

(3+1) 维 Boussinesq 方程的可积性及新相互作用解

李小丹, 胡恒春

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 借助符号计算软件 Maple 证明了新的 (3+1) 维 Boussinesq 方程具有相容正切可积性, 通过选取该方程的相容性条件方程的不同形式的解, 得到了新的 (3+1) 维 Boussinesq 方程的孤子与其他波的相互作用解, 如简单孤子解、孤子与椭圆余弦波作用解和共振孤子解, 并给出了孤子与椭圆余弦波作用解和共振孤子解所对应的图形。

关键词: 新的 (3+1) 维 Boussinesq 方程; 相容正切展开; 相互作用解

中图分类号: O 175.24 **文献标志码:** A

Integrability and new interaction solutions of a (3+1)-dimensional Boussinesq equation

LI Xiaodan, HU Hengchun

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: With the help of symbolic calculation software Maple, a new (3+1)-dimensional Boussinesq equation was proved to have consistent tanh integrability. Many interaction solutions among solitons and other types of nonlinear waves, such as simple soliton solution, soliton-cnoidal wave interaction solution and resonant soliton solution, were given by selecting different solutions under consistent conditions equation. The corresponding graphs of soliton-cnoidal wave interaction solution and resonant soliton solution were presented.

Keywords: new (3+1)-dimensional Boussinesq equation; consistent tanh expansion; interaction solution

1 问题的提出

非线性发展方程在非线性光学、生物学等许多学科领域中具有广泛的应用。在理论和实际应用中, 研究非线性偏微分方程的精确解和对称性具有十分重要的意义。研究非线性发展方程的精

确解和对称性不仅有助于理解非线性发展方程的本质属性和代数结构, 而且能够有效地解释一些自然现象及其规律。学者们提出了许多求解非线性发展方程精确解的方法, 如 Hirota 双线性方法、Painlevé 分析法、反散射方法、扩展的正切方法及指数展开法等^[1-9]。

收稿日期: 2020-11-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11471215)

第一作者: 李小丹 (1994-), 女, 硕士研究生。研究方向: 孤立子理论与可积系统。E-mail: 1585155532@qq.com

通信作者: 胡恒春 (1976-), 女, 副教授。研究方向: 孤立子理论与可积系统。E-mail: hhengchun@163.com

函数展开方法在求解非线性发展方程方面具有广泛的应用。Wang^[10] 最早提出函数展开方法, 并将其运用在求解非线性发展方程中, 而后经过许多学者的补充和完善, 利用函数展开法可以得到多种新颖的解。近些年, Gao 等^[11] 提出的相容性正切展开方法, 也是函数展开法的扩展, 通过该方法不仅可以判别非线性偏微分方程是否是相容正切可积的, 而且可以构造具有 Painlevé 可积性质的非线性偏微分方程的相容正切解, 进而得到方程的相互作用解。到目前为止, 学者们利用该方法得到了许多非线性可积系统的精确解^[12-22]。

本文主要研究新的可积 (3+1) 维 Boussinesq 方程^[23], 该方程的形式为

$$u_{tt}-u_{xx}-\beta(u^2)_{xx}-\gamma u_{xxx}+\frac{\alpha^2}{4}u_{yy}+\alpha u_{yt}+\delta u_{xz}=0 \quad (1)$$

式中: u 是关于 x, y, z, t 的函数; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 为非零常数。

新的 Boussinesq 方程 (1) 是标椎的 Boussinesq 方程的扩展形式。标准的 Boussinesq 方程常用于描述非线性浅水波的传播和变化, 包括浅水变形、反射、绕射、折射、波浪破碎与耗散、波流相互作用, 以及波浪引起的潮流现象等^[24-26]。为了更准确地描述波的色散和非线性特征, 学者们提出了各种改进型 Boussinesq 方程并求出其精确解^[27-32]。Wazwaz 等^[23] 提出了一个新的可积 (3+1) 维 Boussinesq 方程 (1), 采用 Hirota 双线性方法得到了方程 (1) 的实多孤子解和复多孤子解, 并证明了方程 (1) 是 Painlevé 可积的。

本文将利用相容性正切展开法证明方程 (1) 的新可积性, 并研究该方程的孤子与其他波的相互作用解, 包括简单孤子解、孤子与椭圆余弦波作

用解和共振孤子解。

2 新的 (3+1) 维 Boussinesq 方程的相容正切可积性

一般来说, 对于给定的非线性偏微分方程

$$p(u, u_x, u_y, u_z, u_t, u_{xx}, \cdots) = 0 \quad (2)$$

如果方程 (2) 是 Painlevé 可积的, 就可以设原方程 (2) 的展开解为

$$u(x, y, z, t) = \sum_{i=0}^n u_i \tanh^i(\omega(x, y, z, t)) \quad (3)$$

其中, n 由方程 (2) 的领头项 (平衡最高阶导数项和最高阶非线性项) 分析确定。

将式 (3) 代入原方程 (2), 令 $\tanh^i \omega$ 的系数为 0, 得到包含 u_i 和 ω 以及它们的各阶导数的系统。假如这个系统是相容的, 就称方程 (2) 有形如式 (3) 的精确解。

定义 对于非线性偏微分方程 (2), 将解式 (3) 代入其中, 令 $\tanh^i \omega$ 的系数为 0, 得到包含 $u_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 和 ω 以及它们的各阶导数的系统, 如果这个系统是相容的或非超定的, 则方程 (2) 是相容正切可积的。

对新的 (3+1) 维 Boussinesq 方程 (1) 进行领头项分析, 得到截断展开式

$$u = u_0 + u_1 \tanh \omega + u_2 \tanh^2 \omega \quad (4)$$

式中, u_0, u_1, u_2, ω 是同 x, y, z, t 有关的待定函数。

将式 (4) 代入方程 (1), 令 $\tanh^i \omega$ 的系数为 0, $i = 0, 1, 2, \cdots, 6$, 可得

$$u_2 = \frac{-6\gamma\omega_x^2}{\beta}, \quad u_1 = \frac{6\gamma\omega_{xx}}{\beta},$$

$$\begin{aligned} u_0 = & \frac{12\gamma\omega_{xx}^2 - 16\gamma\omega_x\omega_{xxx} + 4\omega_t^2 - 4\omega_x^2 + 4\alpha\omega_y\omega_t + 32\gamma\omega_x^4 + \alpha^2\omega_y^2 + 4\delta\omega_x\omega_z}{8\beta\omega_x^2} \\ & 16\gamma\omega_x\omega_{xx}\omega_{xxx} - 4\alpha\omega_{xx}\omega_y\omega_t - 4\delta\omega_{xx}\omega_x\omega_z - 4\omega_{xx}\omega_t^2 - 4\gamma\omega_x^2\omega_{xxx} + 4\omega_x^2\omega_{tt} + \\ & 16\gamma\omega_x^4\omega_{xx} - \alpha^2\omega_{xx}\omega_y^2 + \alpha^2\omega_x^2\omega_{yy} + 4\alpha\omega_x^2\omega_{yt} + 4\delta\omega_x^2\omega_{xz} - 12\gamma\omega_{xx}^3 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

方程 (5) 是方程 (1) 的相容性条件方程。

根据上述定义可以得到新的 (3+1) 维 Boussinesq

方程 (1) 是相容正切可积的。方程 (1) 的相容正切解

$$u = \frac{12\gamma\omega_{xx}^2 - 16\gamma\omega_x\omega_{xxx} + 4\omega_t^2 - 4\omega_x^2 + 4\alpha\omega_y\omega_t + 32\gamma\omega_x^4 + \alpha^2\omega_y^2 + 4\delta\omega_x\omega_z}{8\beta\omega_x^2} + \frac{6\gamma\omega_{xx}}{\beta} \tanh \omega - \frac{6\gamma\omega_x^2}{\beta} \tanh^2 \omega \quad (6)$$

式中, ω 为相容性条件方程(5)的解。

3 新的 (3+1) 维 Boussinesq 方程的相互作用解

通过求解相容性条件方程(5), 可以找到方程(1)的新解。现考虑方程(5)的不同解的具体形式。

3.1 简单孤子解

相容性条件方程(5)的平凡解

$$\omega = ax + by + cz + dt + e \tag{7}$$

式中, a, b, c, d, e 为任意常数。

将式(7)代入式(6), 可得方程(1)的简单孤子解

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{12\gamma k_2^6} (12\gamma a_2 k_1^4 k_2^4 - 24\gamma a_3 k_1^3 k_2^3 + 144\gamma k_1^4 k_2^2 - \alpha^2 l_1^2 k_2^2 - 4\alpha^2 l_1 l_2 k_1 k_2 + 5\alpha^2 l_2^2 k_1^2 - 4\alpha l_1 q_1 k_2^2 - \\ \quad 8\alpha l_1 q_2 k_1 k_2 - 8\alpha l_2 q_1 k_1 k_2 + 20\alpha l_2 q_2 k_1^2 - 4q_1^2 k_2^2 - 12\delta p_1 k_1 k_2^2 + 12\delta p_2 k_1^2 k_2 - 16q_1 q_2 k_1 k_2 + 20q_2^2 k_1^2) \\ a_1 = \frac{1}{2\gamma k_2^5} (4\gamma a_2 k_1 k_2^4 - 6\gamma a_3 k_1^2 k_2^3 + 32\gamma k_1^3 k_2^2 - \alpha^2 l_1 l_2 k_2 + \alpha^2 l_2^2 k_1 - 2\alpha l_1 q_2 k_2 - 2\alpha l_2 q_1 k_2 + \\ \quad 4\alpha l_2 q_2 k_1 - 2\delta p_1 k_2^2 + 2\delta p_2 k_1 k_2 - 4q_1 q_2 k_2 + 4q_2^2 k_1) \\ a_4 = 4 \end{cases} \tag{10}$$

并将式(10)代入式(6), 可以得到方程(1)的解

$$u = -\frac{6\gamma(k_1 + k_2 G_1)^2}{\beta} \tanh^2 \omega + \frac{6\gamma k_2^2 G_{1X}}{\beta} \tanh \omega + \frac{1}{8\beta(k_1 + k_2 G_1)^2} \left[4(q_1 + q_2 G_1)^2 + 12\gamma k_1^4 G_{1X}^2 - 4(k_1 + k_2 G)^2 + 4\alpha(q_1 + q_2 G_1)(l_1 + l_2 G_1) + 32\gamma(k_1 + k_2 G_1)^4 + \alpha^2(l_1 + l_2 G_1)^2 - 16\gamma k_2^3(k_1 + k_2 G_1)G_{1XX} + 4\delta(k_1 + k_2 G_1)(p_1 + p_2 G_1) \right] \tag{11}$$

很显然, 方程(9)的解是椭圆函数解, 即 G 的

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{(k_1 + k_2 \mu_0)n}{k_2} \\ m = \frac{2(k_1 + k_2 \mu_0)}{k_2} \\ q_1 = \frac{2q_2 k_1 + \alpha l_2 k_1 - \alpha l_1 k_2}{2k_2} \\ p_1 = \frac{1}{\delta k_2} (8\gamma k_2^4 \mu_0^3 + 24\gamma k_1 k_2^3 \mu_0^2 + 24\gamma \mu_0 k_1^2 k_2^2 + \delta p_2 k_1 + 8\gamma k_1^3 k_2 - 8\gamma n^2 k_1^3 k_2 - 24\gamma \mu_0 n^2 k_1^2 k_2^2 - \\ \quad 24\gamma \mu_0^2 n^2 k_1 k_2^3 - 8\gamma \mu_0^3 n^2 k_2^4) \\ a_2 = \frac{4(5k_2^2 \mu_0^2 - k_1^2 - k_1^2 n^2 - 2k_1 k_2 \mu_0 n^2 - 2k_1 k_2 \mu_0 - k_2^2 \mu_0^2 n^2)}{k_2^2} \\ a_3 = -16\mu_0 \end{cases} \tag{13}$$

$$u = \frac{4d^2 - 4a^2 + 4abd + 4\delta ac + 32\gamma a^4 + \alpha^2 b^2}{8\beta a^2} - \frac{6\gamma a^2}{\beta} \tanh^2(ax + by + cz + dt + e)$$

3.2 孤子与椭圆余弦波作用解

为了得到新的 (3+1) 维 Boussinesq 方程(1)的孤子与椭圆余弦波作用解, 考虑如下形式的 ω 函数:

$$\omega = k_1 x + l_1 y + p_1 z + q_1 t + G(k_2 x + l_2 y + p_2 z + q_2 t) \equiv k_1 x + l_1 y + p_1 z + q_1 t + G(X) \tag{8}$$

并设 $G_1(X) = G_X(X)$, 将式(8)代入相容性条件方程(5), 得到一个关于 $G_1(X)$ 的方程。

$$G_{1X}^2(X) = a_0 + a_1 G_1(X) + a_2 G_1^2(X) + a_3 G_1^3(X) + a_4 G_1^4(X) \tag{9}$$

其中,

表达式可以用形如 Jacobi 椭圆函数 $\text{sn } \zeta, \text{cn } \zeta, \text{dn } \zeta$ 等来表示, 从而可以得到方程(1)的新解。现考虑 4 种特殊类型的孤子与椭圆余弦波作用解。

a. 类型 1。

根据以上讨论可知, 只要求解方程(9), 就可以找到方程(1)的相互作用解。例如, 若方程(9)有以下形式的解:

$$G_1 = \mu_0 + \mu_1 \text{sn}(mX, n) \tag{12}$$

式中, $\text{sn}(mX, n)$ 为通常定义的 Jacobi 椭圆正弦函数。

将式(10)和(12)代入式(9), 可得

对式(12)积分, 可得

$$G = \mu_0 X + \mu_1 \int_{X_0}^X \operatorname{sn}(mY, n) dY \quad (14)$$

然后将式(12)~(14)代入解式(11), 并选择合适的参数, 可以得到方程(1)的孤子与椭圆余弦波作用解。

b. 类型 2.

假设 G 的形式为

$$G = A \operatorname{arctanh}[m_1 \operatorname{sn}(k_3 x + l_3 y + p_3 z + q_3 t, m_1)] \quad (15)$$

式中, A, k_3, l_3, p_3, q_3 为任意常数。

将式(8)和(15)代入相容性条件方程(5), 令 Jacobi 椭圆函数不同次幂的系数为零, 通过计算可得

$$A = \frac{1}{2}, k_1 = \frac{1}{2} k_3, p_1 = \frac{2\gamma k_3^3 + \delta p_3 - 2\gamma m_1^2 k_3^3}{2\delta},$$

$$q_1 = \frac{1}{4} \alpha l_3 + \frac{1}{2} q_3 - \frac{1}{2} \alpha l_1 \quad (16)$$

将式(8), (15), (16)代入解式(6), 可得方程(1)的第 2 种孤子与椭圆余弦波作用解。对任意常数取值:

$$\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3, \delta = -2, m_1 = 0.6,$$

$$l_1 = 2, k_3 = 1, l_3 = 2, p_3 = 2, q_3 = 2$$

并取 $y = 0, z = 0$, 从而得到孤子与椭圆余弦波作用解 u 的结构图, 如图 1 所示。

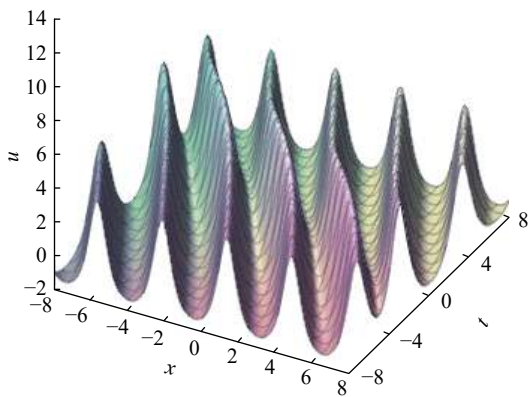


图 1 第 2 种类型的孤子与椭圆余弦波作用解的结构图

Fig.1 Structure of the second type of soliton-cnoidal wave interaction solution

c. 类型 3.

假设 G 的形式为

$$G = B \operatorname{arctanh}\left[\operatorname{sn}\left(\frac{k_4 x + l_4 y + p_4 z + q_4 t}{e}, m_2\right)\right] \quad (17)$$

式中, B, k_4, l_4, p_4, q_4, e 为任意常数。

将式(8)和(17)代入方程(5), 令 Jacobi 椭圆函数不同次幂的系数为零, 可得

$$k_4 = 0, q_4 = -\frac{1}{2} \alpha l_4 \quad (18)$$

将式(8), (17), (18)代入解式(6), 可得方程(1)的第 3 种类型的孤子与椭圆余弦波作用解。对任意常数取值:

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 2, B = 0.9, m_2 = 0.8, k_1 = 1.1,$$

$$l_1 = 1, l_4 = 2, p_1 = 1, p_4 = 3, q_1 = 1, e = 4$$

并取 $y = 0, z = 0$, 从而得到第 3 种类型的孤子与椭圆余弦波作用解 u 的结构图, 如图 2 所示。

d. 类型 4.

假设 G 的形式为

$$G = C E_f[\operatorname{sn}(k_5 x + l_5 y + p_5 z + q_5 t, m_3), n_3] \quad (19)$$

式中: C, k_5, l_5, p_5, q_5 为任意常数; E_f 为第一类不完全可积椭圆积分。

将式(8)和(19)代入相容性条件方程(5), 通过计算可得, $m_3 = n_3$ 。将式(8), (19)及 $m_3 = n_3$ 代入解式(6), 可得方程(1)的第 4 种类型的孤子与椭圆余弦波的作用解。对任意常数取值:

$$C = 2, \alpha = \beta = \gamma = \delta = 1, n_3 = 0.8,$$

$$k_1 = l_1 = k_5 = l_5 = p_1 = 2, p_5 = 1.2, q_1 = 5, q_5 = 0.9$$

并取 $z = 0, t = 0$, 从而得到第 4 种类型的孤子与椭圆余弦波作用解 u 的结构图, 如图 3 所示。

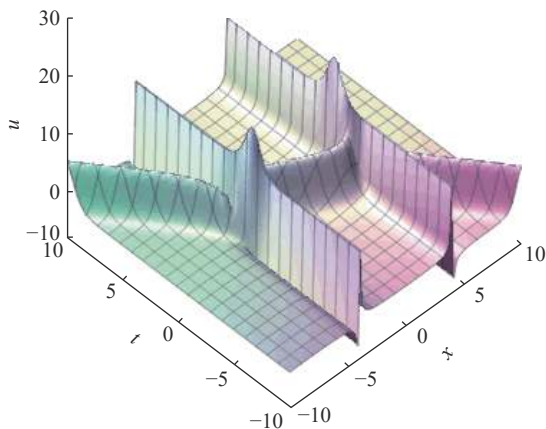


图 2 第 3 种类型的孤子与椭圆余弦波作用解的结构图

Fig.2 Structure of the third type of soliton-cnoidal wave interaction solution

3.3 共振孤子解

假设 ω 的形式为

$$\omega = a_0 x + b_0 y + c_0 z + d_0 t +$$

$$D \ln[1 + \exp(a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t)] \quad (20)$$

式中, $D, a_i, b_i, c_i, d_i (i = 0, 1)$ 为任意常数。

将式(20)代入相容性条件方程(5), 令 $\exp(a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t)$ 不同次幂的系数为零, 可得

$$D = \frac{1}{2}, b_0 = \frac{\alpha a_0 b_1 + 2a_0 d_1 - 2a_1 d_0 + 2\sqrt{-3\gamma a_0^2 a_1^2 (2a_0 + a_1)^2}}{\alpha a_1},$$
$$c_0 = \frac{a_0 a_1 (16\gamma a_0^2 a_1 + 12\gamma a_0 a_1^2 + 2\gamma a_1^3 + \delta c_1) - (2d_1 + \alpha b_1)\sqrt{-3\gamma a_0^2 a_1^2 (2a_0 + a_1)^2}}{\delta a_1^2} \quad (21)$$

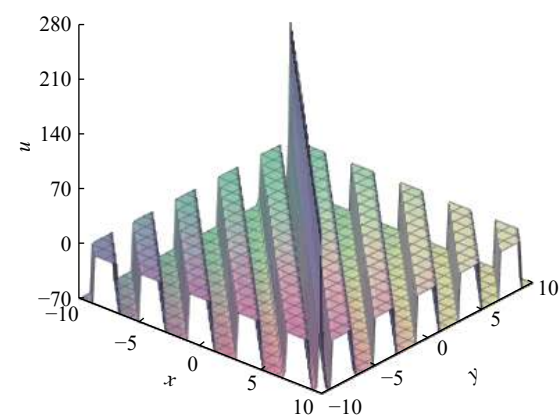


图 3 第 4 种类型的孤子与椭圆余弦波作用解的结构图

Fig. 3 Structure of the fourth type of soliton-cnoidal wave interaction solution

将式(20)和(21)代入解式(6), 可得一个特殊的方程(1)的共振孤子解。对任意常数取值:

$$\alpha = 3, \beta = 1, \gamma = -1, \delta = 2, a_0 = 1,$$
$$a_1 = 4.8, b_1 = 2, c_1 = 2, d_0 = 2, d_1 = 2$$

并取 $y = 0, z = 0$, 从而得到共振孤子解 u 的结构图, 如图 4 所示。

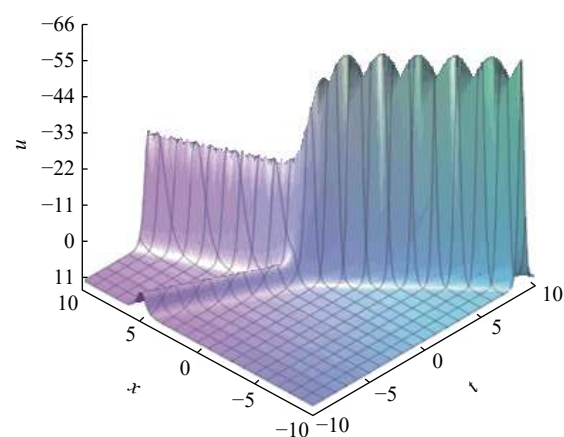


图 4 共振孤子解的结构图

Fig.4 Structure of the resonant soliton solution

4 结束语

研究了新的可积(3+1)维 Boussinesq 方程的相容正切可积性以及它的多种形式的相互作用解。先利用相容性正切展开法构造了原方程的相容正

切解和原方程应满足的相容性方程(ω 方程), 并选择不同形式的 ω 函数, 可得新的可积(3+1)维 Boussinesq 方程不同的相互作用解, 如简单孤子解、孤子与椭圆余弦波作用解和共振孤子解, 再通过选择适当的常数, 得到一些解的结构图。相容性正切展开法不仅可以验证新的可积(3+1)维 Boussinesq 方程的可积性, 还可以更加简单、高效地求得新的可积(3+1)维 Boussinesq 方程的不同形式波之间的相互作用解。

参考文献:

[1] ABLOWITZ M J, CLARKSON P A. Solitons, nonlinear evolution equation and inverse scattering [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[2] HIROTA R. Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons[J]. [Physical Review Letters](#), 1971, 27(18): 1192–1194.

[3] GARDNER C S, GREENE J M, KRUSKAL M D, et al. Method for solving the Korteweg-de Vries equation[J]. [Physical Review Letters](#), 1967, 19(19): 1095–1097.

[4] WAZWAZ A M. The extended tanh method for new solitons solutions for many forms of the fifth-order KdV equations[J]. [Applied Mathematics and Computation](#), 2007, 184(2): 1002–1014.

[5] HE J H, ZHANG L N. Generalized solitary solution and compacton-like solution of the Jaulent-Miodek equations using the exp-function method[J]. [Physics Letters A](#), 2008, 372(7): 1044–1047.

[6] WEISS J, TABOR M, CARNEVALE G. The Painlevé property for partial differential equations[J]. [Journal of Mathematical Physics](#), 1983, 24(3): 522–526.

[7] WAZWAZ A M. Exact solutions for the ZK-MEW equation by using the tanh and sine-cosine methods[J]. [International Journal of Computer Mathematics](#), 2005, 82(6): 699–708.

[8] ZHANG Y Y, LIU X Q, WANG G W. Symmetry reductions and exact solutions of the (2+1)-dimensional Jaulent-Miodek equation[J]. [Applied Mathematics and Computation](#), 2012, 219(3): 911–916.

[9] BLUMAN G W, KUMEI S. Symmetries and differential equations[M]. New York: Springer, 1989.

- [10] WANG M L. Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations[J]. *Physics Letters A*, 1995, 199(3/4): 169–172.
- [11] GAO X N, LOU S Y, TANG X Y. Bosonization, singularity analysis, nonlocal symmetry reductions and exact solutions of supersymmetric KdV equation[J]. *Journal of High Energy Physics*, 2013, 2013(5): 29–49.
- [12] CHEN C L, LOU S Y. CTE solvability and exact solution to the Broer-Kaup system[J]. *Chinese Physics Letters*, 2013, 30(11): 110202.
- [13] LOU S Y, CHENG X P, TANG X Y. Dressed dark solitons of the defocusing nonlinear Schrödinger equation[J]. *Chinese Physics Letters*, 2014, 31(7): 070201.
- [14] LEI Y, LOU S Y. Interactions among periodic waves and solitary waves of the (2+1)-dimensional Konopelchenko-Dubrovsky equation[J]. *Chinese Physics Letters*, 2013, 30(6): 060202.
- [15] CHEN C L, LOU S Y. CTE solvability, nonlocal symmetries and exact solutions of dispersive water wave system[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2014, 61(5): 545–550.
- [16] CHENG X P, LOU S Y, CHEN C L, et al. Interactions between solitons and other nonlinear Schrödinger waves[J]. *Physical Review E*, 2014, 89(4): 043202.
- [17] CHEN M X, HU H C, ZHU H D. Consistent Riccati expansion and exact solutions of the Kuramoto-Sivashinsky equation[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2015, 49: 147–151.
- [18] WANG Y H. CTE method to the interaction solutions of Boussinesq-Burgers equations[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2014, 38: 100–105.
- [19] CHEN J C, ZHU S D. Residual symmetries and soliton-cnoidal wave interaction solutions for the negative-order Korteweg-de Vries equation[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2017, 73: 136–142.
- [20] REN B. Interaction solutions for mKP equation with nonlocal symmetry reductions and CTE method[J]. *Physica Scripta*, 2015, 90(6): 065206.
- [21] 李玉娟, 胡恒春. 耦合 Burgers 方程的 CTE 可积性及精确解 [J]. 上海理工大学学报, 2016, 38(6): 517–522.
- [22] 李月月. 两个非线性方程的对称和精确解研究 [D]. 上海: 上海理工大学, 2018.
- [23] WAZWAZ A M, KAUR L. New integrable Boussinesq equations of distinct dimensions with diverse variety of soliton solutions[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 97(1): 83–94.
- [24] MCKEAN H P. Boussinesq's equation on the circle[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1981, 34(5): 599–691.
- [25] 杜冰茹, 朱良生. Boussinesq 方程在工程建成后波浪增水及近岸流变化研究中的应用 [J]. *广东造船*, 2012, 31(3): 47–51.
- [26] 李翊神. 孤子与可积系统 [M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1999: 66–68.
- [27] LI Y S, MA W X, ZHANG J E. Darboux transformations of classical Boussinesq system and its new solutions[J]. *Physics Letters A*, 2000, 275(1/2): 60–66.
- [28] MATVEEV V B, SALLE M A. Darboux transformations and solitons[M]. Berlin: Springer, 1991.
- [29] WAZWAZ A M. Multiple-soliton solutions for the KP equation by Hirota's bilinear method and by the tanh-coth method[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, 190(1): 633–640.
- [30] GAO L, MA W X, XU W. Travelling wave solutions to Zufiria's higher-order Boussinesq type equations[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2009, 71(12): 711–724.
- [31] 赵丹, 扎其劳. 一个 (2+1) 维 Boussinesq 方程的怪波解 [J]. 内蒙古师范大学学报, 2020, 49(1): 21–24.
- [32] SHI C G, ZHAO B Z, MA W X. Exact rational solutions to a Boussinesq-like equation in (1+1)-dimensions[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2015, 48: 170–176.

(编辑: 石 瑛)