

长水泥土桩-短碎石桩复合地基固结解析解

杨 涛¹, 管柯君¹, 李 超^{1,2}

(1. 上海理工大学 环境与建筑学院, 上海 200093; 2. 浙江大学 建筑工程学院, 杭州 310058)

摘要: 基于轴对称固结模型并采用等竖向应变假设, 给出瞬时荷载下长水泥土桩-短碎石桩复合地基的固结方程, 推导出单面排水条件下复合地基的固结解析解, 包括桩间土和碎石桩的平均超静孔隙水压力解和复合地基的整体平均固结度解。将固结度解析解与有限元数值解进行对比, 证明了解析解的合理性。最后, 利用固结度解对影响复合地基固结速率的主要因素进行了分析, 研究了这种复合地基的固结特性。结果表明: 碎石桩的贯入比是影响复合地基固结速率的最重要因素, 贯入比的数值越大, 复合地基固结越快。复合地基的固结速率随碎石桩渗透系数和置换率以及水泥土桩置换率和压缩模量的增加而逐渐增大, 只有当碎石桩的贯入比较大时, 其井组和置换率的变化才会对复合地基固结速率产生较大影响。碎石桩压缩模量的变化对复合地基固结速率的影响很小。

关键词: 复合地基; 固结; 解析解; 碎石桩; 水泥土桩

中图分类号: TU 473 **文献标志码:** A

Analytical solution for consolidation of composite ground with long cement-soil columns and short stone columns

YANG Tao¹, GUAN Kejun¹, LI Chao^{1,2}

(1. School of Environment and Architecture, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China;
2. College of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

Abstract: Combining the axisymmetric consolidation model and the equal vertical strain assumption, differential equations governing the consolidation of a composite ground with long cement-soil columns and short stone columns subjected to an instant load were presented. The corresponding analytical solutions were derived under single-drainage condition, including the solution of average excess pore water pressures in the interior of a stone column and subsoil around a cement-soil column, and the solution of overall average degree of consolidation of the composite ground. Then, the proposed analytical consolidation solution was verified via the comparison with the numerical solution by the finite element method. Finally, some main influencing factors were analyzed to investigate the consolidation behavior of the composite ground. The results show that the penetration ratio of the stone columns (ratio of stone column length to soil thickness) is a crucial factor affecting the consolidation rate of the composite ground, and the higher the penetration ratio, the faster the consolidation of the

收稿日期: 2020-09-01

基金项目: 国家重点研究发展计划 (2016YFC0802405)

第一作者: 杨 涛 (1962-), 男, 教授. 研究方向: 复杂地基加固技术. E-mail: shyangtao@163.com

composite ground. It increases gradually with the increase of the permeability coefficient and area replacement ratio of the stone columns, as well as the area replacement ratio and constrained modulus of the cement-soil columns. For the situation of higher values of penetration ratios, the variation of the well resistance and the area replacement ratio of the stone columns has obvious influence on the consolidation rate. The change in the constrained modulus of the stone columns has a limited effect on the consolidation rate of the composite ground.

Keywords: composite ground; consolidation; analytical solution; stone column; cement-soil column

目前, 复合地基技术得到了大量应用并不断创新, 已从传统的单一材料桩的散体材料桩复合地基、水泥土桩和低强度混凝土桩等半刚性和刚性桩复合地基发展到劲性搅拌桩等复合材料桩复合地基和不同材料桩组合的多元复合地基。

复合地基的工程实践极大地促进了其固结理论的进步。碎石桩和砂桩等散体材料桩与砂井都可显著加快复合地基的固结, 人们从砂井地基固结理论出发, 考虑桩的应力集中效应, 提出了大量散体材料桩复合地基固结计算模型。该模型可考虑桩体径-竖向组合渗流^[1]、施工涂抹效应、涂抹区压缩模量的变化^[2]、桩体的径-竖向变形^[3-4]、半透水边界^[5]、地基土非线性^[6]、附加应力沿地基不均布^[2,5], 以及桩未打穿软土^[7]等多种复杂因素的影响。不排水桩复合地基的固结机理和理论的研究也获得了较多成果。章定文等^[8]通过复合地基室内模型试验, 研究了端承和悬浮水泥土桩复合地基的固结特性。杨涛等^[9]和卢萌盟等^[10]分别建立了瞬时荷载和变荷载下端承不排水桩复合地基固结解。Yang 等^[11]和 Gong 等^[12]分别提出了瞬时和变荷载下悬浮不排水桩和水泥土桩复合地基的固结解析解。目前, 复合材料桩复合地基和多元复合地基固结理论的研究也取得了一定进展。杨燕伟等^[13]和杨涛等^[14]分别建立了瞬时和变荷载下混凝土芯碎石桩和劲性搅拌桩复合地基固结解析解。刚度较大的不排水桩组合碎石桩复合地基能够发挥不排水桩复合地基承载力高和碎石桩复合地基固结快、且可消除浅层砂土液化的优势, 近年来在我国建筑工程和公(铁)路等工程中得到了应用^[15-17]。于春亮等^[18]和杨涛等^[19]分别考虑碎石桩的竖向变形和径向渗流, 建立了瞬时荷载下端承不排水桩-碎石桩复合地基的固结解析解。

实际工程中, 不排水桩-碎石桩复合地基中的

碎石桩常常未打穿软土^[15,17]。显然, 前述于春亮等^[18]和杨涛等^[19]提出的等桩长不排水桩-短碎石桩复合地基固结解无法用于该复杂情况下复合地基的固结分析。因此, 研究长不排水桩-短碎石桩复合地基固结计算模型是很有必要的。本文建立了长水泥土桩-短碎石桩复合地基固结解析解, 并据此分析了这种新型复合地基的固结特性, 丰富了多元复合地基固结计算理论。

1 固结模型与基本假定

1.1 固结模型

在多元复合地基中, 不同材料的桩常采用三角形或正方形布设。在这种布桩方式下水泥土桩和碎石桩各自正方形布设, 间距相等, 如图 1 所示。两种布桩方式下每 4 根水泥土桩(碎石桩)的中心为一根碎石桩(水泥土桩)。

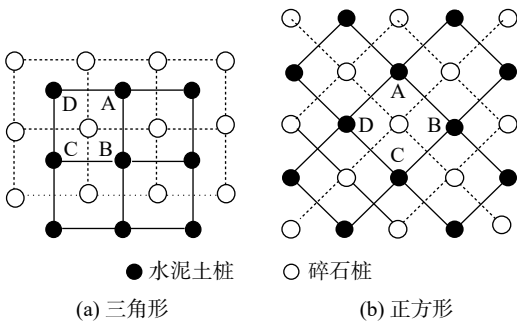


图 1 不同材料桩的布设方式

Fig.1 Arrangement patterns of different types of columns

考虑对称性, 取一根碎石桩的影响区域 ABCD 作为典型单元体进行固结分析, 单元体每个角上分布着 1/4 根水泥土桩。为便于建立轴对称固结模型, 按截面积相等的原则将典型单元体方形截面简化为圆形截面, 同时将非连续分布的水泥土桩(截面积之和为一根水泥土桩的截面积)简化为典

型单元体外侧连续分布的水泥土圆环，轴对称固结模型如图2所示。单个碎石桩影响区的直径 $d_e=2r_e=1.128s$ ， s 为碎石桩和水泥土桩的间距。水泥土环外半径为 r_e ，厚度为 $\delta=r_e(1-\sqrt{1-m_2})^{[19]}$ ， m_2 为水泥土桩的置换率。 δ 数值较小，固结模型中的水泥土环并未改变典型单元体中桩间土外边界上的不排水性质，Lu等^[20]证明了不排水桩的这种简化是合理的。图2中： r_p 、 r_{se} 和 r_{s1} 分别为碎石桩、桩间土和碎石桩侧涂抹区的半径； h_1 和 h_2 分别为上、下部加固区的厚度， h_1 也为碎石桩长度，复合地基总厚度为 $H=h_1+h_2$ ； E_c 、 E_{s1} 、 E_{s2} 和 E_p 分别为水泥土桩、上、下部桩间土和碎石桩的压缩模量； k_{h1} 和 k_{s1} 分别为上部加固区桩间土和涂抹区土的径向渗透系数； k_{v1} 、 k_{v2} 和 k_p 分别为上、下部加固区桩间土和碎石桩的竖向渗透系数； p 为大面积作用在复合地基表面的外荷载。

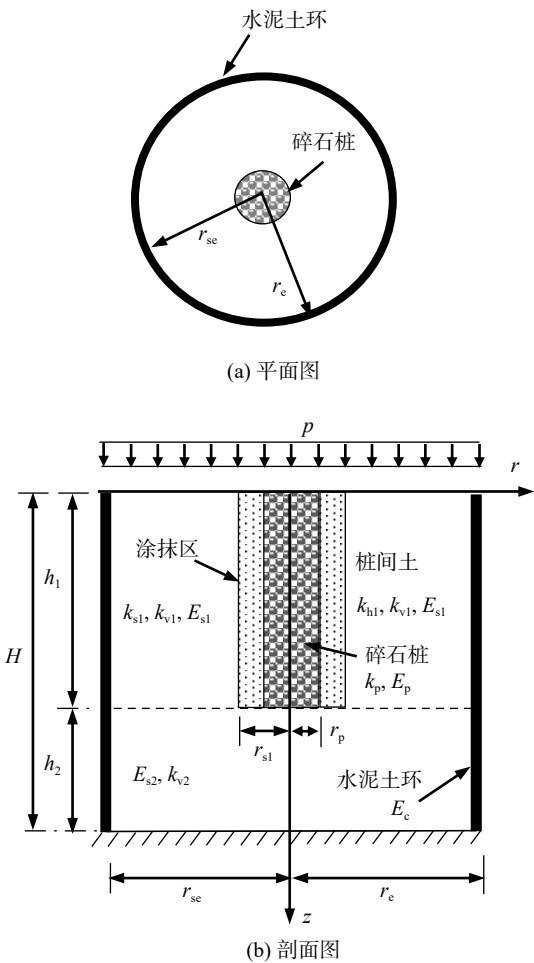


图2 轴对称固结模型

1.2 基本假设

本文基于如下基本假设进行公式推导：

- a. 桩间土和各桩仅发生竖向变形，等竖向应变假设成立，上部加固区中任一深度处水泥土桩、碎石桩和桩间土的竖向应变相同，都为 ε_z ；下部加固区中任一深度处水泥土桩和桩间土的竖向应变相同，也都为 ε_z 。
- b. 碎石桩中仅发生竖向渗流，桩间土和碎石桩都是饱和的，渗流服从达西定律。
- c. 侯永峰等^[21]发现，我国水泥土的渗透系数低于软黏土3~4个数量级，故假设水泥土桩为不排水桩。
- d. 大面积荷载瞬时施加，在待加固的地基中引起的竖向附加应力 σ 沿深度均匀分布。
- e. 固结期间碎石桩和桩间土的渗透系数和压缩模量保持不变。

2 固结方程

2.1 上部加固区固结方程

由于存在碎石桩，上部加固区中的桩间土发生径、竖向组合渗流，其固结方程如下^[1]：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{rk_{r1}(r)}{\gamma_w} \frac{\partial u_{s1}}{\partial r} \right] + \frac{k_{v1}}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \bar{u}_{s1}}{\partial z^2} = - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t}, \quad r_p \leq r \leq r_{se} \tag{1}$$

$$\bar{u}_{s1} = \frac{1}{\pi(r_{se}^2 - r_p^2)} \int_{r_p}^{r_{se}} 2\pi r u_{s1} dr \tag{2}$$

式中： u_{s1} 为 t 时刻上部加固区桩间土中任意点 (r, z) 处的超静孔隙水压力； $\bar{u}_{s1}$ 为 t 时刻桩间土中深度 z 处的平均超静孔隙水压力； ε_z 为在 z 深度处土的竖向应变； γ_w 为水的重度； $k_{r1}(r)=f(r)$ k_{h1} 为考虑碎石桩侧涂抹效应后桩间土的径向渗透系数，函数 $f(r)$ 给出径向渗透系数的径向变化规律。

根据竖向力的平衡条件和基本假设a和d，有

$$(1 - m_1 - m_2) \bar{\sigma}_{s1} + m_1 \bar{\sigma}_p + m_2 \bar{\sigma}_c = \sigma \tag{3}$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{s1} - \bar{u}_{s1}}{E_{s1}} = \frac{\bar{\sigma}_p - \bar{u}_p}{E_p} = \frac{\bar{\sigma}_c}{E_c} = \varepsilon_z \tag{4}$$

式中： $\bar{\sigma}_{s1}$ 、 $\bar{\sigma}_p$ 和 $\bar{\sigma}_c$ 分别为 t 时刻深度 z 处桩间土、碎石桩和水泥土桩的平均竖向总应力； m_1 为碎石桩的置换率。

由式(3)和(4)可得：

$$\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} = - \frac{1}{E_{\text{comp1}}} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} \tag{5}$$

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{\pi r_c^2} \left(\int_0^{r_p} 2\pi r u_p dr + \int_{r_p}^{r_{se}} 2\pi r u_{s1} dr \right) = m_1 \bar{u}_p + (1 - m_1 - m_2) \bar{u}_{s1} \quad (6)$$

$$E_{comp1} = (1 - m_1 - m_2) E_{s1} + m_1 E_p + m_2 E_c \quad (7)$$

式中: E_{comp1} 为上部加固区的复合压缩模量; $\bar{u}_1$ 为上部加固区 z 深度处 t 时刻的平均超静孔隙水压力; u_p 和 $\bar{u}_p$ 分别为碎石桩任一点 (r, z) 在 t 时刻的超静孔隙水压力和同一深度处的平均超静孔隙水压力。

碎石桩-土界面处孔压连续性条件为

$$r = r_p : u_{s1} = u_p \quad (8)$$

桩间土外边界处的径向边界条件为

$$r = r_{se} : \frac{\partial u_{s1}}{\partial r} = 0 \quad (9)$$

由基本假设 b, 碎石中无径向渗流, 则从桩间土中流入碎石桩的水量等于从碎石桩排出的水量, 则有

$$\left(2\pi r \frac{k_{r1}}{\gamma_w} \frac{\partial u_{s1}}{\partial r} \right)_{r=r_p} = -\pi r_p^2 \frac{k_p}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \bar{u}_p}{\partial z^2} \quad (10)$$

对式(1)关于 r 积分 2 次, 并利用式(8)和(9), 有

$$\frac{k_{v1}}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \bar{u}_{s1}}{\partial z^2} + \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} = -\frac{k_p}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \bar{u}_p}{\partial z^2} \left(\frac{r_p^2}{r_{se}^2 - r_p^2} \right) \quad (11)$$

$$u_{s1} = \bar{u}_p + \frac{\gamma_w}{2k_{h1}} \left(\frac{k_{v1}}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \bar{u}_{s1}}{\partial z^2} + \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} \right) \cdot [r_{se}^2 I_0(r) - J_0(r)] \quad (12)$$

$$I_0(r) = \int_{r_p}^r \frac{d\xi}{\xi f(\xi)}, J_0(r) = \int_{r_p}^r \frac{\xi d\xi}{f(\xi)} \quad (13)$$

将式(12)代入式(2), 可得

$$\bar{u}_{s1} = \bar{u}_p + \frac{\gamma_w}{k_{h1} (r_{se}^2 - r_p^2)} \left(\frac{k_{v1}}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \bar{u}_{s1}}{\partial z^2} + \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} \right) \quad (14)$$

$$I_1 = \int_{r_p}^{r_{se}} \xi I_0(\xi) d\xi, J_1 = \int_{r_p}^{r_{se}} \xi J_0(\xi) d\xi \quad (15)$$

由式(5), (6), (10), (11)和(14)可以得到

$$\bar{u}_{s1} = \bar{u}_p - G \frac{\partial^2 \bar{u}_p}{\partial z^2} \quad (16)$$

$$\bar{u}_1 = (1 - m_2) \bar{u}_p - T \frac{\partial^2 \bar{u}_p}{\partial z^2} \quad (17)$$

$$A \frac{\partial^4 \bar{u}_p}{\partial z^4} + B \frac{\partial^3 \bar{u}_p}{\partial t \partial z^2} + C \frac{\partial^2 \bar{u}_p}{\partial z^2} + D \frac{\partial \bar{u}_p}{\partial t} = 0 \quad (18)$$

$$\begin{cases} A = \frac{Gk_{v1}E_{comp1}}{\gamma_w}, B = -T, \\ C = -\frac{k_{v1}E_{comp1}}{\gamma_w} \left(1 + \frac{2G}{F_c} \frac{k_{h1}}{k_{v1}} \right), \\ D = (1 - m_2), G = \frac{F_c k_p}{2k_{h1}} \left(\frac{m_1}{1 - m_1 - m_2} \right), \\ F_c = \frac{2(r_{se}^2 I_1 - J_1)}{r_c^2 (1 - m_1 - m_2)}, T = (1 - m_1 - m_2)G \end{cases} \quad (19)$$

方程(18)是碎石桩超静孔压的固结微分方程。

考虑涂抹区渗透系数为常数, 则 $f(r)$ 可按下式计算^[22]:

$$f(r) = \begin{cases} \alpha_1, r_p \leq r < r_s \\ 1, r_s \leq r \leq r_{se} \end{cases} \quad (20)$$

式中, $\alpha_1 = k_{s1}/k_{h1}$ 。

由式(20)计算出反映碎石桩侧涂抹效应的参数 F_c , 将其代入式(19)可得到涂抹区渗透系数为常数时方程(16)~(18)中的系数 A, B, C, D, G 和 T 。

2.2 下部加固区固结方程

碎石桩以下桩间土只发生竖向渗流。根据基本假设 a, 并参考 Yang 等^[11] 的研究, 容易给出仅由水泥土桩加固的下部加固区复合地基的固结方程:

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} = c_{v2e} \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial z^2} \quad (21)$$

$$c_{v2e} = \frac{k_{v2}E_{comp2}}{(1 - m_2)\gamma_w} \quad (22)$$

$$E_{comp2} = (1 - m_2) E_{s2} + m_2 E_c \quad (23)$$

式中: c_{v2e} 为考虑了水泥土桩影响的下部桩间土等效竖向固结系数; E_{comp2} 为下部加固区的复合压缩模量; $\bar{u}_2$ 为复合地基下部加固区任一深度 z 处的平均超静孔隙水压力, 计算公式为

$$\bar{u}_2 = \frac{1}{\pi r_c^2} \int_0^{r_{se}} 2\pi r u_{s2} dr = (1 - m_2) \bar{u}_{s2} \quad (24)$$

式中, u_{s2} 和 $\bar{u}_{s2}$ 为下部加固区桩间土中任一点 (r, z) 处 t 时刻的超静孔压和该深度处的平均超静孔隙水压力。

3 固结解析解

3.1 固结方程的求解条件

a. 竖向边界条件。

考虑复合地基顶面排水、底面不排水的单面

排水 (PTIB) 情况, 可知竖向边界条件为

$$z=0: \bar{u}_{s1}=0, \bar{u}_p=0, \bar{u}_1=0 \quad (25)$$

$$z=H: \frac{\partial \bar{u}_{s2}}{\partial z}=0, \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial z}=0 \quad (26)$$

b. 碎石桩-土界面处和固结模型外边界处的孔压和水流连续性条件见式(8)~(10)。

c. 上、下加固区分界面处孔压和水流连续条件为

$$z=h_1:$$

$$\bar{u}_{s1}=\bar{u}_{s2} \quad (27)$$

$$\bar{u}_p=\bar{u}_{s2} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} m_1 k_p \frac{\partial \bar{u}_p}{\partial z} + (1-m_1-m_2) k_{v1} \frac{\partial \bar{u}_{s1}}{\partial z} = \\ (1-m_2) k_{v2} \frac{\partial \bar{u}_{s2}}{\partial z} \end{aligned} \quad (29)$$

d. 荷载瞬时施加, 则初始条件为

$$t=0: \bar{u}_1=\sigma, \bar{u}_2=\sigma \quad (30)$$

3.2 固结方程的解

根据分离变量法可以获得满足除初始条件式(30)以外所有定解条件的长水泥土桩-短碎石桩复合地基固结方程解的一般形式如下:

$$\bar{u}_p = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\beta_m t} g_m(z) \quad (31)$$

$$\bar{u}_{s1} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\beta_m t} H_m(z) \quad (32)$$

$$\bar{u}_{s2} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\beta_m t} I_m(z) \quad (33)$$

$$\bar{u}_1 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\beta_m t} K_m(z) \quad (34)$$

$$\bar{u}_2 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\beta_m t} Q_m(z) \quad (35)$$

$$g_m(z) = a_m \operatorname{sh}(\xi_m z) + d_m \sin(\lambda_m z) \quad (36)$$

$$\begin{aligned} H_m(z) = a_m (1 - G \xi_m^2) \operatorname{sh}(\xi_m z) + \\ d_m (1 + G \lambda_m^2) \sin(\lambda_m z) \end{aligned} \quad (37)$$

$$I_m(z) = e_m \cos \left[\sqrt{\frac{\beta_m}{c_{v2e}}} (H-z) \right] \quad (38)$$

$$\begin{aligned} K_m(z) = a_m (D + B \xi_m^2) \operatorname{sh}(\xi_m z) + \\ d_m (D - B \lambda_m^2) \sin(\lambda_m z) \end{aligned} \quad (39)$$

$$Q_m(z) = e_m (1 - m_2) \cos \left[\sqrt{\frac{\beta_m}{c_{v2e}}} (H-z) \right] \quad (40)$$

$$\begin{cases} \xi_m = \sqrt{\frac{-(C-\beta_m B) + \sqrt{(C-\beta_m B)^2 + 4A\beta_m D}}{2A}} \\ \lambda_m = \sqrt{\frac{(C-\beta_m B) + \sqrt{(C-\beta_m B)^2 + 4A\beta_m D}}{2A}} \end{cases} \quad (41)$$

式中: β_m 为待求的特征值; a_m , d_m 和 e_m 为与 β_m 有关的待定常数。

将式(31)~(33)代入式(27)~(29), 得到求解 a_m , d_m 和 e_m 的方程组如下:

$$\mathbf{S} \times \mathbf{X}^T = \mathbf{0} \quad (42)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$\mathbf{X} = (a_m, d_m, e_m) \quad (44)$$

系数矩阵 $\mathbf{S}$ 中的各元素为

$$\begin{cases} s_{11} = \operatorname{sh}(\xi_m h_1); s_{12} = \sin(\lambda_m h_1) \\ s_{13} = -\cos \left(\sqrt{\frac{\beta_m}{c_{v2e}}} h_2 \right); s_{21} = (1 - G \xi_m^2) \operatorname{sh}(\xi_m h_1) \\ s_{22} = (1 + G \lambda_m^2) \sin(\lambda_m h_1); s_{23} = -\cos \left(\sqrt{\frac{\beta_m}{c_{v2e}}} h_2 \right) \\ s_{31} = m_1 \xi_m k_p \operatorname{ch}(\xi_m h_1) + (1 - m_1 - m_2) \xi_m (1 - G \xi_m^2) k_{v1} \operatorname{ch}(\xi_m h_1) \\ s_{32} = m_1 \lambda_m k_p \cos(\lambda_m h_1) + (1 - m_1 - m_2) \lambda_m (1 + G \lambda_m^2) k_{v1} \cos(\lambda_m h_1) \\ s_{33} = -(1 - m_2) k_{v2} \sqrt{\frac{\beta_m}{c_{v2e}}} \sin \left(\sqrt{\frac{\beta_m}{c_{v2e}}} h_2 \right) \end{cases} \quad (45)$$

为使方程(42)有非零解, 系数矩阵 $\mathbf{S}$ 的行列式必须等于 0, 即:

$$|\mathbf{S}| = 0 \quad (46)$$

由式(46)可解出无穷多个 β_m ($m=1, 2, 3, \dots, \infty$)。由于方程(42)的系数矩阵 $\mathbf{S}$ 奇异, 不能同时解出 a_m , d_m 和 e_m 。根据 Tang 等^[23]的方法, 可令 $a_m=1.0$, 然后将每一个 β_m 值代入方程(42)即可解出 d_m 和 e_m , 进而得到 $g_m(z)$, $H_m(z)$, $I_m(z)$, $K_m(z)$ 和 $Q_m(z)$, 它们也是无穷多个。

由初始条件式(30)并利用式(47)所示的加权正交关系, 可获得各孔压的系数 A_m 。

$$\begin{aligned} \frac{(1-m_1-m_2)}{E_{\text{comp1}}} \int_0^{h_1} K_m(z) K_n(z) dz + \\ \frac{(1-m_2)}{E_{\text{comp2}}} \int_{h_1}^H Q_m(z) Q_n(z) dz = 0, m \neq n \end{aligned} \quad (47)$$

$$A_m = \frac{\sigma \left[\frac{(1-m_1-m_2)}{E_{\text{comp1}}} W_{m1} + \frac{(1-m_2)}{E_{\text{comp2}}} W_{m2} \right]}{\frac{(1-m_1-m_2)}{E_{\text{comp1}}} W_{m3} + \frac{(1-m_2)}{E_{\text{comp2}}} W_{m4}} = C_m \sigma \quad (48)$$

$$\left\{ \begin{aligned} W_{m1} &= \int_0^{h_1} K_m(z) dz = \frac{a_m}{\xi_m} (D + B \xi_m^2) [\text{ch}(\xi_m h_1) - 1] + \\ &\quad \frac{d_m}{\lambda_m} (D - B \lambda_m^2) [1 - \cos(\lambda_m h_1)] \\ W_{m2} &= \int_{h_1}^H Q_m(z) dz = (1-m_2) e_m \sqrt{\frac{c_{v2e}}{\beta_m}} \cdot \sin \left(\sqrt{\frac{\beta_m}{c_{v2e}}} h_2 \right) \\ W_{m3} &= \int_0^{h_1} K_m^2(z) dz = a_m^2 (D + B \xi_m^2)^2 \left[\frac{\text{sh}(2 \xi_m h_1)}{4 \xi_m} - \frac{h_1}{2} \right] + \\ &\quad d_m^2 (D - B \lambda_m^2)^2 \left[\frac{h_1}{2} - \frac{\sin(2 \lambda_m h_1)}{4 \lambda_m} \right] + \\ &\quad \frac{2 a_m d_m (D + B \xi_m^2) (D - B \lambda_m^2)}{\xi_m \left[1 + \left(\frac{\lambda_m}{\xi_m} \right)^2 \right]} \cdot \\ &\quad \left[\text{ch}(\xi_m h_1) \sin(\lambda_m h_1) - \frac{\lambda_m}{\xi_m} \text{sh}(\xi_m h_1) \cos(\lambda_m h_1) \right] \\ W_{m4} &= \int_{h_1}^H Q_m^2(z) dz = (1-m_2)^2 e_m^2 \left[\frac{h_2}{2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{4} \sqrt{\frac{c_{v2e}}{\beta_m}} \cdot \sin \left(2 \sqrt{\frac{\beta_m}{c_{v2e}}} h_2 \right) \right] \end{aligned} \right. \quad (49)$$

$$C_m = \frac{\frac{(1-m_1-m_2)}{E_{\text{comp1}}} W_{m1} + \frac{(1-m_2)}{E_{\text{comp2}}} W_{m2}}{\frac{(1-m_1-m_2)}{E_{\text{comp1}}} W_{m3} + \frac{(1-m_2)}{E_{\text{comp2}}} W_{m4}} \quad (50)$$

3.3 固结度解

复合地基分别按孔压和按沉降定义的整体平均固结度 $U_p(t)$ 和 $U_s(t)$ 的公式如下：

$$U_p(t) = \frac{\int_0^{h_1} (\sigma - \bar{u}_1) dz + \int_{h_1}^H (\sigma - \bar{u}_2) dz}{\int_0^H \sigma dz} = 1 - \frac{1}{H} \sum_{m=1}^{\infty} C_m (W_{m1} + W_{m2}) e^{-\beta_m t} \quad (51)$$

$$U_s(t) = \frac{\int_0^{h_1} \frac{\sigma - \bar{u}_1}{E_{\text{comp1}}} dz + \int_{h_1}^H \frac{\sigma - \bar{u}_2}{E_{\text{comp2}}} dz}{\int_0^{h_1} \frac{\sigma}{E_{\text{comp1}}} dz + \int_{h_1}^H \frac{\sigma}{E_{\text{comp2}}} dz} = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} C_m T_m e^{-\beta_m t} \quad (52)$$

$$T_m = \frac{\frac{W_{m1}}{E_{\text{comp1}}} + \frac{W_{m2}}{E_{\text{comp2}}}}{\frac{h_1}{E_{\text{comp1}}} + \frac{h_2}{E_{\text{comp2}}}} \quad (53)$$

4 算例验证

水泥土桩打穿软土，其长度和半径分别为 $H=20\text{ m}$ 和 $r_c=0.25\text{ m}$ ，碎石桩的长度和半径分别为 $h_1=16\text{ m}$ 和 $r_p=0.3\text{ m}$ 。各桩正方形布设，桩间距都为 $s=1.6\text{ m}$ ，相应的影响区半径 $r_e=0.902\text{ m}$ 。碎石桩侧涂抹区的半径 $r_{s1}=1.5\text{ }r_p$ ，考虑涂抹区土的水平向渗透系数为一常数，取 $\alpha_1=0.25$ ，荷载 $p=100\text{ kPa}$ 瞬时施加。

为便于划分网格，将圆形截面的碎石桩和水泥土桩都按面积相等原则简化为方形截面桩。利用对称性，取方形截面典型单元体的 1/4 建立有限元模型。复合地基表面铺设 0.6 m 厚的混凝土板模拟刚性基础，板下设有 0.4 m 厚的砂垫层，有限元模型几何尺寸为 0.8 m×0.8 m×21 m。

采用有限元软件 ABAQUS 进行复合地基固结的数值分析。模型边界条件如下：底部约束 3 个方向的位移，不排水；4 个面侧面约束法向位移，不排水；复合地基顶面自由，排水。模型中各材料均为线弹性，混凝土板的弹性模量和泊松比分别为 21 GPa 和 0.15，其他材料的力学参数如表 1 所示，其弹性模量 E 可由压缩模量 E_1 和泊松比 μ 按式 $E=(1+\mu)(1-2\mu)E_1/(1-\mu)$ 近似换算。水泥土桩和混凝土板用 8 结点六面体单元 (C3D8R) 离散，碎石桩、桩间土和砂垫层采用 8 结点应力-孔压耦合单元 (C3D8P) 离散。碎石桩-土之间和水泥土桩-土之间完全接触。模型结点总数 1 144 个，单元总数 2 134 个，有限元网格如图 3 所示。

表 1 各材料参数
Tab.1 Parameters of various materials

材料	压缩模量/MPa	泊松比	渗透系数×10 ⁻⁶ /(cm·s ⁻¹)	
			水平向	竖直向
碎石桩	50	0.25	—	10 ⁴
水泥土桩	120	0.20	—	—
上层土	3	0.35	2.0	1.0
涂抹区土	3	0.35	0.5	1.0
下层土	3	0.35	1.0	5.0
砂垫层	28	0.25	11.6	11.6

图 4 给出本文解析解和有限元解获得的复合地基整体平均固结度 U_s 随无量纲时间因数 $T_h=c_{h1}t/(d_e)^2$ 变化曲线的比较， $c_{h1}=k_{h1}E_{s1}/\gamma_w$ 。从图 4 中可以看到，复合地基固结度解析解与有限元数值解较为接近，有限元解的数值略小于解析解，二者相差最大不超过 8.6%，算例表明本文解析解有比较高的计算精度。

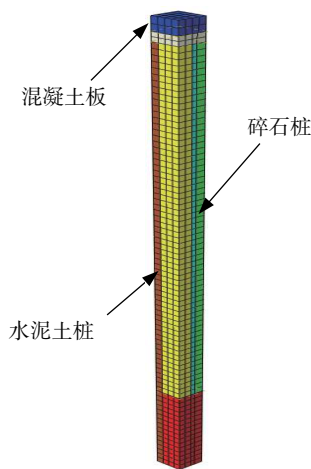


图3 有限元网格

Fig. 3 Finite element mesh

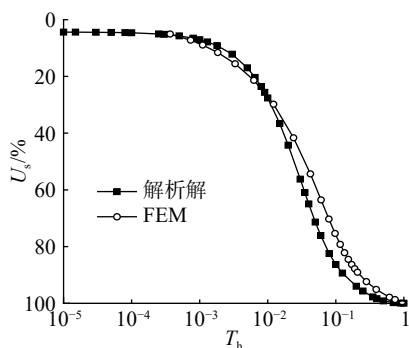


图4 固结度解析解与有限元解比较

Fig. 4 Comparisons of consolidation degree curves obtained by proposed solution and finite element method

5 固结特性分析

下面利用固结度解析解进行参数分析，研究长水泥土桩-短碎石桩复合地基的固结特性。基准参数为： $H=20\text{ m}$ ， $h_1=16\text{ m}$ ， $h_2=4\text{ m}$ ； $r_p=0.3\text{ m}$ ， $r_c=0.25\text{ m}$ ， $r_s=0.45\text{ m}$ ， $r_e=0.9024\text{ m}$ 。相应地， $m_1=0.1105$ ， $m_2=0.0768$ ； $E_p=50\text{ MPa}$ ， $E_c=120\text{ MPa}$ ， $E_{s1}=E_{s2}=3\text{ MPa}$ ； $k_{v1}=10^{-6}\text{ cm/s}$ ， $k_{h1}=2\times 10^{-6}\text{ cm/s}$ ， $k_{v2}=5\times 10^{-6}\text{ cm/s}$ ， $k_p=10^{-2}\text{ cm/s}$ ， $\alpha_1=0.25$ 。

图5给出不同碎石桩贯入比 $\rho=h_1/H$ 下复合地基固结度曲线 U_s-T_h 的比较， ρ 越大表示碎石桩越长。从图5中可以发现，随着碎石桩贯入比 ρ 的增加，复合地基的固结速率逐渐增大。其原因主要在于碎石桩越长，径向排水的桩间土就越厚。在固结后期，复合地基固结速率随碎石桩贯入比的增加更为显著。

图6给出碎石桩贯入比分别取 $\rho=0.4$ 和 $\rho=0.8$ 时碎石桩置换率 m_1 的变化对复合地基固结速率的影响。图6表明，复合地基的固结速率随碎石桩

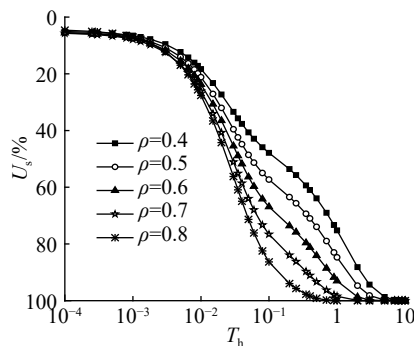


图5 碎石桩贯入比对复合地基固结速率的影响

Fig. 5 Effect of penetration ratio of stone column on the consolidation rate

置换率 m_1 的增加而增大，这是碎石桩加固区内桩间土厚度减小而使径向排水距离缩短的缘故。固结速率增大的幅度与碎石桩的贯入比有关：碎石桩贯入比较小时($\rho=0.4$)，仅在固结前期复合地基固结速率随 m_1 略微增大；碎石桩贯入比较大时($\rho=0.8$)，复合地基的固结速率随碎石桩置换率 m_1 的增加明显增大，特别是 $m_1>0.15$ 以后，它随 m_1 的增加更为显著。

图7给出碎石桩贯入比取大、小两个不同数值时碎石桩压缩模量 E_p 的变化对复合地基固结速率的影响，计算中 E_p 取30，50和70 MPa这3个值。

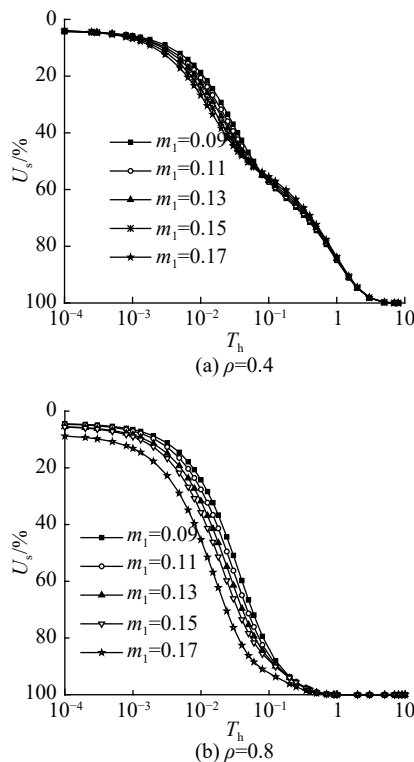


图6 碎石桩置换率对复合地基固结速率的影响

Fig. 6 Effect of area replacement ratio of stone column on the consolidation rate

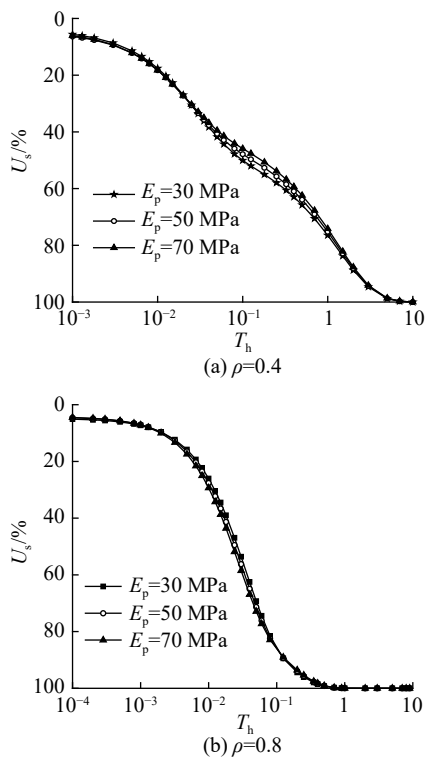


图 7 碎石桩压缩模量对复合地基固结速率的影响

Fig. 7 Effect of constrained modulus of stone column on the consolidation rate

图 7 表明, 碎石桩压缩模量的变化对复合地基固结速率的影响与其贯入比有关: 贯入比较小($\rho=0.4$)时, 碎石桩压缩模量变化的影响主要在固结中期, 表现为 E_p 越大复合地基的固结越慢, 但减小的幅度较小; 碎石桩贯入比较大($\rho=0.8$)时, 复合地基的固结速率随 E_p 的增加而增大, 但增幅较小。不同碎石桩贯入比下复合地基固结速率随短碎石桩刚度的变化规律与 Yang 等^[16] 获得的不排水桩刚度变化对悬浮不排水桩复合地基固结速率影响的规律基本相同, 体现出桩体的悬浮效应。总体来看, 由于碎石桩是悬浮桩且本身刚度较小, 其刚度的变化对长水泥土桩-短碎石桩复合地基固结速率的影响较小。

图 8 给出碎石桩贯入比 ρ 取大、小两个不同数值时不同 k_p/k_{v1} 下复合地基固结度曲线的比较。由于 k_{v1} 数值不变, k_p/k_{v1} 越大表示碎石桩的竖向渗透系数越大, 即其竖向井阻越小。从图 8 中可见, 长水泥土桩-短碎石桩复合地基的固结速率随碎石桩竖向井阻的增加而逐渐减小, 减小率逐渐增大。井阻的影响与碎石桩的贯入比有关: 贯入比较小($\rho=0.4$)时, 碎石桩井阻对复合地基固结速率的影响较小; 贯入比较大($\rho=0.8$)时, 碎石桩井阻对复合地基固结速率的影响要大得多。

图 9 和图 10 分别给出长水泥土桩的置换率

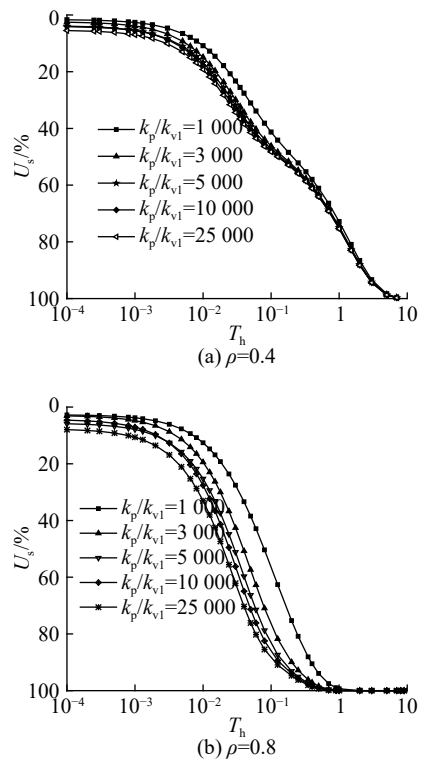


图 8 碎石桩渗透系数对复合地基固结速率的影响

Fig. 8 Effect of permeability coefficient of stone column on the consolidation rate

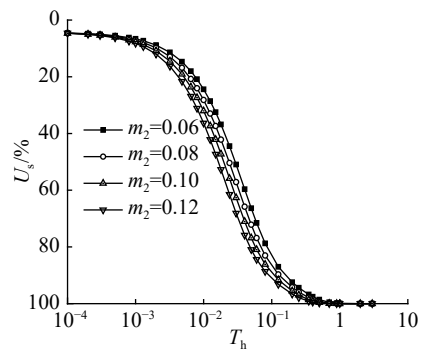


图 9 水泥土桩置换率对复合地基固结速率的影响

Fig. 9 Effect of area replacement ratio of soil-cement column on the consolidation rate

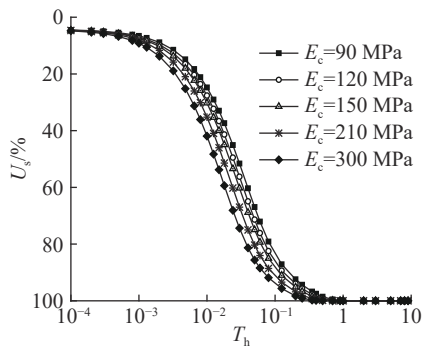


图 10 水泥土桩压缩模量对复合地基固结速率的影响

Fig. 10 Effect of constrained modulus of soil-cement column on the consolidation rate

m_2 和其压缩模量 E_c 的变化对复合地基固结速率的影响。这两幅图表明,长水泥土桩-短碎石桩复合地基的固结速率随水泥土桩置换率 m_2 和其压缩模量 E_c 的增加而逐渐增大,这一结果与杨涛等^[19]对打穿软土的等长度不排水桩-碎石桩复合地基的研究结果是一致的,原因在于水泥土桩是端承桩。

6 结 论

建立了瞬时荷载下长水泥土桩-短碎石桩复合地基的固结解析解,探究了这种多元复合地基的固结性状,主要结论如下:

a. 增加碎石桩的长度可显著加快长水泥土桩-短碎石桩复合地基的固结。

b. 长水泥土桩-短碎石桩复合地基的固结速率随碎石桩置换率的增加而增大,随其井组的增加而减小。只有当碎石桩的贯入比较大时,其井组和置换率的变化才会对复合地基的固结速率产生较大的影响。

c. 碎石桩本身刚度的变化对长水泥土桩-短碎石桩复合地基固结速率影响很小。

d. 长水泥土桩-短碎石桩复合地基的固结速率随水泥土桩置换率和压缩模量的增加而逐渐增大。

e. 由于采用了等应变假设,本文固结解析解更适合刚性基础下长水泥土桩-短碎石桩复合地基的固结分析。

参考文献:

- [1] 郭彪,龚晓南,李亚军. 考虑桩体径竖向渗流的碎石桩复合地基固结解析解[J]. *岩土工程学报*, 2017, 39(8): 1485-1492.
- [2] DEB K, BEHERA A. Rate of consolidation of stone column-improved ground considering variable permeability and compressibility in smear zone[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2017, 17(6): 04016128.
- [3] 卢萌盟,谢康和,李传勋,等. 考虑桩土侧向变形的复合地基固结解[J]. *岩土工程学报*, 2011, 33(2): 181-187.
- [4] 郭彪,龚晓南,李亚军. 考虑加载过程及桩体固结变形的碎石桩复合地基固结解析解[J]. *工程地质学报*, 2016, 24(3): 409-417.
- [5] ZHOU Y, ZHOU G Q, LU M M, et al. Analytical solution for the consolidation process of a stone-column reinforced foundation under partially drained boundaries[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2018, 18(1): 06017023.
- [6] 李玉成. 变荷载条件下考虑土体非线性的碎石桩复合地基固结研究[J]. *河南科学*, 2018, 36(2): 204-209.

- [7] 张玉国,孙敏,谢康和. 未打穿散体材料桩复合地基固结简化解研究[J]. *岩土力学*, 2014, 35(5): 1303-1310.
- [8] 章定文,范礼彬,刘松玉,等. 水泥土搅拌桩复合地基固结机理室内模型试验[J]. *中国公路学报*, 2014, 27(12): 1-9.
- [9] 杨涛,李国维. 路堤荷载下不排水端承桩复合地基固结分析[J]. *岩土工程学报*, 2007, 29(12): 1831-1836.
- [10] 卢萌盟,谢康和,周国庆,等. 不排水桩复合地基固结解析解[J]. *岩土工程学报*, 2011, 33(4): 574-579.
- [11] YANG T, YANG J Z, NI J. Analytical solution for the consolidation of a composite ground reinforced by partially penetrated impervious columns[J]. *Computers and Geotechnics*, 2014, 57: 30-36.
- [12] GONG X N, TIAN X J, HU W T. Simplified method for predicating consolidation settlement of soft ground improved by floating soil-cement column[J]. *Journal of Central South University*, 2015, 22(7): 2699-2706.
- [13] 杨燕伟,关云飞,李锦涛. 混凝土芯砂石桩复合地基固结计算[J]. *水利水运工程学报*, 2016(3): 46-52.
- [14] 杨涛,唐风. 变荷载下劲性搅拌桩复合地基固结分析[J]. *建筑结构学报*, 2017, 38(9): 160-166.
- [15] 林森. CFG桩-碎石桩组合型复合地基的应用实例及问题分析[J]. *建筑科学*, 2010, 26(3): 97-99.
- [16] 于德国,郑敏丽,张彬,等. 碎石桩加水泥土搅拌桩复合地基的应用[J]. *中州大学学报*, 2019, 36(4): 112-115.
- [17] 沈宇鹏,田亚护,冯瑞玲. GC-CFG组合桩复合地基处理高速铁路基底的应用研究[J]. *土木工程学报*, 2013, 46(2): 136-142.
- [18] 于春亮,张爱军,赵庆玉,等. 透水桩与不透水桩组合型复合地基固结解析分析[J]. *岩土力学*, 2017, 38(11): 3255-3260, 3270.
- [19] 杨涛,李超. 刚性基础下组合渗流碎石桩-不排水桩复合地基固结分析[J]. *岩石力学与工程学报*, 2018, 37(11): 2631-2640.
- [20] LU M M, JING H W, ZHOU Y, et al. General analytical model for consolidation of stone column-reinforced ground and combined composite ground[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2017, 17(6): 04016131.
- [21] 侯永峰,龚晓南. 水泥土的渗透特性[J]. *浙江大学学报(工学版)*, 2000, 34(2): 189-193.
- [22] LU M M, SLOAN S W, INDRARATNA B, et al. A new analytical model for consolidation with multiple vertical drains[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2016, 40(11): 1623-1640.
- [23] TANG X W, NIU B, CHENG G C, et al. Closed-form solution for consolidation of three-layer soil with a vertical drain system[J]. *Geotextiles and Geomembranes*, 2013, 36: 81-91.