$$

$$\langle (0, \alpha_k), (0, \alpha_i) \rangle = 0 = \langle (0, v_A(\alpha_i)), (0, \alpha_k) \rangle$$

从而可以得到

$$v_B(0, \alpha_i) = (0, v_A(\alpha_i))$$

进一步, 便有

$$v_B(a, b) = (v_A(a), v_A(b))$$

3 Poisson 代数的平凡扩张

引理 1^[7] 设 A 是 Poisson 代数, $(M, \{-, -\}_M)$ 是左 Poisson 模, 则 $A \ltimes M$ 上存在以下方式定义的 Poisson 结构:

$$\{(a, m), (b, n)\} = (\{a, b\}, \{a, n\}_M - \{b, m\}_M)$$

证明过程见文献 [7]。

定理 3 设 A 是有限维 Poisson 代数, A^* 是 A 的对偶空间, 记 $B = A \ltimes A^*$ 。则

a. B 是 Frobenius Poisson 代数;

b. B 的模导子为 0。

证明 a. 由定理 1 可知, B 是 Frobenius 代数。由引理 1 可知, B 是 Poisson 代数, 故 B 是 Frobenius Poisson 代数。

b. 易知 B 的单位元为 $(1, 0)$ 。对 $\forall a, b \in A, f, g \in A^*$, 有

$$\begin{aligned} \langle (1, 0), \{(a, f), (b, g)\} \rangle &= \langle (1, 0), (\{a, b\}, \{a, g\}_{A^*} - \{b, f\}_{A^*}) \rangle = \\ &= \{a, g\}_{A^*}(1) - \{b, f\}_{A^*}(1) = g\{a, 1\} - f\{b, 1\} = 0 \end{aligned}$$

由命题 7 可知, 对所有的 $x, y \in B$, $\langle D_B(x), y \rangle = \langle 1, \{x, y\} \rangle$ 。从而 $\langle D_B(a, f), (b, g) \rangle = 0$ 对任意的 (b, g) 都成立, 由非退化性可知, $D_B(a, f) = 0$ 。于是, B 的模导子为 0。

定理 4 设 A 是 Frobenius Poisson 代数, 记 $B = A \ltimes A$ 。则有:

a. B 是 Frobenius Poisson 代数;

b. B 的模导子 $D_B(a, b) = (D_A(a), 0)$, $a, b \in A$, 其中, D_A 是代数 A 的模导子。

证明 a. 由定理 2 可知, B 是 Frobenius 代数。由引理 1 可知, B 是 Poisson 代数, 故 B 是 Frobenius

Poisson 代数。

b. 现求其模导子。设 $\dim A = n$ 。由文献 [12] 中的引理 2.4, 存在 A 的两组基 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 以及 $b_1, b_2, \dots, b_n$, 且满足

$$\langle a_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$$

从而 A 的 Frobenius 同构为 $\sigma_A: A \rightarrow A^*$, $a_i \mapsto \langle -, a_i \rangle = b_i^*$, 其中, $b_i^*(a_j) = \delta_{ij}$ 。不妨设 A 的 Poisson 结构为 $\{a_i, a_j\} = \sum_{l=1}^n k_l^{ij} a_l$ 。由模导子定义, $D_A(a_i) = \{1, a_i\}_D = \sigma_A^{-1}(\{\sigma_A(1), a_i\}_{A^*})$ 。故设

$$\{\sigma_A(1), a_i\}_{A^*} = p_1 b_1^* + p_2 b_2^* + \dots + p_n b_n^* \quad (1)$$

现求系数 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 。为方便计算, 设单位元 $1 = a_1$ 。将式 (1) 作用于 a_1 , 可得 $\{\sigma_A(1), a_i\}_{A^*}(a_1) = p_1$ 。另一方面, $\{\sigma_A(1), a_i\}_{A^*}(a_1) = b_1^*\left(\sum_{l=1}^n k_l^{i1} a_l\right) = k_1^{i1}$, 从而 $p_1 = k_1^{i1}$ 。类似地, 将式 (1) 作用于 a_2 , 可得 $p_2 = k_1^{i2}$, $p_j = k_1^{ij}$, 从而

$$\begin{aligned} \sigma_A^{-1}(\{\sigma_A(1), a_i\}_{A^*}) &= \sigma_A^{-1}(k_1^{i1} b_1^* + k_1^{i2} b_2^* + \dots + k_1^{in} b_n^*) = \\ &= k_1^{i1} a_1 + k_1^{i2} a_2 + \dots + k_1^{in} a_n \end{aligned}$$

即

$$D_A(a_i) = k_1^{i1} a_1 + k_1^{i2} a_2 + \dots + k_1^{in} a_n$$

因为, 由 A 两组基 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 以及 $b_1, b_2, \dots, b_n$, 可知 $A \ltimes A$ 也有两组基

$$(a_1, 0), (a_2, 0), \dots, (a_n, 0), (0, a_1), (0, a_2), \dots, (0, a_n)$$

以及

$$(b_1, 0), (b_2, 0), \dots, (b_n, 0), (0, b_1), (0, b_2), \dots, (0, b_n)$$

由定理 2 的证明过程可知, B 上的 Frobenius 对为

$$\langle (a_i, 0), (b_j, 0) \rangle = 0, \langle (a_i, 0), (0, b_j) \rangle =$$

$$\delta_{ij}, \langle (0, a_i), (b_j, 0) \rangle = \delta_{ij}, \langle (0, a_i), (0, b_j) \rangle = 0$$

从而 B 上的 Frobenius 同构为

$$\begin{aligned} \sigma_B: A \ltimes A &\rightarrow (A \ltimes A)^*: (a_i, 0) \mapsto \\ &(0, b_i)^*, (0, a_i) \mapsto (b_i, 0)^* \end{aligned} \quad (2)$$

其中,

$$\begin{aligned} (0, b_i)^*((a_j, 0)) &= \delta_{ij}, \quad (0, b_i)^*((0, a_j)) = 0, \\ (b_i, 0)^*((0, a_j)) &= \delta_{ij}, \quad (b_i, 0)^*((a_j, 0)) = 0 \end{aligned}$$

已知单位元 $(1, 0) = (a_1, 0)$, 于是, $\sigma_B(1, 0) = (0, b_1)^*$ 。

由定义

$$D_B(a_i, 0) = \{(1, 0), (a_i, 0)\}_D = \sigma_B^{-1}(\{\sigma_B(1, 0), (a_i, 0)\}_{B^*}) \quad (3)$$

设

$$\{\sigma_B(1, 0), (a_i, 0)\}_{B^*} = p_1(b_1, 0)^* + p_2(b_2, 0)^* + \cdots + p_n(b_n, 0)^* + q_1(0, b_1)^* + \cdots + q_n(0, b_n)^* \quad (4)$$

现求系数 $p_1, p_2, \cdots, p_n, q_1, q_2, \cdots, q_n$ 的值。将式 (4) 作用于 $(a_1, 0)$, 可得

$$\{\sigma_B(1, 0), (a_i, 0)\}_{B^*}(a_1, 0) = (p_1(b_1, 0)^* + p_2(b_2, 0)^* + \cdots + p_n(b_n, 0)^* + q_1(0, b_1)^* + \cdots + q_n(0, b_n)^*)(a_1, 0) = q_1$$

另一方面,

$$\{\sigma_B(1, 0), (a_i, 0)\}_{B^*}(a_1, 0) = \sigma_B(1, 0)\{(a_i, 0), (a_1, 0)\} = (0, b_1)^* \{(a_i, a_1), 0\} = k_1^{i1}$$

于是, $q_1 = k_1^{i1}$ 。

同样地, 将式 (4) 作用于 $(a_2, 0), \cdots, (a_j, 0), \cdots, (a_n, 0)$, 可得

$$q_j = k_1^{ij}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

将式 (4) 作用于 $(0, a_1)$, 可得

$$\{\sigma_B(1, 0), (a_i, 0)\}_{B^*}(0, a_1) = (p_1(b_1, 0)^* + p_2(b_2, 0)^* + \cdots + p_n(b_n, 0)^* + q_1(0, b_1)^* + \cdots + q_n(0, b_n)^*)(0, a_1) = p_1$$

另一方面,

$$\{\sigma_B(1, 0), (a_i, 0)\}_{B^*}(0, a_1) = \sigma_B(1, 0)\{(a_i, 0), (0, a_1)\} = (0, b_1)^* \left(0, \sum_{l=1}^n k_l^{i1} a_l\right) = 0$$

于是, $p_1 = 0$ 。若将式 (4) 作用于 $(0, a_2)$, 可得 $p_2 = 0$ 。类似地, 可得 $p_j = 0, j = 1, 2, \cdots, n$ 。

$$\{\sigma_B(1, 0), (a_i, 0)\}_{B^*} = k_1^{i1}(0, b_1)^* + k_1^{i2}(0, b_2)^* + \cdots + k_1^{in}(0, b_n)^* \quad (5)$$

由式 (2)~(5) 可知, $D_B(a_i, 0) = (D_A(a_i), 0)$ 。

又因为,

$$D_B(0, a_i) = \{(1, 0), (0, a_i)\}_D = \sigma_B^{-1}(\{\sigma_B(1, 0), (0, a_i)\}_{B^*})$$

设

$$\{\sigma_B(1, 0), (0, a_i)\}_{B^*} = p_1(b_1, 0)^* + p_2(b_2, 0)^* + \cdots + p_n(b_n, 0)^* + q_1(0, b_1)^* + \cdots + q_n(0, b_n)^* \quad (6)$$

将式 (6) 作用于 $(a_1, 0)$, 有

$$\{\sigma_B(1, 0), (0, a_i)\}_{B^*}(a_1, 0) = (p_1(b_1, 0)^* + p_2(b_2, 0)^* + \cdots + p_n(b_n, 0)^* + q_1(0, b_1)^* + \cdots + q_n(0, b_n)^*)(a_1, 0) = q_1$$

另一方面,

$$\{\sigma_B(1, 0), (0, a_i)\}_{B^*}(a_1, 0) = (0, b_1)^* \{(0, a_i), (a_1, 0)\} = (0, b_1)^* (0, -\{a_i, a_1\}) = (0, b_1)^* \left(0, -\sum_{l=1}^n k_l^{i1} a_l\right) = 0$$

从而, $q_1 = 0$ 。类似地, 将式 (6) 作用于 $(a_j, 0)$, 可

得 $q_j = 0, j = 1, 2, \cdots, n$ 。

现将式 (6) 作用于 $(0, a_j)$, 于是,

$$p_j = (0, b_1)^* \{(0, a_i), (0, a_j)\} = (0, b_1)^* ((0, 0)) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

从而

$$\{\sigma_B(1, 0), (0, a_i)\}_{B^*} = 0 \quad (7)$$

故由式 (2), (6) 和 (7) 可知, $D_B(0, a_i) = (0, 0)$ 。从而证明了

$$D_B(a, b) = (D_A(a), 0), \forall a, b \in A$$

参考文献:

- [1] LAURENT-GENGOUX C, PICHEREAU A, VANHAECKE P. Poisson structures[M]. Berlin: Springer, 2012.
- [2] LUO J, WANG S Q, WU Q S. Frobenius Poisson algebras[J]. *Frontiers of Mathematics in China*, 2019, 14: 395–420.
- [3] DOLGUSHEV V. The Van den Bergh duality and the modular symmetry of a Poisson variety[J]. *Selecta Mathematica*, 2009, 14(2): 199–228.
- [4] CHEN J L, ZHOU Y Q. Morphy rings as trivial extensions[J]. *Glasgow Mathematical Journal*, 2005, 47(1): 139–148.
- [5] CHEN X W. Singular equivalences of trivial extensions[J]. *Communications in Algebra*, 2016, 44(5): 1961–1970.
- [6] ASSEM I, HAPPEL D, ROLDÁN O. Representation-finite trivial extension algebras[J]. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 1984, 33(3): 235–242.
- [7] CIBILS C, MARCOS E, REDONDO M J, et al. Cohomology of split algebras and of trivial extensions[J]. *Glasgow Mathematical Journal*, 2003, 45(1): 21–40.
- [8] ZHU C, LI H L, LI Y F. Poisson derivations and the first poisson cohomology group on trivial extension algebras[J]. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 2019, 45(5): 1339–1352.
- [9] OH S Q. Poisson enveloping algebras[J]. *Communications in Algebra*, 1999, 27(5): 2181–2186.
- [10] ZHU C, VAN OYSTAEYEN F, ZHANG Y H. On (co)homology of Frobenius Poisson algebras[J]. *Journal of K-Theory*, 2014, 14(2): 371–386.
- [11] SMITH S P. Some finite dimensional algebras related to elliptic curves[C]//Proceedings of Representation Theory of Algebras and Related Topics. Mexico: CMS, 1994: 315–348.
- [12] LEWIS D W. Frobenius algebras and hermitian forms[J]. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 1979, 14(1): 51–58.