

一类考虑媒体报道影响和垂直 传染的随机 SIS 模型研究

马莎莎, 马纪英

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 研究了一类考虑媒体报道影响和垂直传染的随机 SIS 传染病模型的动力学行为。首先, 证明了系统的全局正解的存在唯一性, 同时分析了模型在相应确定性模型的地方病平衡点附近的渐近行为。其次, 通过构造恰当的 Lyapunov 函数, 得到了疾病灭绝的条件以及系统具有唯一遍历平稳分布的充分条件。最后, 通过数值模拟验证了所得结论的正确性。

关键词: 媒体报道; 垂直传染; Lyapunov 函数; 灭绝; 遍历平稳分布

中图分类号: O 175.1 **文献标志码:** A

A stochastic SIS epidemic model with vertical transmission and media coverage

MA Shasha, MA Jiying

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The dynamics of a stochastic SIS epidemic model with vertical transmission and media coverage was investigated. The existence and uniqueness of the global position solution of the model was proved, and the asymptotic behavior around the endemic equilibrium of the corresponding deterministic model was analyzed. Then, by constructing a suitable Lyapunov function, the sufficient conditions for the extinction of disease as well as the existence of unique ergodic stationary distribution were obtained. Numerical simulations were displayed to support the theoretical results.

Keywords: media coverage; vertical transmission; Lyapunov function; extinction; ergodic stationary distribution

1 模型的建立

传染病是一种在人、动物或人与动物之间相

互传播的疾病, 严重危害人类的健康^[1]。为了更好地分析传染病的传播机理和发病规律, 人们从流行病学和生物数学的角度对传染病进行了大量研

收稿日期: 2019-10-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11501364); 上海理工大学科技发展项目 (2018KJFZ148, 2019KJFZ171, 2020KJFZ161)

第一作者: 马莎莎 (1994-), 女, 硕士研究生。研究方向: 生物数学。E-mail: mashasha3232@163.com

通信作者: 马纪英 (1986-), 女, 讲师。研究方向: 生物数学。E-mail: majiying100@126.com

究。1927年，Kermack 和 Mckendrick 建立了经典的 SIS 传染病模型^[2]，之后许多学者在各种因素和假设下进一步研究了 SIS 模型^[3-5]。2018年，Zhang 等^[5]提出了一类考虑垂直传染的 SIS 模型：

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda + bS(t) - \beta S(t)I(t) - dS(t) - BS(t) + \gamma I(t) + bqI(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = bpI(t) + \beta S(t)I(t) - dI(t) - \alpha I(t) - BI(t) - \gamma I(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中： $S(t), I(t)$ 分别表示 t 时刻易感者和感染者的数量； Λ 表示种群的输入率； b 表示种群的自然出生率； β 表示疾病的传染率； d 表示种群的自然死亡率； B 表示易感者和感染者的输出率； α 表示疾病的死亡率； γ 表示疾病的恢复率； p 表示感染者母性的后代是感染者的输入率， $0 < p < 1$ ； $q = 1 - p$ ，表示感染者母性的后代是易感者的输入率，所有的参数均为正。

对于模型(1)，种群的承载能力不超过 $\Lambda/(d + B - b)$ ，故文献[5]中假设 $d + B - b > 0$ 。

在疾病爆发初期，人们通过媒体报道可以获得有关传染病的信息和预防疾病的措施，从而减少易感者和感染者之间的有效接触率，降低感染人群的比例。因此，很多学者在传染病模型的研究中考虑了媒体报道的影响^[6-7]。此外，当种群数量较大时，模型(1)中选取的双线性发病率 βSI 变得不符合疾病传播的实际情况，故在越来越多的传染病模型研究中采用非线性发病率。2006年，Xiao 等^[8]考虑了一类具有心理效应的非单调发病率 $kSI/(1 + \beta_3 I + \alpha_2 I^2)$ ，且对于任意的 $I \geq 0$ ，都有 $1 + \beta_3 I + \alpha_2 I^2 > 0$ ，即 $\beta_3 > -\sqrt{2\alpha_2}$ 。本文在模型(1)的基础上考虑媒体报道影响和文献[8]中的非单调发病率，得到如下 SIS 模型：

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda + bS - \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{\alpha_1 + I}\right) \frac{SI}{1 + \beta_3 I + \alpha_2 I^2} - dS - BS + \gamma I + bqI \\ \frac{dI}{dt} = bpI + \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{\alpha_1 + I}\right) \frac{SI}{1 + \beta_3 I + \alpha_2 I^2} - dI - \alpha I - BI - \gamma I \end{cases} \quad (2)$$

这里假设疾病的传染率为非线性函数 $\beta = \beta_1 - \frac{\beta_2 I}{\alpha_1 + I}$ 的形式^[9]。 β_1 表示易感者和感染者之间的最大传染率； $\frac{\beta_2 I}{\alpha_1 + I}$ 表示经由媒体报道后引起人们的警觉而导致的传染率的减少量。当 $I \rightarrow \infty$ 时，传染率的减少量趋于最大值 β_2 ，由于媒体报道不能完全阻

止传染病的传播，故假设 $\beta_1 > \beta_2$ 。 $\alpha_1 > 0$ 表示疾病发生后公众的反应情况。

另一方面，在真实世界中传染病的传播总会受到环境噪声的影响。本文假设环境噪声为白噪声且与 S, I 成正比，从而得到如下具有媒体报道影响和垂直传染的随机 SIS 模型：

$$\begin{cases} dS = \left[\Lambda + bS - \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{\alpha_1 + I}\right) \frac{SI}{1 + \beta_3 I + \alpha_2 I^2} - dS - BS + \gamma I + bqI \right] dt + \sigma_1 S dB_1(t) \\ dI = \left[bpI + \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{\alpha_1 + I}\right) \frac{SI}{1 + \beta_3 I + \alpha_2 I^2} - dI - \alpha I - BI - \gamma I \right] dt + \sigma_2 I dB_2(t) \end{cases} \quad (3)$$

式中： $B_i(t)$ 为相互独立的一维布朗运动， $i = 1, 2$ ； σ_i 为噪声强度。

本文证明了模型(3)全局正解的存在唯一性，分析了其在确定性模型(2)的地方病平衡点附近的渐近行为，并着重讨论模型(3)疾病灭绝的条件以及存在唯一遍历平稳分布的充分条件。为了直观地说明理论结果，进一步对模型(3)进行了数值模拟。

2 随机模型(3)在地方病平衡点附近的渐近行为

在考虑模型(3)的动力学行为之前，研究者首先关心的是系统全局正解的存在性。本文利用停时理论^[10]和解的存在唯一性定理^[10]证明模型(3)全局正解的存在唯一性。在此之前给出记号： $R_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0 \text{ 对于所有的 } 1 \leq i \leq n\}$ ， $a \wedge b = \min\{a, b\}$ ， $a \vee b = \max\{a, b\}$ ， $\langle f(t) \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds$ 。

定理 1 对于任意给定的初值 $(S(0), I(0)) \in R_+^2$ ，则当 $t \geq 0$ 时，模型(3)存在唯一的全局正解 $(S(t), I(t))$ ，并且该解以概率为1存在于 R_+^2 中，即 $(S(t), I(t)) \in R_+^2$ a.s.。

证明 由于随机模型(3)满足局部 Lipschitz 条件，故对于任意给定的初值 $(S(0), I(0)) \in R_+^2$ ，模型(3)存在唯一局部解 $(S(t), I(t)), t \in [0, \tau_e)$ 。式中， τ_e 表示爆破时间^[10]。要证明随机模型(3)的解是全局的，只需证明 $\tau_e = \infty$ a.s.。取充分大的整数 $k_0 > 0$ ，对于任意的 $k > k_0$ ，使得解 $S(t)$ 和 $I(t)$ 都属于区间 $[1/k_0, k_0]$ 。定义停时

$$\tau_k = \inf \left\{ t \in [0, \tau_e) : \min\{S(t), I(t)\} \leq \frac{1}{k}, \max\{S(t), I(t)\} \geq k \right\}$$

令 $\inf \Phi = \infty$ (Φ 表示空集), 由停时的定义可得, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, τ_k 单调递增。令 $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$, 显然 $\tau_\infty \leq \tau_e$ a.s.。若 $\tau_\infty = \infty$ a.s., 则 $\tau_e = \infty$ a.s.。如若不然, 则存在常数 $T > 0$ 和 $\varepsilon \in (0, 1)$, 使得 $P\{\tau_\infty \leq T\} > \varepsilon$ 。由 τ_∞ 定义可知, 存在 $k_1 > k_0$, 使得当 $k > k_1$ 时, 有 $P\{\tau_k \leq T\} > \varepsilon$ 。

$$LV(S, I) = \left(1 - \frac{1}{S}\right) \left[\Lambda - (d + B - d)S - \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{\alpha_1 + I}\right) \frac{SI}{1 + \beta_3 I + \alpha_2 I^2} + (\gamma + bq)I \right] + \frac{\sigma_1^2}{2} +$$
$$\left(1 - \frac{1}{I}\right) \left[\left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{\alpha_1 + I}\right) \frac{SI}{1 + \beta_3 I + \alpha_2 I^2} - (d + \alpha + B + \gamma - bp)I \right] + \frac{\sigma_2^2}{2} =$$
$$\Lambda - (d + B - b)S + (\gamma + bq)I - \frac{\Lambda}{S} + d + B - b + \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{\alpha_1 + I}\right) \frac{I}{1 + \beta_3 I + \alpha_2 I^2} -$$
$$\frac{(\gamma + bq)I}{S} + \frac{\sigma_1^2}{2} - (d + B + \alpha + \gamma - bp)I + d + B + \alpha + \gamma - bp - \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{\alpha_1 + I}\right) \frac{S}{1 + \beta_3 I + \alpha_2 I^2} + \frac{\sigma_2^2}{2} \leq$$
$$\Lambda + d + B - b + \frac{2\beta_1 - \beta_2}{\beta_3 + 2\sqrt{\alpha_2}} + \frac{\sigma_1^2}{2} + d + B + \alpha + \gamma - bp + \frac{\sigma_2^2}{2} := K$$

这里 K 是正常数。故有

$$dV(S, I) \leq K dt + \sigma_1(S - 1)dB_1(t) + \sigma_2(I - 1)dB_2(t)$$

对上式两端分别从 0 到 $\tau_k \wedge T$ 积分, 并求数学期望可得

$$EV(S(\tau_k \wedge T), I(\tau_k \wedge T)) \leq V(S(0), I(0)) + KT$$

令 $\Omega_k = \{\omega \in \Omega : \tau_k(\omega) \leq T\}$, 则 $P(\Omega_k) \geq \varepsilon$ 。对于每个 $\omega \in \Omega_k$, 根据停时的定义可知 $S(\tau_k, \omega)$ 和 $I(\tau_k, \omega)$ 至少有一个等于 k 或 $1/k$, 所以, $V(S(\tau_k, \omega), I(\tau_k, \omega)) \geq (k - 1 - \ln k) \wedge \left(\frac{1}{k} - 1 + \ln k\right)$ 。因此

$$\infty > V(S(0), I(0)) + KT \geq E(I_{\Omega_k}(\omega) V(S(\tau_k), I(\tau_k))) = P(\Omega_k) V(S(\tau_k), I(\tau_k)) \geq \varepsilon V(S(\tau_k), I(\tau_k)) \geq \varepsilon \left[(k - 1 - \ln k) \wedge \left(\frac{1}{k} - 1 + \ln k\right) \right]$$

式中, $I_{\Omega_k}(\omega)$ 为 Ω_k 的示性函数。

令 $k \rightarrow \infty$, 上式可得 $\infty > V(S(0), I(0)) + KT > +\infty$ 矛盾, 故 $\tau_\infty = \infty$ a.s.。定理证毕。

对于确定性模型 (2), 通过计算可得其基本再生数为 $R_0 = \frac{\beta_1 \Lambda}{(d + B - b)(d + \alpha + B + \gamma - bp)}$, 无病平衡点为 $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{d + B - b}, 0\right)$ 。

对模型 (2) 的平衡点及其稳定性进行分析, 得到如下引理。

引理 1 对确定性模型 (2),

a. 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的;

定义正定函数

$$V(S, I) = (S - 1 - \ln S) + (I - 1 - \ln I)$$

由 Itô 公式可得

$$dV(S, I) = LV(S, I) dt + \sigma_1(S - 1)dB_1(t) + \sigma_2(I - 1)dB_2(t)$$

其中

b. 当 $R_0 > 1$ 时, E_0 是不稳定的, 模型 (2) 存在唯一的地方病平衡点 $E_* = (S_*, I_*)$, 其中: I_* 是函数 $g(I) := \Lambda -$

$$\frac{(d + B - b)(d + B + \alpha + \gamma - bp)(1 + \beta_3 I + \alpha_2 I^2)(\alpha_1 + I)}{\beta_1(\alpha_1 + I) - \beta_2 I} -$$
$$(d + B + \alpha - b)I$$

的零点; $S_* = \frac{(d + B + \alpha + \gamma - bp)(1 + \beta_3 I_* + \alpha_2 I_*^2)(\alpha_1 + I_*)}{\beta_1(\alpha_1 + I_*) - \beta_2 I_*}$ 。

此时, E_* 是全局渐近稳定的。

证明 a. 在无病平衡点 $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{d + B - b}, 0\right)$ 处, 模型 (2) 的雅可比矩阵为

$$\begin{pmatrix} b - d - B & -\frac{\beta_1 \Lambda}{d + B - b} \\ 0 & -(d + B + \alpha + \gamma - bp) + \frac{\beta_1 \Lambda}{d + B - b} \end{pmatrix}$$

故模型 (2) 在无病平衡点处的线性近似方程的特征根为

$$\lambda_1 = -(d + B - b) < 0$$
$$\lambda_2 = -(d + B + \alpha + \gamma - bp) + \frac{\beta_1 \Lambda}{d + B - b} = (d + B + \alpha + \gamma - bp)(R_0 - 1)$$

当 $R_0 < 1$ 时, $\lambda_2 < 0$ 。故无病平衡点 E_0 是局部渐近稳定的。另外, 当 $R_0 < 1$ 时, 系统 (2) 在 R_+^2 内除 $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{d + B - b}, 0\right)$ 外无其他平衡点, 因而系统 (2) 在 R_+^2 内无极限环。故无病平衡点 $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{d + B - b}, 0\right)$ 是全局渐近稳定的。

b. 当 $R_0 > 1$ 时, 系统 (2) 在 E_0 处的线性近似方程的特征根 $\lambda_2 > 0$, 故 E_0 是不稳定的。考虑函数

$$g(I) := \Lambda - \frac{(d+B-b)(d+B+\alpha+\gamma-bp)(1+\beta_3I+\alpha_2I^2)(\alpha_1+I)}{\beta_1(\alpha_1+I)-\beta_2I} - (d+B+\alpha-b)I$$

则 $g(I)$ 单调递减且 $\lim_{I \rightarrow +\infty} g(I) = -\infty$ 。又当 $R_0 > 1$ 时,

$$g(0) = \frac{(d+B-b)(d+B+\alpha+\gamma-bp)}{\beta_1}(R_0-1) > 0$$

故 $g(I)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一的解, 记为 I_* 。因此, 模型 (2) 存在唯一的地方病平衡点 $E_*(S_*,I_*)$, 其中

$$\begin{aligned} \frac{dV_2}{dt} &= \left(1 - \frac{I_*}{I}\right) \left[bpI + \left(\beta_1 - \frac{\beta_2I}{\alpha_1+I}\right) \frac{SI}{1+\beta_3I+\alpha_2I^2} - dI - BI - \alpha I - \gamma I \right] = \\ &= (I-I_*) \left[\left(\beta_1 - \frac{\beta_2I}{\alpha_1+I}\right) \frac{S}{1+\beta_3I+\alpha_2I^2} - \left(\beta_1 - \frac{\beta_2I_*}{\alpha_1+I_*}\right) \frac{S_*}{1+\beta_3I_*+\alpha_2I_*^2} \right] = \\ &= -\frac{\beta_2S(I-I_*)}{1+\beta_3I+\alpha_2I^2} \left(\frac{I}{\alpha_1+I} - \frac{I_*}{\alpha_1+I_*} \right) + \left(\beta_1 - \frac{\beta_2I_*}{\alpha_1+I_*}\right) (I-I_*) \left(\frac{S}{1+\beta_3I+\alpha_2I^2} - \frac{S_*}{1+\beta_3I_*+\alpha_2I_*^2} \right) = \\ &= -\frac{\beta_2\alpha_1S(I-I_*)^2}{(1+\beta_3I+\alpha_2I^2)(\alpha_1+I)(\alpha_1+I_*)} + \left(\beta_1 - \frac{\beta_2I_*}{\alpha_1+I_*}\right) (I-I_*) \frac{(S-S_*)+\beta_3(SI_*-S_*I)+\alpha_2(SI_*^2-S_*I^2)}{(1+\beta_3I+\alpha_2I^2)(1+\beta_3I_*+\alpha_2I_*^2)} \leqslant \\ &= \left(\beta_1 - \frac{\beta_2I_*}{\alpha_1+I_*}\right) (I-I_*) \frac{(1+\beta_3I+\alpha_2I^2)(S-S_*)+\beta_3S(I_*-I)+\alpha_2(SI_*^2-I_*^2)}{(1+\beta_3I+\alpha_2I^2)(1+\beta_3I_*+\alpha_2I_*^2)} \leqslant \\ &= \left(\beta_1 - \frac{\beta_2I_*}{\alpha_1+I_*}\right) \frac{(S-S_*)(I-I_*)}{1+\beta_3I_*+\alpha_2I_*^2} \end{aligned}$$

令 $V(S,I) = V_1(S,I) + fV_2(I)$, 其中

$$f = \frac{(1+\beta_3I_*+\alpha_2I_*^2)(2d+2B-2b+\alpha)(\alpha_1+I_*)}{(\beta_1-\beta_2)I_*+\beta_1\alpha_1} \quad (4)$$

容易验证 $V(S,I)$ 是无穷大正定函数, 且

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -(d+B-b)(S-S_*)^2 - (d+B-b+\alpha)(I-I_*)^2 \leqslant 0$$

等号仅在 $S=S_*, I=I_*$ 时成立。因此, 正平衡点 E_* 是全局渐近稳定的, 疾病会形成地方病。引理证毕。

由于随机模型 (3) 不存在地方病平衡点, 但该模型是确定性模型加入随机扰动得到的, 所以研究随机模型的解在 E_* 附近的渐近行为在一定程度上反映了疾病是否流行。

$$S_* = \frac{(d+B+\alpha+\gamma-bp)(1+\beta_3I_*+\alpha_2I_*^2)(\alpha_1+I_*)}{\beta_1(\alpha_1+I_*)-\beta_2I_*}$$

下面考虑平衡点 E_* 的稳定性。定义如下正定函数

$$V_1(S,I) = \frac{(S-S_*+I-I_*)^2}{2}, V_2(I) = I-I_*-I_*\ln\frac{I}{I_*}$$

则其沿着系统 (2) 的解轨线的全导数为

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= (S-S_*+I-I_*)[\Lambda - (d+B-b)S - (d+B-b+\alpha)I] = \\ &= -(d+B-b)(S-S_*)^2 - (d+B-b+\alpha)(I-I_*)^2 - (2d+2B-2b+\alpha)(S-S_*)(I-I_*) \end{aligned}$$

定理 2 对于任意给定的初值 $(S(0),I(0)) \in R_+^2$, $(S(t),I(t)) \in R_+^2, t \geqslant 0$, 是模型 (3) 的全局解。当 $R_0 > 1$ 时, 若 $\sigma_1^2 < d+B-b$ 和 $\sigma_2^2 < d+B-b+\alpha$ 成立, 则模型 (3) 的解满足

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t [(S(s)-S_*)^2 + (I(s)-I_*)^2] ds \leqslant \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

其中: $\eta_1 = \sigma_1^2 S_*^2 + \sigma_2^2 I_*^2 + \frac{f\sigma_2^2 I_*}{2}; \eta_2 = \min\{m_1, m_2\}, m_1 = d+B-b-\sigma_1^2, m_2 = d+B-b+\alpha-\sigma_2^2; f$ 的表达式由式 (4) 给出。

证明 考虑正定函数 $V_1(S,I) = \frac{(S-S_*+I-I_*)^2}{2}$,

$V_2(I) = I-I_*-I_*\ln\frac{I}{I_*}$ 。由 Itô 公式可得

$$\begin{aligned} LV_1 &= (S-S_*+I-I_*)[\Lambda - (d+B-b)S - (d+B-b+\alpha)I] + \frac{\sigma_1^2 S^2 + \sigma_2^2 I^2}{2} = -(d+B-b)(S-S_*)^2 - \\ &= (d+B-b+\alpha)(I-I_*)^2 + \frac{\sigma_1^2 S^2 + \sigma_2^2 I^2}{2} - (2d+2B-2b+\alpha)(S-S_*)(I-I_*) \leqslant -(d+B-b-\sigma_1^2)(S-S_*)^2 - \\ &= (d+B-b+\alpha-\sigma_2^2)(I-I_*)^2 - (2d+2B-2b+\alpha)(S-S_*)(I-I_*) + \sigma_1^2 S_*^2 + \sigma_2^2 I_*^2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} LV_2 = & \left(1 - \frac{I_*}{I}\right) \left[bpI + \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{\alpha_1 + I}\right) \frac{SI}{1 + \beta_3 I + \alpha_2 I^2} - dI - BI - \alpha I - \gamma I \right] + \frac{\sigma_2^2 I_*}{2} = \\ & (I - I_*) \left[\left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{\alpha_1 + I}\right) \frac{S}{1 + \beta_3 I + \alpha_2 I^2} - \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I_*}{\alpha_1 + I_*}\right) \frac{S_*}{1 + \beta_3 I_* + \alpha_2 I_*^2} \right] + \frac{\sigma_2^2 I_*}{2} = \\ & - \frac{\beta_2 S (I - I_*)}{1 + \beta_3 I + \alpha_2 I^2} \left(\frac{I}{\alpha_1 + I} - \frac{I_*}{\alpha_1 + I_*} \right) + \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I_*}{\alpha_1 + I_*} \right) (I - I_*) \left(\frac{S}{1 + \beta_3 I + \alpha_2 I^2} - \frac{S_*}{1 + \beta_3 I_* + \alpha_2 I_*^2} \right) + \frac{\sigma_2^2 I_*}{2} = \\ & - \frac{\beta_2 \alpha_1 S (I - I_*)^2}{(1 + \beta_3 I + \alpha_2 I^2)(\alpha_1 + I)(\alpha_1 + I_*)} + \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I_*}{\alpha_1 + I_*} \right) (I - I_*) \frac{(S - S_*) + \beta_3 (S I_* - S_* I) + \alpha_2 (S I_*^2 - S_* I^2)}{(1 + \beta_3 I + \alpha_2 I^2)(1 + \beta_3 I_* + \alpha_2 I_*^2)} + \\ & \frac{\sigma_2^2 I_*}{2} \leq \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I_*}{\alpha_1 + I_*} \right) (I - I_*) \frac{(1 + \beta_3 I + \alpha_2 I^2)(S - S_*) + \beta_3 S (I_* - I) + \alpha_2 S (I_*^2 - I^2)}{(1 + \beta_3 I + \alpha_2 I^2)(1 + \beta_3 I_* + \alpha_2 I_*^2)} + \frac{\sigma_2^2 I_*}{2} \leq \\ & \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I_*}{\alpha_1 + I_*} \right) \frac{(S - S_*)(I - I_*)}{1 + \beta_3 I_* + \alpha_2 I_*^2} + \frac{\sigma_2^2 I_*}{2} \end{aligned} \tag{6}$$

定义正定函数 $V(S, I) = V_1(S, I) + fV_2(I)$ 。由式(5)和式(6)可得

$$\begin{aligned} LV \leq & - (d + B - b - \sigma_1^2)(S - S_*)^2 - \\ & (d + B - b + \alpha - \sigma_2^2)(I - I_*)^2 + \sigma_1^2 S_*^2 + \sigma_2^2 I_*^2 + \\ & \frac{f\sigma_2^2 I_*}{2} = -m_1(S - S_*)^2 - m_2(I - I_*)^2 + \eta_1 \end{aligned}$$

故

$$dV \leq [-m_1(S - S_*)^2 - m_2(I - I_*)^2 + \eta_1]dt + (S - S_* + I - I_*)[\sigma_1 S dB_1(t) + \sigma_2 I dB_2(t)] + \sigma_2(I - I_*)dB_2(t)$$

对上式从0到 t 积分可得

$$V(S(t), I(t)) - V(S(0), I(0)) \leq \int_0^t [-m_1(S - S_*)^2 - m_2(I - I_*)^2]ds + \eta_1 t + M(t)$$

其中, $M(t) = \int_0^t (S - S_* + I - I_*)[\sigma_1 S dB_1(s) + \sigma_2 I dB_2(s)] + \sigma_2(I - I_*)dB_2(s)$ 是局部连续鞅。

对上式两边取数学期望, 可得

$$EV(S(t), I(t)) - EV(S(0), I(0)) \leq E \int_0^t [-m_1(S - S_*)^2 - m_2(I - I_*)^2]ds + \eta_1 t$$

因此,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t [(S(s) - S_*)^2 + (I(s) - I_*)^2]ds \leq \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

定理证毕。

当基本再生数 $R_0 > 1$ 时, 确定性模型(2)存在唯一的地方平衡点 $E_* = (S_*, I_*)$, 且是全局渐近稳定的。从生物学的角度看, 随着时间的增长, 系统的易感者和染病者将趋于某个常数值。定理 2 表明若考虑环境噪声的影响, 且当噪声强度比较小时, 即 $\sigma_1^2 < d + B - b$ 和 $\sigma_2^2 < d + B - b + \alpha$, 随机模型(3)的解在时间均值意义下将围绕确定性模型(2)

的地方平衡点 E_* 振动。即当 $R_0 > 1$ 时, 系统的易感者和染病者将在某个常数值附近波动, 这时我们认为疾病将会流行。

3 疾病的灭绝及遍历平稳分布的存在性

传染病能否在某时间段内得以控制和根除是流行病学研究的一个重要课题, 首先讨论疾病灭绝的条件。令

$$\hat{R}_0 = \begin{cases} \frac{4\alpha_2\Lambda(2\beta_1 - \beta_2)}{(4\alpha_2 - \beta_3^2)(d + B - b)\left(d + \alpha + B + \gamma - bp + \frac{\sigma_2^2}{2}\right)}, & -2\sqrt{\alpha_2} < \beta_3 < 0 \\ \frac{\Lambda(2\beta_1 - \beta_2)}{(d + B - b)\left(d + \alpha + B + \gamma - bp + \frac{\sigma_2^2}{2}\right)}, & \beta_3 \geq 0 \end{cases}$$

在讨论疾病的灭绝性之前, 给出如下一个有关该模型解的长时间行为的引理。

引理 2 如果 $d + B - b > \frac{\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2}{2}$ 成立, 则模型(3)的解具有以下性质:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I(t)}{t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t S(s)dB_1(s)}{t} = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t I(s)dB_2(s)}{t} = 0 \text{ a.s.}$$

此引理的证明方法是常规的, 详见文献[11], 这里不再证明。

定理 3 对于任意给定的初值 $(S(0), I(0)) \in R_+^2$, $(S(t), I(t)) \in R_+^2, t \geq 0$, 是模型(3)的全局解。如果 $\hat{R}_0 < 1, d + B - b > \frac{\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2}{2}$ 成立, 则疾病将趋于灭绝,

并且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \langle S(t) \rangle = \frac{\Lambda}{d+B-b} \quad \text{a.s.}$$

证明 由随机模型(3)的第二个方程和 Itô公式可得

$$d \ln I(t) \leq \left[-d - B - \alpha - \gamma + bp - \frac{\sigma_2^2}{2} + \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{\alpha_1 + I} \right) \frac{S}{1 + \beta_3 I + \alpha_2 I^2} \right] dt + \sigma_2 dB_2(t)$$

当 $-2\sqrt{\alpha_2} < \beta_3 < 0$ 时, 得到

$$d \ln I(t) \leq \left[-d - B - \alpha - \gamma + bp - \frac{\sigma_2^2}{2} + \frac{4\alpha_2(2\beta_1 - \beta_2)S}{4\alpha_2 - \beta_3^2} \right] dt + \sigma_2 dB_2(t) \quad (7)$$

当 $\beta_3 \geq 0$ 时, 得到

$$d \ln I(t) \leq \left[-d - B - \alpha - \gamma + bp - \frac{\sigma_2^2}{2} + (2\beta_1 - \beta_2)S \right] dt + \sigma_2 dB_2(t) \quad (8)$$

此外, 由模型(3)可知

$$\begin{aligned} d(S(t) + I(t)) &= [\Lambda + (b - B - d)(S + I) - \alpha I] dt + \\ &\sigma_1 S dB_1(t) + \sigma_2 I dB_2(t) \leq \\ &[\Lambda + (b - B - d)(S + I)] dt + \\ &\sigma_1 S dB_1(t) + \sigma_2 I dB_2(t) \end{aligned} \quad (9)$$

于是

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \langle S(t) + I(t) \rangle \leq \frac{\Lambda}{d+B-b} \quad \text{a.s.} \quad (10)$$

分别对式(6)和式(7)两边同时从0到 t 积分, 并同时除以 t 可得

$$\begin{aligned} \frac{\ln I(t) - \ln I(0)}{t} &\leq -d - B - \alpha - \gamma + bp - \frac{\sigma_2^2}{2} + \\ &\frac{1}{t} \int_0^t \frac{4\alpha_2(2\beta_1 - \beta_2)}{4\alpha_2 - \beta_3^2} S(s) ds + \frac{\sigma_2 B_2(t)}{t} \\ \frac{\ln I(t) - \ln I(0)}{t} &\leq -d - B - \alpha - \gamma + bp - \frac{\sigma_2^2}{2} + \\ &\frac{1}{t} \int_0^t (2\beta_1 - \beta_2) S(s) ds + \frac{\sigma_2 B_2(t)}{t} \end{aligned}$$

由强大数定理^[12]可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_2(t)}{t} = 0$ 。所以, 当 $\hat{R}_0 < 1$ 时, 有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln I(t)}{t} \leq \left(d + B + \alpha + \gamma - bp + \frac{\sigma_2^2}{2} \right) (\hat{R}_0 - 1) < 0$$

因此, 在模型(3)中, 感染者的数量将以指数形式趋于零, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ a.s.。另一方面, 由式(8)可知

$$\begin{aligned} \frac{S(t) - S(0)}{t} + \frac{I(t) - I(0)}{t} &= \Lambda - (d + B - b) \langle S \rangle - \\ &(d + B - b + \alpha) \langle I \rangle - \frac{\sigma_1 \int_0^t S(s) dB_1(s)}{t} + \\ &\frac{\sigma_2 \int_0^t I(s) dB_2(s)}{t} \end{aligned}$$

根据引理3得到

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \langle S(t) \rangle = \frac{\Lambda}{d+B-b} \quad \text{a.s.}$$

定理证毕。

若 $X(t)$ 为 n 维空间里的齐次马尔科夫过程, 且满足 $dX(t) = f(X(t))dt + \sum_{r=1}^n \sigma_r(X(t))dB_r(t)$, 定义扩散矩阵为 $A(x) = (a_{ij}(x))$, $a_{ij}(x) = \sum_{r=1}^n \sigma_r^i(x) \sigma_r^j(x)$ 。接下来, 将讨论随机模型(3)存在平稳分布的条件, 从而说明疾病的持久性。在此之前, 首先回顾如下引理。

引理3^[13] 马尔科夫过程 $X(t)$ 具有唯一遍历的平稳分布 $\mu(\cdot)$, 如果存在具有正规边界 Γ 的有界区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 具有如下性质:

- a. 存在一个正常数 M 满足 $\sum_{i,j=1}^l a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq M|\xi|^2$, $x \in D$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ 。
- b. 存在一个非负的 C^2 函数 V , 使得对任意的 $R^n \setminus D$, LV 是负的, 则对所有的 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立

$$p_x \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(X(t)) dt = \int_{R^n} f(x) \mu(dx) \right\} = 1$$

其中, $f(\cdot)$ 表示一个测度 μ 可积的函数。

定理4 如果 $R_0^s :=$

$$\frac{\beta_1 - \beta_2}{\left(d + B - b + \frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{2\beta_1 - \beta_2}{\sqrt{\alpha_2} + \beta_3} \right) \left(d + \alpha + B + \gamma - bp + \frac{\sigma_2^2}{2} \right)} > 1$$

且 $d + B - b > \frac{\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2}{2}$, 则模型(3)存在唯一的遍历平稳分布。

证明 给定任意初始值 $(S(0), I(0)) \in R_+^2$, 存在唯一的全局解 $(S(t), I(t)) \in R_+^2$ 。模型(3)的扩散矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 S^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I^2 \end{pmatrix}$$

由于矩阵 A 为正定矩阵, 显然引理3的条件a成立。定义一个 C^2 函数

$$\bar{V}=M\left(S+\frac{\frac{1}{2}\alpha_2I^2+\beta_3I}{d+\alpha+B+\gamma-bp}-c_1\ln S-c_2\ln I\right)-\ln S+\frac{1}{\theta+1}(S+I)^{\theta+1}:=MV_1+V_2+V_3$$

其中: $V_1=S+\frac{\frac{1}{2}\alpha_2I^2+\beta_3I}{d+\alpha+B+\gamma-bp}-c_1\ln S-c_2\ln I$; $V_2=-\ln S$; $V_3=\frac{1}{\theta+1}(S+I)^{\theta+1}$; $c_1=\frac{\Lambda}{\left(\frac{2\beta_1-\beta_2}{\sqrt{\alpha_2}+\beta_3}+d+B-b+\frac{\sigma_1^2}{2}\right)}$;

$$\begin{aligned} LV_1 &= \Lambda + (b-d-B)S - \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{\alpha_1 + I}\right) \frac{SI}{1 + \beta_3 I + \alpha_2 I^2} + (\gamma + bq)I - \frac{c_1(\gamma + bq)I}{S} + \frac{c_1\sigma_1^2}{2} - \\ &1 - \beta_3 I - \alpha_2 I^2 + c_1(d+B-b) - \frac{c_1\Lambda}{S} + \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{\alpha_1 + I}\right) \frac{c_1 I}{1 + \beta_3 I + \alpha_2 I^2} + \\ &\left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{\alpha_1 + I}\right) \frac{(\alpha_2 I + \beta_3)SI}{(d+\alpha+B+\gamma-bp)(1+\beta_3 I + \alpha_2 I^2)} + c_2(d+B+\alpha+\gamma-bp) - \\ &\left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{\alpha_1 + I}\right) \frac{c_2 S}{1 + \beta_3 I + \alpha_2 I^2} + \frac{\alpha_2 \sigma_2^2 I^2}{2(d+\alpha+B+\gamma-bp)} + \frac{c_2 \sigma_2^2}{2} + 1 \leqslant \\ &-1 - \beta_3 I - \alpha_2 I^2 - \frac{c_1 \Lambda}{S} - \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{\alpha_1 + I}\right) \frac{c_2 S}{1 + \beta_3 I + \alpha_2 I^2} - (d+B-b)S - \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{\alpha_1 + I}\right) \frac{SI}{1 + \beta_3 I + \alpha_2 I^2} + \\ &(\gamma + bq)I + \frac{c_1(2\beta_1 - \beta_2)}{\sqrt{\alpha_2} + \beta_3} + \frac{(2\beta_1 - \beta_2)S}{d+B+\alpha+\gamma-bp} + \frac{\alpha_2 \sigma_2^2 I^2}{2(d+\alpha+B+\gamma-bp)} + c_1\left(d+B-b+\frac{\sigma_1^2}{2}\right) + \\ &c_2\left(d+B+\alpha+\gamma-bp+\frac{\sigma_2^2}{2}\right) + \Lambda + 1 \leqslant -3[\Lambda(\beta_1 - \beta_2)c_1c_2]^{\frac{1}{3}} + \frac{(2\beta_1 - \beta_2)S}{d+B+\alpha+\gamma-bp} + 3\Lambda + 1 + \\ &(\gamma + bq)I + \frac{\alpha_2 \sigma_2^2 I^2}{2(d+\alpha+B+\gamma-bp)} = -3\Lambda\left(\left(R_0^s\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right) + 1 + (\gamma + bq)I + \frac{\alpha_2 \sigma_2^2 I^2}{2(d+\alpha+B+\gamma-bp)} + \\ &\frac{(2\beta_1 - \beta_2)S}{d+B+\alpha+\gamma-bp} = -\lambda + 1 + (\gamma + bq)I + \frac{\alpha_2 \sigma_2^2 I^2}{2(d+\alpha+B+\gamma-bp)} + \frac{(2\beta_1 - \beta_2)S}{d+B+\alpha+\gamma-bp} \end{aligned}$$

如果 $R_0^s > 1$, 则 $\lambda = 3\Lambda\left(\left(R_0^s\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right) > 0$ 。

$$\begin{aligned} LV_2 &= -\frac{\Lambda}{S} + d+B-b-(\gamma+bq)\frac{I}{S} + \\ &\left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{\alpha_1 + I}\right) \frac{I}{1 + \beta_3 I + \alpha_2 I^2} + \frac{\sigma_1^2}{2} \leqslant \\ &-\frac{\Lambda}{S} + \frac{2\beta_1 - \beta_2}{\sqrt{\alpha_2} + \beta_3} - (\gamma + bq)\frac{I}{S} + d+B-b+\frac{\sigma_1^2}{2} \\ LV_3 &= (S+I)^\theta[\Lambda+(b-B-d)S+(b-B-d-\alpha)I] + \\ &\frac{\sigma_1^2 S^2 + \sigma_2^2 I^2}{2}\theta(S+I)^{\theta-1} = \Lambda(S+I)^\theta + \\ &(S+I)^\theta[(b-B-d)(S+I)-\alpha I] + \\ &\frac{\sigma_1^2 S^2 + \sigma_2^2 I^2}{2}\theta(S+I)^{\theta-1} \leqslant A - \\ &\frac{1}{2}\left[d+B-b-\frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2\right)\right]\left(S^{\theta+1}+I^{\theta+1}\right) \end{aligned}$$

其中

$$c_2=\frac{\Lambda}{\left(d+B+\alpha+\gamma-bp+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)}; M \text{ 是一个正常数且}$$

满足 $-M\lambda+E\leqslant-2$; θ 为大于 1 的正常数。对任意正数 $n>1$, 记区域 $D_n=(1/n,n)\times(1/n,n)$, 则 $\liminf_{n\rightarrow\infty,(S,I)\in R_+^2\setminus D_n}\bar{V}(S,I)=+\infty$ 。由 $\bar{V}(S,I)$ 连续性可知, $\bar{V}(S,I)$ 在 R_+^2 存在最小值点, 记为 $(\bar{S}_0,\bar{I}_0)$ 。定义一个非负的 C^2 类函数 $V:R_+^2\rightarrow R_+$ $V(S(t),I(t))=\bar{V}(S(t),I(t))-\bar{V}(\bar{S}_0,\bar{I}_0)$ 。由 Itô 公式可得

$$\begin{aligned} A &= \sup_{(S,I)\in R_+^2}\left\{\Lambda(S+I)^\theta - \frac{1}{2}\left[d+B-b- \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{\theta}{2}\left(\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2\right)\right]\left(S^{\theta+1}+I^{\theta+1}\right)\right\} < \infty \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} LV &\leqslant -M\lambda + M + M(\gamma + bq)I + \\ &\frac{M\alpha_2\sigma_2^2I^2}{2(d+\alpha+B+\gamma-bp)} + \frac{M(2\beta_1-\beta_2)S}{d+B+\alpha+\gamma-bp} - \frac{\Lambda}{S} + d + \\ &B - b + \frac{2\beta_1-\beta_2}{\sqrt{\alpha_3}+\beta_3} + \frac{\sigma_1^2}{2} + A - \\ &\frac{1}{2}\left[d+B-b-\frac{\theta\left(\sigma_1^2\vee\sigma_2^2\right)}{2}\right]\left(S^{\theta+1}+I^{\theta+1}\right) \end{aligned}$$

令有界闭集 $D_\varepsilon=\left\{(S,I)\in R_+^2:\varepsilon<S<\frac{1}{\varepsilon},\varepsilon<I<\frac{1}{\varepsilon}\right\}$, ε 是充分小的正常数, 在 D_ε^c 内且具有如下性质

−Λε+D≤−1 (11)

−Mλ+M(γ+bq)ε+Mα2σ22ε22(d+α+B+γ−bp)+E≤−1 (12)

−14[d+B−b−θ(σ12∨σ22)2]1εθ+1+F≤−1 (13)

−14[d+B−b−θ(σ12∨σ22)2]1εθ+1+G≤−1 (14)

其中

D=sup(S,I)∈R+2+⎧⎪⎨⎩−12[d+B−b−θ(σ12∨σ22)2](Sθ+1+Iθ+1)+M(γ+bq)I+Mα2σ22I22(d+α+B+γ−bp)+M(2β1−β2)Sd+B+α+γ−bp+σ122+d+B−b+A+M+2β1−β2√α2+β3⎫

E=sup(S,I)∈R+2+⎧⎪⎨⎩−12[d+B−b−θ(σ12∨σ22)2](Sθ+1+Iθ+1)+σ122+d+B−b+A+M+2β1−β2√α2+β3+M(2β1−β2)Sd+B+α+γ−bp⎫

F=sup(S,I)∈R+2+⎧⎪⎨⎩−14[d+B−b−θ(σ12∨σ22)2]Sθ+1−12[d+B−b−θ(σ12∨σ22)2]Iθ+1+M(γ+bq)I+M(2β1−β2)Sd+B+α+γ−bp+Mα2σ22I22(d+α+B+γ−bp)+M+d+B−b+σ122+A+2β1−β2√α2+β3⎫

G=sup(S,I)∈R+2+⎧⎪⎨⎩−14[d+B−b−θ(σ12∨σ22)2]Iθ+1−12[d+B−b−θ(σ12∨σ22)2]Sθ+1+M(γ+bq)I+M(2β1−β2)Sd+B+α+γ−bp+Mα2σ22I22(d+α+B+γ−bp)+M+d+B−b+σ122+A+2β1−β2√α2+β3⎫

将Dεc分为如下4个区域：

Dε1={ (S,I) ∈ R+2+ : 0 < S ≤ ε }

Dε2={ (S,I) ∈ R+2+ : 0 < I ≤ ε }

Dε3={ (S,I) ∈ R+2+ : S ≥ 1ε }

Dε4={ (S,I) ∈ R+2+ : I ≥ 1ε }

接下来只需证明，在区间Dεc内，LV≤−1。

情形1 如果(S,I) ∈ Dε1，则可得LV≤−ΛS+D≤−Λε+D，由式(11)可知，对于任意(S,I) ∈ Dε1，有LV≤−1。

情形2 如果(S,I) ∈ Dε2，则可以得到LV≤−Mλ+M(γ+bq)I+Mα2σ22I22(d+α+B+γ−bp)+E≤−Mλ+M(γ+bq)ε+Mα2σ22ε22(d+α+B+γ−bp)+E

由式(12)及M的定义可知，对于任意(S,I) ∈ Dε2，有LV≤−1。

情形3 如果(S,I) ∈ Dε3，则LV≤−14[d+B−b−θ(σ12∨σ22)2]Sθ+1+F≤−14[d+B−b−θ(σ12∨σ22)2]1εθ+1+F

由式(13)可知，对于任意(S,I) ∈ Dε3，有LV≤−1。

情形4 如果(S,I) ∈ Dε4，则有LV≤−14[d+B−b−θ(σ12∨σ22)2]Iθ+1+G≤−14[d+B−b−θ(σ12∨σ22)2]1εθ+1+G

由式(14)可知，对于任意(S,I) ∈ Dε4，有LV≤−1。故存在充分小的ε>0，对于任意的(S,I) ∈ Dεc，有LV≤−1。引理3条件b成立，即模型(3)存在唯一的遍历平稳分布。

4 数值模拟

本文利用数值模拟说明所得结论的正确性，模拟过程采用Milstein在文献[14]中提到的方法。首先，选取初始值(S(0),I(0))=(3,4)。选择参数Λ=0.1, b=0.1, B=0.01, d=0.1, q=0.7, α=0.2, γ=0.1, β1=0.78, β2=0.18, α1=1, α2=5.6, β3=0.2, σ1=0.06, σ2=0.08。此时，R0>1, σ12=0.036<d+

$B-b=0.01$, $\sigma_2^2=0.0064 < d+B-b+\alpha=0.2100$, 满足定理 2 的条件, 模拟结果如图 1 所示, 蓝线和红线分别表示确定性模型的解和随机模型的解。可以直观地看到随着时间的增长, 随机模型(3)的解围绕着地方病平衡点 $E(S_*, I_*)$ 振动。因此, 定理 2 的结论得以验证。

其次, 选择初始值 $(S(0), I(0)) = (3, 4)$, 其他的参数为 $\Lambda = 0.02$, $b = 0.1$, $B = 0.05$, $d = 0.09$, $q = 0.7$, $\alpha = 0.49$, $\gamma = 0.1$, $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 4$,

$\sigma_1 = 0.06$, $\sigma_2 = 0.08$ 。如图 2 所示, 蓝线和红线分别表示随机模型(3)的易感者和感染者的解曲线。从图中可以看出加入随机扰动后, 随机模型(3)疾病将会灭绝, 从而验证了定理 3 的结论。

最后, 选取初始值 $(S(0), I(0)) = (3, 4)$, 其他参数为 $\Lambda = 3.5$, $b = 0.1$, $B = 0.15$, $d = 0.1$, $q = 0.7$, $\alpha = 0.2$, $\gamma = 0.1$, $\beta_1 = 0.78$, $\beta_2 = 0.18$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 5.6$, $\beta_3 = 0.2$, $\sigma_1 = 0.06$, $\sigma_2 = 0.08$ 。此时 $R_0^s = 1.9639 > 1$, 满足定理 3 的条件。从图 3 可以直观地看出随机模型

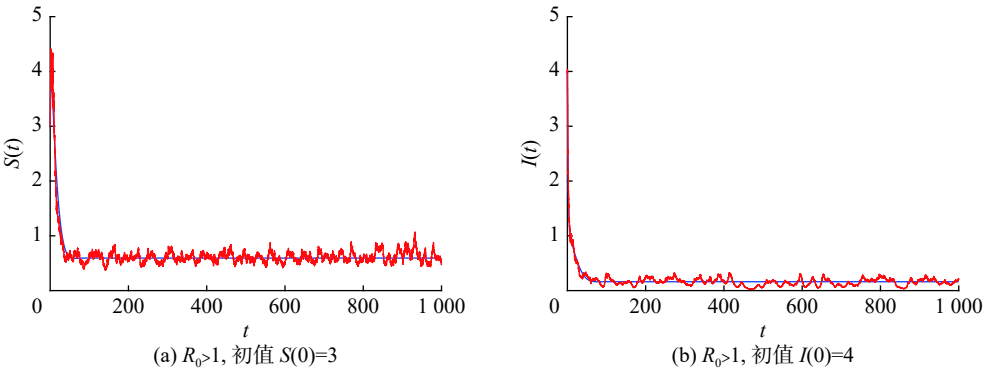


图 1 随机模型 (3) 与确定性模型 (2) 的解曲线 ($R_0 > 1$)

Fig.1 Solution curves of the stochastic model (3) and deterministic model (2) ($R_0 > 1$)

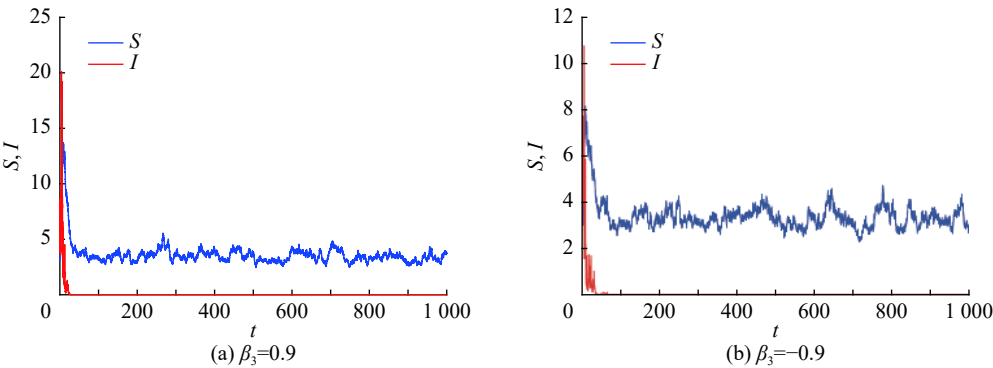


图 2 随机模型 (3) 的解曲线 ($\hat{R}_0 < 1$)

Fig.2 Solution curves of the stochastic model (3) ($\hat{R}_0 < 1$)

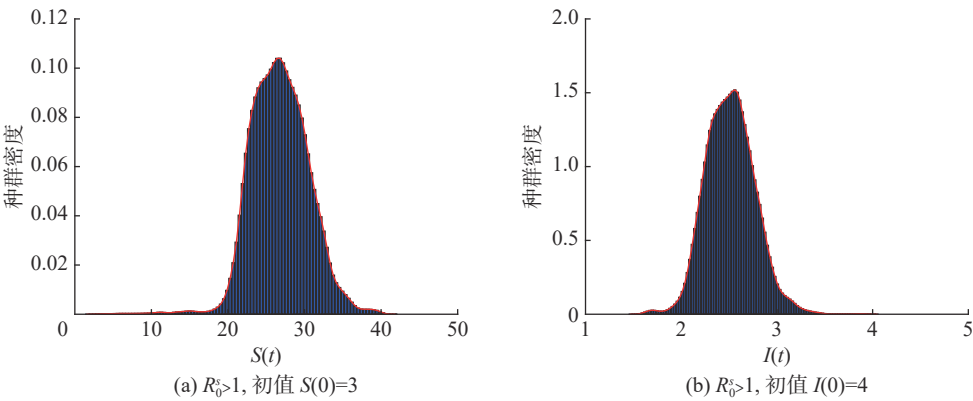


图 3 随机模型 (3) 的解的直方图 ($R_0^s > 1$)

Fig.3 Histograms of the solution of the stochastic model (3) ($R_0^s > 1$)

(3)有遍历的平稳分布。进而验证了定理 3 的结论。

5 总结与展望

本文主要对考虑媒体报道影响和垂直传染的随机 SIS 模型进行了探讨。首先,证明了随机系统(3)全局正解的存在唯一性,并且讨论了相应的确定性模型的无病平衡点与地方病平衡点的全局稳定性。其次,应用 Itô 公式分析了该模型在地方病平衡点附近的渐近行为。当 $R_0 > 1$ 时,随机系统(3)的解将在地方病平衡点附近振动。此时,可认为疾病将会广泛流行。最后,得到了疾病灭绝的条件以及该模型具有唯一遍历平稳分布的充分条件。当 $\hat{R}_0 < 1, d + B - b > \frac{\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2}{2}$ 时,染病者 $I(t)$ 的数量将以指数形式趋于零,即疾病灭绝。由 $\hat{R}_0$ 的表达式可知,当 β_2 增大时, $\hat{R}_0$ 将会减少,而 β_2 反映了媒体报道导致的传染率的减少量。故考虑媒体报道的影响可以使疾病更容易灭绝,从而有利于人们对疾病的控制。当 $R_0^s > 1$ 时,随机模型(3)存在唯一的遍历平稳分布,这也告诉我们疾病在时间平均意义下是持久存在的。

本文研究的具有媒体报道影响和垂直传染的随机 SIS 传染病模型得到的结论有助于人们理解传染病的发病机理和传播规律。此外,在时间延迟和脉冲扰动的影响下,传染病的传播规律将会如何演化,期望在后续工作中对这些问题进行深入研究。

参考文献:

[1] LAHROUZ A, SETTATI A. Asymptotic properties of switching diffusion epidemic model with varying population size[J]. [Applied Mathematics and Computation](#), 2013, 219(24): 11134–11148.

[2] KERMAK W O, MCKENDRICK A G. A contribution to the mathematical theory of epidemics[J]. [Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers](#)

[of a Mathematical and Physical Character](#), 1927, 115(772): 700–721.

[3] 马知恩, 周义仓. 传染病动力学的数学建模与研究 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[4] GREENHALGH D, LIANG Y, MAO X. SDE SIS epidemic model with demographic stochasticity and varying population size[J]. [Applied Mathematics and Computation](#), 2016, 276: 218–238.

[5] ZHANG X B, CHANG S Q, SHI Q H, et al. Qualitative study of a stochastic SIS epidemic model with vertical transmission[J]. [Physica A: Statistical Mechanics and its Applications](#), 2018, 505: 805–817.

[6] LIN W B, ZHENG Q B. A stochastic sis epidemic model incorporating media coverage in a two patch setting[J]. [Applied Mathematics and Computation](#), 2015, 262: 160–168.

[7] ZHAO Y, ZHANG L P, YUAN S L. The effect of media coverage on threshold dynamics for a stochastic SIS epidemic model[J]. [Physica A: Statistical Mechanics and its Applications](#), 2018, 512: 248–260.

[8] XIAO D M, ZHOU Y G. Qualitative analysis of an epidemic model[J]. [Canadian Applied Mathematics Quarterly](#), 2006, 14(4): 469–492.

[9] 赵晓艳, 明艳, 李学志. 一类考虑媒体报道影响的传染病模型分析 [J]. [数学的实践与认识](#), 2018, 48(10): 314–320.

[10] MAO X. Stochastic differential equations and applications[M]. 2nd ed. Chichester: Horwood Publishing, 2007.

[11] ZHAO Y, JIANG D Q. The threshold of a stochastic SIS epidemic model with vaccination[J]. [Applied Mathematics and Computation](#), 2014, 243: 718–727.

[12] LIPTSER R. A strong law of large numbers for local martingales[J]. [Stochastics](#), 1980, 3(1/4): 217–228.

[13] HAS ’MINSKII R Z. Stochastic stability of differential equations[M]. The Netherlands: Sijthoff & Noordhoff, 1980.

[14] HIGHAM D J. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations[J]. [SIAM Review](#), 2001, 43(3): 525–546.

(编辑: 丁红艺)