

一类 Choquard 型拟线性 Schrödinger 方程解的存在性

张晓静, 贾 高

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 考虑一类 Choquard 型拟线性 Schrödinger 方程解的存在性。通过变量替换方法将该方程转化为半线性方程, 利用山路定理和变分法证明了该方程在适当条件下非平凡解的存在性。

关键词: 拟线性 Schrödinger 方程; Choquard 型; 变分法

中图分类号: O 175.3

文献标志码: A

Existence of solutions for a class of quasilinear Schrödinger equations of Choquard type

ZHANG Xiaojing, JIA Gao

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The existence of solutions for a class of quasilinear Schrödinger equations of Choquard type was discussed. By the change of variables, the equation was transformed into a semilinear equation. Under appropriate conditions and by means of the mountain pass theorem as well as the variational method, the existence of the solution was proved.

Keywords: quasilinear Schrödinger equation; Choquard type; variational method

1 问题的提出

研究了如下形式的 Choquard 型方程解的存在性问题:

$$-\Delta u + V(x)u - \Delta \left(\sqrt{1+u^2} \right) \frac{u}{2\sqrt{1+u^2}} = (I_\alpha * |u|^p) |u|^{p-2} u, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad (1)$$

其中, $N \geq 3$, $(5-2\sqrt{6})N < \alpha < N$, $\frac{N+\alpha}{N} \leq p < \frac{N+\alpha}{N-2}$,

$I_\alpha: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ 表示 Riesz 位势, 即

$$I_\alpha = \frac{\Gamma\left(\frac{N-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \pi^{N/2} 2^\alpha |x|^{N-\alpha}}$$

方程(1)与如下形式的拟线性 Schrödinger 方程的驻波解密切相关:

$$i\partial_t z = -\Delta z + W(x)z - \tilde{h}(|z|^2)z - \Delta \left[l(|z|^2) \right] l'(|z|^2)z \quad (2)$$

其中, $z: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $W: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ 是给定的位势函

收稿日期: 2019-11-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11171220)

第一作者: 张晓静 (1995-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 偏微分方程. E-mail: 15738774147@163.com

通信作者: 贾 高 (1960-), 男, 教授. 研究方向: 偏微分方程. E-mail: gaojia89@163.com

数, 且 $\tilde{h}, l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是实函数。事实上, 若令 $z(t, x) = e^{-i\omega t} u(x)$, $V(x) = W(x) - w$, $l(s) = (1+s)^{1/2}$, 且 $\tilde{h}(u^2)u = (I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u$, 那么, 函数 $u(x)$ 满足方程(1), 此时方程(2)描述了高能超短激光在物质中的自沟道效应模型^[1-3]。另外, 模型 $-\Delta u + u = (I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u$ 被称为非线性的 Choquard 型方程, 这类方程也有很强的物理背景^[4]。

在以往的研究中, 当方程(2)中取 $l(s) = s$ 时, 大量学者利用变分方法、临界点理论等解决了方程解的存在性和多重性等问题。但是, 关于 $l(s) = (1+s)^{1/2}$ 的研究较少。对于 Choquard 型半线性方程现已有许多研究, 受文献 [5] 的启发, 本文讨论 Choquard 型拟线性方程。因为, 方程(1)中的非线性项是非局部的, 无法直接使用处理局部问题的方法解决该拟线性问题。

现假设 $V(x)$ 满足以下条件:

(v₀) $V(x) \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $0 < V_0 < V(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$;

(v₁) $V(x) \leq V_\infty := \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) < \infty$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$ 。

本文的主要结果为定理 1。

定理 1 若条件(v₀), (v₁)成立, 则问题(1)在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中至少存在一个非平凡解。

2 预备知识

在本文中, 对工作空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 赋予范数 $\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (u^2 + |\nabla u|^2)dx$, 符号 $|u|_p$ 表示通常的 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 空间函数 $u(x)$ 的范数。

首先考虑变量替换

$$v = G(u) = \int_0^u g(s)ds \tag{3}$$

其中, $g(t) = \sqrt{1 + \frac{t^2}{2(1+t^2)}}$ 。易见 $g \in C^1\left(\mathbb{R}, \left[1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right]\right)$, 且 g 在 $[0, \infty)$ 上单调递增, 反函数 $G^{-1}(t)$ 存在。

引理 1^[6] 对于函数 $g(t)$ 和 $G^{-1}(t)$ 有如下性质:

a. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{G^{-1}(t)}{t} = 1, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{G^{-1}(t)}{t} = \sqrt{\frac{2}{3}}$;

b. 对于所有的 $t \in \mathbb{R}$, 有 $\sqrt{\frac{2}{3}}|t| \leq |G^{-1}(t)| \leq |t|$;

c. 对于所有的 $t \in \mathbb{R}$, 有 $0 \leq \frac{t}{g(t)}g'(t) \leq 5 - 2\sqrt{6}$ 。

引理 2^[5] (Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式) 若 $g(x) \in L^r(\mathbb{R}^N)$, $h(y) \in L^s(\mathbb{R}^N)$, 则存在常数 C , 使得

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{g(x)h(y)}{|x-y|^{N-\alpha}} dx dy \leq C(r, s, N, \alpha) |g|_r |h|_s$$

其中, r, s, α, N 满足 $r, s > 1, 0 < \alpha < N, \frac{1}{r} + \frac{1}{s} - \frac{\alpha}{N} = 1$ 。

引理 3 若 $v \in L^{pr}(\mathbb{R}^N)$, 则根据 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式可知

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |G^{-1}(v)|^p) |G^{-1}(v)|^p dx \leq \\ &C \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x)|^p |v(y)|^p}{|x-y|^{N-\alpha}} dx dy \leq C |v|_{pr}^{2p} \end{aligned}$$

若 $pr \in [2, 2^*)$, 那么, $\frac{N+\alpha}{N} \leq p < \frac{N+\alpha}{N-2}$ 。另外, 由 Sobolev 嵌入定理可知, $H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^{\frac{2Np}{N+\alpha}}(\mathbb{R}^N)$ 当且仅当 $\frac{N+\alpha}{N} \leq p < \frac{N+\alpha}{N-2}$ 。

注意到方程(1)对应的能量泛函

$$\begin{aligned} I(u) = &\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (g^2(u) |\nabla u|^2 + V(x) u^2) dx - \\ &\frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \end{aligned}$$

但是, 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 空间上该能量泛函 $I(u)$ 可能无定义。因此, 利用式(3)的变量替换 $v = G(u)$ 将泛函 $I(u)$ 转化为如下形式:

$$\begin{aligned} J(v) = &\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |G^{-1}(v)|^2 dx - \\ &\frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |G^{-1}(v)|^p) |G^{-1}(v)|^p dx \end{aligned} \tag{4}$$

根据引理 1 和引理 3, J 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中是有定义的, 并且 $J(v) \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$, 对于任意的 $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, 有

$$\begin{aligned} \langle J'(v), \varphi \rangle = &\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} \varphi dx - \\ &\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(I_\alpha * |G^{-1}(v)|^p) |G^{-1}(v)|^{p-1}}{g(G^{-1}(v))} \varphi dx \end{aligned}$$

进一步由引理 1 和引理 2 可知, 如果 $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 是泛函 J 的临界点, 则 $u = G^{-1}(v) \in H^1(\mathbb{R}^N)$, 同时 u 也是 I 的一个临界点。

3 主要引理及定理 1 的证明

首先验证泛函 J 具有山路几何结构及其(PS)序列的有界性, 其次将给出定理 1 的证明。

引理 4 若假设条件(v₀), (v₁)成立, 那么, 存在 $\rho, \alpha > 0$ 和 $e \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, 使得

a. 当 $\|v\| = \rho$ 时, 有 $J(v) > \alpha$;

b. 当 $\|e\| > \rho$ 时, 有 $J(e) < 0$ 。

证明 结合式(4)、引理 1、引理 3 和 Sobolev 嵌入定理, 可得

$$\begin{aligned} J(v) \geq & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |v|^2 dx - \\ & \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |v|^p) |v|^p dx \geq \\ & \frac{1}{3} \min \{1, V_0\} \|v\|^2 - \frac{1}{2p} C \|v\|^{2p} \end{aligned}$$

根据 $p > 1$, 可知 $J(v)$ 在 $v = 0$ 处具有局部最小值。

固定 $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, 并假设 $\text{supp } \omega = \Omega$, 且在 $\Omega' \subset \Omega$ ($|\Omega'| > 0$) 中 $\omega \geq 1$, 则可得

$$\begin{aligned} J(t\omega) \leq & \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega|^2 dx + \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |\omega|^2 dx - \\ & \frac{1}{2p} C t^{2p} \int_{\Omega'} (I_\alpha * |\omega|^p) |\omega|^p dx \end{aligned}$$

由于 $p > 1$, 因此, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $J(t\omega) \rightarrow -\infty$ 。

综上, 泛函 J 满足山路几何结构。证毕。

称序列 $\{v_n\}$ 是泛函 φ 的一个 (PS) 序列, 若当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $\varphi(v_n) \rightarrow c$, $\varphi'(v_n) \rightarrow 0$ 。那么, 结合引理 4 及文献 [7] 中的山路定理, 可得泛函 J 在对应的山路水平 d 处有 (PS) $_d$ 序列 $\{v_n\}$, 即 $J(v_n) \rightarrow d$, $J'(v_n) \rightarrow 0$ 。

引理 5 在假设条件 (v_0) , (v_1) 下, J 的 (PS) 序列 $\{v_n\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中有界。

证明 令 $\{v_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ 为泛函 J 的 (PS) 序列, 则满足

$$\langle J'(v_n), \varphi_n \rangle = o_n(1) \|\varphi_n\|$$

$$\begin{aligned} J(v_n) = & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v_n|^2 + V(x) |G^{-1}(v_n)|^2 \right) dx - \\ & \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |G^{-1}(v_n)|^p) |G^{-1}(v_n)|^p dx = \\ & d + o_n(1) \end{aligned} \tag{5}$$

若取 $\varphi_n = G^{-1}(v_n)g(G^{-1}(v_n)) \in H^1(\mathbb{R}^N)$, 则有

$$\begin{aligned} \langle J'(v_n) - J'(v), \varphi \rangle = & \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v_n - \nabla v) \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) \left(\frac{G^{-1}(v_n)}{g(G^{-1}(v_n))} - \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} \right) \varphi dx - \\ & \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{(I_\alpha * |G^{-1}(v_n)|^p) |G^{-1}(v_n)|^{p-1}}{g(G^{-1}(v_n))} - \frac{(I_\alpha * |G^{-1}(v)|^p) |G^{-1}(v)|^{p-1}}{g(G^{-1}(v))} \right) \varphi dx \end{aligned} \tag{6}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 式 (6) 的右边收敛到 0, 进而得出 $\langle J'(v), \varphi \rangle = 0$ 。

首先, 在 $K_\varphi := \text{supp } \varphi$ 中, 有 $|v_n(x)| \leq |w_p(x)|$, 其中, $|w_p(x)| \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $2 \leq p < 2^*$, 则由假设条件 (v_1) , 有下式成立:

$$\left| V(x) \frac{G^{-1}(v_n)}{g(G^{-1}(v_n))} \varphi \right| \leq C V_\infty |v_n| |\varphi| \leq C V_\infty |w_p| |\varphi| \quad \forall x \in K_\varphi$$

$$\begin{aligned} o_n(1) \|\varphi_n\| = & \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla (G^{-1}(v_n)g(G^{-1}(v_n))) dx + \\ & \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |G^{-1}(v_n)|^2 dx - \\ & \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |G^{-1}(v_n)|^p) |G^{-1}(v_n)|^p dx \end{aligned}$$

根据引理 1 可知,

$$\|G^{-1}(v_n)g(G^{-1}(v_n))\| \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \|v_n\|$$

从而,

$$\langle J'(v_n), G^{-1}(v_n)g(G^{-1}(v_n)) \rangle = o_n(1) \|v_n\|$$

进而可以推导出

$$\begin{aligned} 2pd + o_n(1) + o_n(1) \|v_n\| = \\ 2pJ(v_n) - \langle J'(v_n), G^{-1}(v_n)g(G^{-1}(v_n)) \rangle \geq \\ (p-6+2\sqrt{6}) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx + (p-1) \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |G^{-1}(v_n)|^2 dx \geq \\ (p-6+2\sqrt{6}) \min \{1, V_0\} \|v_n\|^2 \end{aligned}$$

注意到 $p > 6 - 2\sqrt{6}$, 故 $\|v_n\| < \infty$ 。证毕。

引理 6 假设条件 (v_0) , (v_1) 成立, 那么, J 有一个临界点。

证明 设 $\{v_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ 是由引理 4 中给出的泛函 J 的有界 (PS) 序列, 则存在子列 $\{v_n\}$ (仍记为本身) 及 $v \in H_1(\mathbb{R}^N)$, 使得 $v_n \rightharpoonup v$ (在 $H_1(\mathbb{R}^N)$ 中), $v_n \rightarrow v$ (在 $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^N)$ 中), 其中, $p \in [2, 2^*)$, $v_n \rightarrow v$, a.e. $x \in \mathbb{R}^N$ 。

现证明 v 是 J 的临界点, 也就是说 $J'(v) = 0$ 。由于 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中稠密, 所以, 为证明 $J'(v) = 0$, 只需要证明对于所有 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, 有 $\langle J'(v), \varphi \rangle = 0$ 。因为,

故由勒贝格控制收敛定理可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) \frac{G^{-1}(v_n)}{g(G^{-1}(v_n))} \varphi dx = \\ \int_{\mathbb{R}^N} V(x) \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} \varphi dx \end{aligned} \tag{7}$$

其次, 对于式 (6) 右边的第三项, 有

$$J_3 = \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{(I_\alpha * |G^{-1}(v_n)|^p)|G^{-1}(v_n)|^{p-1}}{g(G^{-1}(v_n))} - \frac{(I_\alpha * |G^{-1}(v)|^p)|G^{-1}(v)|^{p-1}}{g(G^{-1}(v))} \right) \varphi dx \right| \leq \\ \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |G^{-1}(v_n)|^p) \left| \frac{|G^{-1}(v_n)|^{p-1}}{g(G^{-1}(v_n))} - \frac{|G^{-1}(v)|^{p-1}}{g(G^{-1}(v))} \right| |\varphi| dx + \\ \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{(I_\alpha * |G^{-1}(v_n)|^p)|G^{-1}(v)|^{p-1}}{g(G^{-1}(v))} - \frac{(I_\alpha * |G^{-1}(v)|^p)|G^{-1}(v)|^{p-1}}{g(G^{-1}(v))} \right) \varphi dx \right| := \\ K_1 + K_2$$

一方面，取引理 3 中的 $r = \frac{2N}{N+\alpha}$ ，则由引理 1、引理 2 及 Hölder 不等式可知

$$K_1 = \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |G^{-1}(v_n)|^p) \left| \frac{|G^{-1}(v_n)|^{p-1}}{g(G^{-1}(v_n))} - \frac{|G^{-1}(v)|^{p-1}}{g(G^{-1}(v))} \right| |\varphi| dx \leq \\ C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{pr} dx \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} ||v_n|^{p-1} - |v|^{p-1}|^r \varphi^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq \\ C \left(\int_{\mathbb{R}^N} ||v_n|^{p-1} - |v|^{p-1}|^{\frac{pr}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{pr}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{pr} dx \right)^{\frac{1}{pr}}$$

故由控制收敛定理可得， $K_1 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 。

另一方面，考虑 $r = \frac{2N}{N+\alpha}$ ，由 $\frac{N+\alpha}{N} \leq p < \frac{N+\alpha}{N-2}$ ，引理 1 及 Hölder 不等式可得

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{|G^{-1}(v)|^{p-1} \varphi}{g(G^{-1}(v))} \right|^r dx \leq \\ C \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{(p-1)r} |\varphi|^r \leq C |v|_{pr}^{r(p-1)} |\varphi|_{pr}^r \quad (8)$$

因为， $pr \in [2^*, 2)$ ，故 $\frac{|G^{-1}(v)|^{p-1} \varphi}{g(G^{-1}(v))} \in L^r(\mathbb{R}^N)$ 。设

$$T(u) := \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * u) \frac{|G^{-1}(v)|^{p-1} \varphi}{g(G^{-1}(v))} dx$$

由式(8)可知， $T : L^r(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个连续线性泛函。又 $\{v_n\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中有界，则 $|G^{-1}(v_n)|^p \rightarrow |G^{-1}(v)|^p$ 。因此，当 $n \rightarrow \infty$ 时， $T(|G^{-1}(v_n)|^p) \rightarrow T(|G^{-1}(v)|^p)$ ，即 $K_2 \rightarrow 0$ 。

所以，当 $n \rightarrow \infty$ 时，有 $J_3 \leq K_1 + K_2 \rightarrow 0$ 。综上， $\langle J'(v_n) - J'(v), \varphi \rangle \rightarrow 0$ ，即 v 是 J 的临界点。证毕。

如果 $v \neq 0$ ，则原问题即有非平凡解。为了证明 $v \neq 0$ ，考虑以下极限泛函及其导数：

$$J_\infty = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty |G^{-1}(v)|^2 dx - \\ \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |G^{-1}(v)|^p) |G^{-1}(v)|^p dx \langle J'_\infty(v), \varphi \rangle = \\ \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} \varphi dx - \\ \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(I_\alpha * |G^{-1}(v)|^p) |G^{-1}(v)|^{p-1}}{g(G^{-1}(v))} \varphi dx$$

引理 7 假设条件 $(v_0), (v_1)$ 成立，设 $\{v_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ 是泛函 J 的有界 (PS) 序列（由引理 4 中给出）且 $\{v_n\} \rightarrow 0$ ，则当 $n \rightarrow \infty$ 时，有 $J_\infty(v_n) \rightarrow d$ 和 $J'_\infty(v_n) \rightarrow 0$ 。

证明 因为， $\{v_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ 是泛函 J 的有界 (PS) 序列，则存在 $M_1 > 2V_\infty$ ，使得 $\int_{\mathbb{R}^N} |G^{-1}(v_n)|^2 < M_1$ 。又根据假设条件 (v_1) 及在 $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N) (p \in [2, 2^*))$ 中有 $v_n \rightarrow 0$ 可得，对任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在 $M > 0$ ，使得当 n 充分大时，有

$$0 \leq V_\infty - V(x) < \frac{\varepsilon}{2M_1}, \quad \forall |x| \geq M$$

和

$$\int_{B_M(0)} |v_n|^2 dx < \frac{\varepsilon}{4V_\infty}$$

因此，当 $n \rightarrow \infty$ 时，有

$$0 \leq |J_\infty(v_n) - J(v_n)| = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_M(0)} (V_\infty - V(x)) |G^{-1}(v_n)|^2 dx + \\ \int_{B_M(0)} (V_\infty - V(x)) |G^{-1}(v_n)|^2 dx < \varepsilon$$

类似地，当 $n \rightarrow \infty$ 时，可有

$$\|J'_\infty(v_n) - J'(v_n)\| = \sup_{\|\phi\|=1} |\langle J'_\infty(v_n) - J'(v_n), \phi \rangle| \leq \\ \sup_{\|\phi\|=1} \left| C \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V(x)) v_n \phi dx \right| \rightarrow 0$$

这样便完成了引理 7 的证明。

定理 1 的证明 根据引理 7，为了证明定理 1，只需要证明 $v \neq 0$ 。现利用反证法来证明。

首先若假设条件 $(v_0), (v_1)$ 成立，且 $\{v_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ 是 J 的有界 (PS) 序列，那么，对于 $\{v_n\}$ 来说，存在一个序列 $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ 和 $r, \sigma > 0$ ，使得当 $n \rightarrow \infty$ 时，有 $|y_n| \rightarrow \infty$ ，且

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_r(y_n)} |v_n|^p dx \geq \sigma > 0 \quad (9)$$

其中， $2 \leq p < 2^*$ 。事实上，若式(9)不成立，则有 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_r(y_n)} |v_n|^p dx = 0$ 。则根据 Lions 集中紧性结果可得，在空间 $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ 中， $v_n \rightarrow 0 (2 < p < 2^*)$ 。进一步利用引理 1 及引理 3 可推出

$$2d+o_n(1)=2J(v_n)-\langle J'(v_n),v_n\rangle\leqslant$$
$$C|v_n|_2^2+C|v_n|_{pr}^{2p}=o_n(1)$$

$$d\leqslant\max_{t\in[0,1]}J(\gamma(t))=J(\gamma(\bar{t}))<J_\infty(\gamma(\bar{t}))\leqslant$$
$$\max_{t\in[0,1]}J_\infty(\gamma(t))=J_\infty(\bar{v})\leqslant d$$

这是矛盾的。故式(9)成立。

定义 $\bar{v}_n(x)=v_n(x+y_n),n\in\mathbb{N}$,不妨假设 $\{y_n\}\subset\mathbb{Z}^N$,那么,根据引理 6 及平移不变性可知, $\{\bar{v}_n\}$ 是 J_∞ 的一个有界(PS)序列。对于 $\{\bar{v}_n\}$ 的子序列,设其弱极限为 $\bar{v}\in H^1(\mathbb{R}^N)$,则有 $\bar{v}_n\rightarrow\bar{v}$ (在 $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ 中),故由式(9)可知

$$0<\sigma\leqslant\int_{B_r(v_n)}|v_n|^2\mathrm{d}x=\int_{B_r(0)}|\bar{v}_n|^2\mathrm{d}x\rightarrow\int_{B_r(0)}|\bar{v}|^2\mathrm{d}x$$

这表明 $\bar{v}\neq 0$ 。进一步,对任意的 $\varphi\in H^1(\mathbb{R}^N)$,有 $J'_\infty(\bar{v})\varphi=0$ 。因此,证得 J_∞ 有非平凡的临界点 $\bar{v}$ 。

其次,由引理 1 和 Fatou 引理可得

$$2pd=\limsup_{n\rightarrow\infty}\left[2pJ_\infty(\bar{v}_n)-\left\langle J'_\infty(\bar{v}_n),G^{-1}(\bar{v}_n)g(G^{-1}(\bar{v}_n))\right\rangle\right]\geqslant$$
$$\left(p-1-\frac{G^{-1}(\bar{v})g'(G^{-1}(\bar{v}))}{g(G^{-1}(\bar{v}))}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\bar{v}|^2\mathrm{d}x+$$
$$(p-1)\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|G^{-1}(\bar{v})|^2\mathrm{d}x=$$
$$2pJ_\infty(\bar{v})-\left\langle J'_\infty(\bar{v}),G^{-1}(\bar{v})g(G^{-1}(\bar{v}))\right\rangle$$

即 $\bar{v}\neq 0$ 是 J_∞ 的满足 $J_\infty(\bar{v})\leqslant d$ 的一个临界点。设

$$d:=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}J(\gamma(t)),\quad\bar{d}:=\inf_{\gamma\in\bar{\Gamma}}\max_{t\in[0,1]}J_\infty(\gamma(t))$$
$$\Gamma:=\left\{\gamma\in C([0,1],H^1(\mathbb{R}^N)):\gamma(0)=0,J(\gamma(1))<0,\gamma(1)\neq 0\right\}$$
$$\bar{\Gamma}:=\left\{\gamma\in C([0,1],H^1(\mathbb{R}^N)):\gamma(0)=0,J_\infty(\gamma(1))<0,\gamma(1)\neq 0\right\}$$

借助文献 [8] 中类似的方法,可选取一个特定的路径 $\gamma:[0,1]\rightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$,其中, γ 满足

$$\begin{cases} \gamma(0)=0,J_\infty(\gamma(1))<0,\bar{v}\in\gamma([0,1]) \\ \gamma(t)(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}^N,t\in(0,1] \\ \max_{t\in(0,1]}J_\infty(\gamma(t))=J_\infty(\bar{v}) \end{cases}\quad(10)$$

对于式(10)给出的路径,有 $\gamma\in\bar{\Gamma}\subset\Gamma$ 成立,故

这是一个矛盾的结果。因此,从以上论证可以得出 v 是 J_∞ 的一个非平凡临界点。

参考文献:

[1] CHU C M, LIU H D. Existence of positive solutions for a quasilinear Schrödinger equation[J]. [Nonlinear Analysis: Real World Applications](#), 2018, 44: 118–127.

[2] SHEN Y T, WANG Y J. Soliton solutions for generalized quasilinear Schrödinger equations[J]. [Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications](#), 2013, 80: 194–201.

[3] HUANG C, JIA G. Existence of positive solutions for supercritical quasilinear Schrödinger elliptic equations[J]. [Journal of Mathematical Analysis and Applications](#), 2019, 472(1): 705–727.

[4] MOROZ V, VAN SCHAFTINGEN J. Groundstates of nonlinear Choquard equations: existence, qualitative properties and decay asymptotics[J]. [Journal of Functional Analysis](#), 2013, 265(2): 153–184.

[5] CHEN S X, WU X. Existence of positive solutions for a class of quasilinear Schrödinger equations of Choquard type[J]. [Journal of Mathematical Analysis and Applications](#), 2019, 475(2): 1754–1777.

[6] YANG J, WANG Y J, ABDELGADIR A A. Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations[J]. [Journal of Mathematical Physics](#), 2013, 54(7): 071502.

[7] WILLEM M. Minimax theorems[M]. Boston: Birkhauser, 1996.

[8] JEANJEAN L, TANAKA K. A remark on least energy solutions in $\mathbb{R}^N$ [J]. [Proceedings of the American Mathematical Society](#), 2003, 131(8): 2399–2408.

(编辑: 石 瑛)