

带有扰动的变时滞离散系统可达集估计

庄 苏¹, 丛玉豪^{1,2}

(1. 上海大学 理学院, 上海 200444; 2. 上海海关学院, 上海 201204)

摘要: 研究了在有界峰值扰动下变时滞离散系统的可达集估计和状态反馈控制器设计问题。首先, 选取适当的 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 利用线性矩阵不等式, 得到界定系统可达集的充分条件, 即一个包含非凸标量的时滞相关结果。在系统初始值不为零的情况下, 这些条件保证了包含系统状态的椭球体的存在性。其次, 在可达集估计过程中, 通过设计状态反馈控制器使所确定的椭球包含闭环系统的可达集。随后, 为使所估计的椭球体尽可能小, 将求解最小椭球问题转化为一个具有矩阵不等式约束的优化问题。最后, 通过数值算例验证所得结果的有效性。

关键词: 变时滞; 离散系统; 状态反馈控制器; 可达集; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP 271+8

文献标志码: A

Reachable set estimation for discrete-time systems with time-varying delay and disturbances

ZHUANG Su¹, CONG Yuhao^{1,2}

(1. College of Science, Shanghai University, Shanghai 200444, China; 2. Shanghai Customs College, Shanghai 201204, China)

Abstract: The problem of reachable set estimation and state-feedback controller design for discrete-time systems with time-varying delay under bounded peak disturbances was concerned. Firstly, by choosing appropriate Lyapunov-Krasovskii functional and based on the linear matrix inequality, a sufficient condition was obtained to bound the reachable set of closed-loop systems, that was, a delay-dependent result containing one nonconvex scalar. When the initial value of the system was not zero, these conditions guaranteed the existence of the ellipsoid containing the system state. Secondly, in the process of reachable set estimation, a state-feedback controller was designed to determine ellipsoid which contained the reachable set of the closed-loop system. Thirdly, in order to make the estimated ellipsoid as small as possible, the minimum ellipsoid problem was transformed into an optimization problem with matrix inequality constraints. Finally, numerical examples were given to verify the effectiveness of the obtained results.

Keywords: time-varying delays; discrete-time system; state-feedback controller; reachable set; linear matrix inequality

收稿日期: 2021-01-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11971303)

第一作者: 庄 苏(1995-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 时滞系统的控制. E-mail: zhuangsu@shu.edu.cn

通信作者: 丛玉豪(1965-), 男, 教授. 研究方向: 常微分方程理论及其应用. E-mail: yhccong@shu.edu.cn

可达集估计是控制理论中一个重要的研究课题,它在许多领域有着广泛的应用,如安全检查^[1]、峰间极小化^[2]、参数估计^[3]和具有饱和执行器的控制系统^[4]。系统的可达集是指从初始条件出发,能够到达的所有系统状态的集合。通常人们很难获得可达集的精确特征,所以,需要确定一个能够界定可达集的区域,并且希望这个区域能够尽可能的小,这就是可达集估计问题。

众所周知,在工程 and 实际系统中,一方面,由于数据变换、测量误差、线性化近似等原因,扰动输入现象是不可避免的。对于具有有界峰值扰动的系统,研究可达集估计问题的最新方法之一就是椭球体技术,其目的是确定包含可达集的椭球体。Boyd 等^[1]提出,这种椭球可以通过使用 Lyapunov 方法和线性矩阵不等式(LMI)技术获得。

另一方面,在各种实际系统中,时滞经常发生,它的存在可能导致系统不稳定^[5]。然而目前对于时滞系统可达集的研究还比较少。因此,如何找到一个尽可能小的估计来界定时滞系统的可达集引起了许多学者的关注^[6-12]。Fridman 等^[6]采用 Lyapunov-Razumikhin 方法研究了带有有界峰值扰动的时变时滞连续线性系统的可达集估计问题;Kim^[7]改进了 Fridman 等的研究成果,通过建立适当的 Lyapunov-Krasovskii 泛函,提出了一个改进的可达集椭球界,其中时滞相关条件以仅涉及一个非凸参数的矩阵不等式形式给出;Zuo 等^[8]提出了一种用于多面体不确定系统可达集估计的极大 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法;Nam 等^[9]认为时滞下限不必为零,提出利用时滞分解技术来估计可达集。

值得注意的是,上述文献中考虑的系统都是连续的。实际上,随着计算机技术的发展,大多数控制工程应用系统都是数字实现的。因此,直接对离散模型进行研究更为合理。到目前为止,对于离散时滞系统的可达集估计问题的研究还很少。That 等^[10]讨论了受状态时滞和有界扰动的线性离散系统的可达集有界问题,提出了一种新的极轴投影的概念;Lam 等^[11]研究了具有有界扰动和多重常时滞的离散多面体系统的可达集估计问题。但是上述结果仅仅针对开环系统,而对于系统可达集估计的控制器设计问题研究成果较少。比如,Zhang 等^[12]研究了具有分布时滞的连续系统的控制器设计问题;Chen 等^[13]研究了离散线性

切换系统的状态反馈控制器设计问题,但并未考虑时滞对系统可达集估计的影响。但有关利用反馈控制器来研究离散变时滞系统的可达集估计问题还未被涉及。此外,上述文献都假设系统的初始值为零,这个条件在可达集估计的过程中带来了一些限制。

本文在有界扰动下,研究了一类变时滞离散系统的可达集估计和控制器设计问题,其中系统的初始值不再要求为零。利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法,得到界定闭环系统可达集的充分条件。之后,通过求解优化问题,确定了一个尽可能小的区域来估计系统的可达集,最后给出两个仿真实例验证所得结果的有效性。

1 问题描述

考虑变时滞离散系统

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(k-\tau(k)) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{E}\boldsymbol{\omega}(k) \\ \boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{\varphi}(k), k \in [-\tau_M, 0] \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\boldsymbol{x}(k) = [\boldsymbol{x}_1(k), \boldsymbol{x}_2(k), \dots, \boldsymbol{x}_n(k)]^T \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态向量; $\boldsymbol{u}(k)$ 为输入向量; $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 为适当维数的常矩阵; $\tau(k)$ 为时变时滞,且满足 $0 < \tau_m \leq \tau(k) \leq \tau_M$, τ_m, τ_M 为非负整数。

初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(k)$ 满足

$$\boldsymbol{\varphi}^T(k)\boldsymbol{\varphi}(k) \leq \sigma \quad (2)$$

扰动 $\boldsymbol{\omega}(k) \in \mathbb{R}^l$, 满足

$$\boldsymbol{\omega}^T(k)\boldsymbol{\omega}(k) \leq \bar{\omega}^2 \quad (3)$$

式中, $\bar{\omega} > 0$ 为已知常数。

定义 1 在有界扰动下,系统(1)的可达集为

$$\mathcal{R} = \{\boldsymbol{x}(k) \in \mathbb{R}^n | \boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{\omega}(k) \text{ 满足式(1)~(3)}, k \geq 0\} \quad (4)$$

定义 2 对于矩阵 $\boldsymbol{P} > 0$, 椭球的定义如下

$$\varepsilon(\boldsymbol{P}, 1) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{x} \leq 1\} \quad (5)$$

对于系统(1),考虑如下形式的状态反馈控制器

$$\boldsymbol{u}(k) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k-\tau(k)) \quad (6)$$

式中, $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 为待定控制器增益矩阵。

将状态反馈控制器式(6)代入系统(1),可得如下闭环系统

$$\boldsymbol{x}(k+1) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(k) + (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{G})\boldsymbol{x}(k-\tau(k)) + \boldsymbol{E}\boldsymbol{\omega}(k) \quad (7)$$

定义 3 令 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 称 $\rho(\boldsymbol{A}) = \{\max_i |\lambda_i|, \lambda_1, \lambda_2, \dots,$

λ_n 是 A 的特征值}为矩阵 A 的谱半径。若 $\rho(A) < 1$, 则称矩阵 A 是 Schur 稳定的。

本文的主要目的是设计一个状态反馈控制器, 使闭环系统的可达集包含在椭球体中, 并且椭球体尽可能小。因此, 为了得到本文主要结果, 首先给出引理 1 和引理 2。

引理 1^[14] 设 $V(x(k))$ 是满足 $\omega^T(k)\omega(k) \leq \bar{\omega}^2$ 的 Lyapunov 泛函, 且 $V(x(k)) > 0$ 。若存在标量 $0 < \alpha < 1$ 使得

$$\Delta V(x(k)) + (1 - \alpha)V(x(k)) - \frac{1 - \alpha}{\bar{\omega}^2} \omega^T(k)\omega(k) \leq 0 \quad (8)$$

则 $V(x(k)) \leq \max\{1, V(x(0))\}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ 。

引理 2^[15](Schur 补引理) 对于矩阵 $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, S_{11}, S_{12} 是对称矩阵, $S_{12} = S_{21}^T$, 下列条件等价:

$$\begin{bmatrix} -\bar{P} & A\bar{P} + BL & D\bar{P} + BR & 0 & 0 & E \\ * & -\alpha\bar{P} + \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + \bar{Q}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\alpha^{\tau_m}\bar{Q}_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\alpha^{\tau_m}\bar{Q}_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\alpha^{\tau_m}\bar{Q}_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\frac{1 - \alpha}{\bar{\omega}^2}I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (9)$$

$$\bar{P} \leq \lambda_1 I, \bar{Q}_1 \leq \lambda_2 I, \bar{Q}_2 \leq \lambda_3 I, \bar{Q}_3 \leq \lambda_4 I \quad (10)$$

$$\mu\sigma \leq 1 \quad (11)$$

其中

$$\mu = \lambda_1 + \tau_m\lambda_2 + \tau_M\lambda_3 + \tau_M\lambda_4$$

那么, 存在状态反馈控制器(6), 使得闭环系统(7)的可达集包含在椭球 $\varepsilon(P, 1) = \varepsilon(\bar{P}^{-1}, 1)$ 中。

此时, 状态反馈增益为 $K = L\bar{P}^{-1}$, $G = R\bar{P}^{-1}$ 。

证明 选取如下 Lyapunov-Krasovskii 泛函:

$$V(x(k)) = V_1(x(k)) + V_2(x(k)) + V_3(x(k))$$

其中

$$V_1(x(k)) = x^T(k)Px(k)$$

$$\begin{aligned} \text{a. } S &= \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} < 0 \\ \text{b. } S_{11} &< 0, S_{22} - S_{21}S_{11}^{-1}S_{12} < 0 \\ \text{c. } S_{22} &< 0, S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21} < 0 \end{aligned}$$

2 主要结论

2.1 可达集的椭球界

本文旨在设计一个状态反馈控制器(6), 使得闭环系统(7)的可达集包含在椭球里面, 并且该椭球要尽可能的小。以下定理给出系统(1)~(3)可达集椭球界存在的充分条件。

定理 1 考虑在有界峰值扰动(3)下的系统(7), 若存在正标量 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, 矩阵 $\bar{P} > 0$, $\bar{Q}_1 > 0$, $\bar{Q}_2 > 0$, $\bar{Q}_3 > 0$, L, R 及标量 $0 < \alpha < 1$, 满足

$$\begin{aligned} V_2(x(k)) &= \sum_{i=k-\tau_m}^{k-1} \alpha^{k-i-1} x^T(i)Q_1x(i) + \\ &\quad \sum_{i=k-\tau_M}^{k-1} \alpha^{k-i-1} x^T(i)Q_2x(i) \\ V_3(x(k)) &= \sum_{i=k-\tau(k)}^{k-1} \alpha^{k-i-1} x^T(i)Q_3x(i) \end{aligned}$$

定义 $\Delta V(x(k))$ 为 $V(x(k))$ 的向前差分, 则

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k))$$

那么

$$V_1(x(k+1)) - \alpha V_1(x(k)) = x^T(k+1)Px(k+1) - \alpha x^T(k)Px(k)$$

$$\begin{aligned} V_2(x(k+1)) - \alpha V_2(x(k)) &= \sum_{i=k-\tau_m+1}^k \alpha^{k-i} x^T(i)Q_1x(i) + \sum_{i=k-\tau_M+1}^k \alpha^{k-i} x^T(i)Q_2x(i) - \\ &\quad \sum_{i=k-\tau_m}^{k-1} \alpha^{k-i} x^T(i)Q_1x(i) - \sum_{i=k-\tau_M}^{k-1} \alpha^{k-i} x^T(i)Q_2x(i) = \\ &\quad x^T(k)Q_1x(k) - \alpha^{\tau_m} x^T(k-\tau_m)Q_1x(k-\tau_m) + \\ &\quad x^T(k)Q_2x(k) - \alpha^{\tau_M} x^T(k-\tau_M)Q_2x(k-\tau_M) \\ V_3(x(k+1)) - \alpha V_3(x(k)) &= \sum_{i=k+1-\tau(k+1)}^k \alpha^{k-i} x^T(i)Q_3x(i) - \sum_{i=k-\tau(k)}^{k-1} \alpha^{k-i} x^T(i)Q_3x(i) = \\ &\quad x^T(k)Q_3x(k) - \alpha^{\tau(k)} x^T(k-\tau(k))Q_3x(k-\tau(k)) \end{aligned}$$

为了简便, 式(8)记为

$$\begin{aligned} H \leq & \mathbf{x}^T(k+1)P\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{x}^T(k)[Q_1 + Q_2 + Q_3 - \alpha P]\mathbf{x}(k) - \\ & \alpha^{\tau_m} \mathbf{x}^T(k - \tau_m)Q_1\mathbf{x}(k - \tau_m) - \alpha^{\tau_M} \mathbf{x}^T(k - \tau_M)Q_2\mathbf{x}(k - \tau_M) - \alpha^{\tau(k)} \mathbf{x}^T(k - \tau(k))Q_3\mathbf{x}(k - \\ & \tau(k)) - \frac{1 - \alpha}{\bar{\omega}^2} \omega^T(k)\omega(k) := \zeta^T(k)J\zeta(k) \end{aligned}$$

运用引理 1, 可得

其中

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & (A+BK)^T P(D+BG) & 0 & 0 & (A+BK)^T PE \\ * & (D+BG)^T P(D+BG) - \alpha^{\tau_M} Q_3 & 0 & 0 & (D+BG)^T PE \\ * & * & -\alpha^{\tau_m} Q_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\alpha^{\tau_M} Q_2 & 0 \\ * & * & * & * & E^T PE - \frac{1-\alpha}{\bar{\omega}^2} I \end{bmatrix}$$

$$J_{11} = (A+BK)^T P(A+BK) + Q_1 + Q_2 + Q_3 - \alpha P$$

若 $J \leq 0$, 运用 Schur 补引理, 可得

$$\begin{bmatrix} -P & P(A+BK) & P(D+BG) & 0 & 0 & E \\ * & Q_1 + Q_2 + Q_3 - \alpha P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\alpha^{\tau_m} Q_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\alpha^{\tau_m} Q_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\alpha^{\tau_M} Q_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\frac{1-\alpha}{\bar{\omega}^2} I \end{bmatrix} \leq 0 \tag{12}$$

式(12)左、右分别乘 $\text{diag}(P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, I)$ 得到

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & (A+BK)P^{-1} & (D+BG)P^{-1} & 0 & 0 & E \\ * & P^{-1}(Q_1 + Q_2 + Q_3)P^{-1} - \alpha P^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\alpha^{\tau_m} P^{-1} Q_3 P^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\alpha^{\tau_m} P^{-1} Q_1 P^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\alpha^{\tau_M} P^{-1} Q_2 P^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\frac{1-\alpha}{\bar{\omega}^2} I \end{bmatrix} \leq 0$$

令 $\bar{P} = P^{-1}$, $\bar{Q}_1 = P^{-1}Q_1P^{-1}$, $\bar{Q}_2 = P^{-1}Q_2P^{-1}$, $\bar{Q}_3 = P^{-1}Q_3P^{-1}$, $L = KP^{-1}$, $R = GP^{-1}$, 得到

$$\begin{bmatrix} -\bar{P} & A\bar{P} + BL & D\bar{P} + BR & 0 & 0 & E \\ * & -\alpha\bar{P} + \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + \bar{Q}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\alpha^{\tau_m}\bar{Q}_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\alpha^{\tau_m}\bar{Q}_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\alpha^{\tau_M}\bar{Q}_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\frac{1-\alpha}{\bar{\omega}^2} I \end{bmatrix} \leq 0$$

进一步, 考虑 Lyapunov 泛函初值 $V(\mathbf{x}(0))$

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}(0)) = & \mathbf{x}^T(0)P\mathbf{x}(0) + \sum_{i=-\tau_m}^{-1} \alpha^{-1-i} \mathbf{x}^T(i)Q_1\mathbf{x}(i) + \sum_{i=-\tau_M}^{-1} \alpha^{-1-i} \mathbf{x}^T(i)Q_2\mathbf{x}(i) + \sum_{i=-\tau(0)}^{-1} \alpha^{-1-i} \mathbf{x}^T(i)Q_3\mathbf{x}(i) \leq |\lambda_1| \mathbf{x}^T(0)\mathbf{x}(0) + \\ & |\lambda_2| \sum_{i=-\tau_m}^{-1} \mathbf{x}^T(i)\mathbf{x}(i) + |\lambda_3| \sum_{i=-\tau_M}^{-1} \mathbf{x}^T(i)\mathbf{x}(i) + |\lambda_4| \sum_{i=-\tau(0)}^{-1} \mathbf{x}^T(i)\mathbf{x}(i) \leq (\lambda_1 + \tau_m\lambda_2 + \tau_M\lambda_3 + \tau_M\lambda_4)\sigma = \mu\sigma \leq 1 \end{aligned}$$

由条件(10)~(11)和引理 2 可知,

即, $\mathbf{x}^T(k)P\mathbf{x}(k)$ 是椭圆 $\varepsilon(P, 1)$ 的内部。由此可以得出结论: 系统(7)的可达集包含在 $\varepsilon(P, 1)$ 中。定理 1 证毕。

$$V(\mathbf{x}(k)) = V_1(\mathbf{x}(k)) + V_2(\mathbf{x}(k)) + V_3(\mathbf{x}(k)) \leq 1$$

由于 $V_2(\mathbf{x}(k)), V_3(\mathbf{x}(k)) \geq 0$, 所以 $V_1(\mathbf{x}(k)) \leq 1$ 。

在状态反馈控制器设计过程中, 开环系统不一定稳定, 只需满足定理 1 中的相关条件, 就可以为系统设计控制器, 得到稳定的闭环系统。

定理 1 中得到的条件不是 LMI, 因为它包含决策变量的乘积。然而, 如果标量 α 是固定的, 则式(9)中的条件对于矩阵变量也是线性的。

为了求解带有参数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 的矩阵不等式式(10), 首先要将其转化为 LMIs 的形式。例如, 不等式 $\bar{P} \leq \lambda_1 I$ 可表述为线性矩阵不等式 $\bar{P} \leq \hat{P}$, 记 $\hat{P} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_1)$ 。其中 $\hat{P}$ 被定义为一个矩阵变量, 并且依赖于决策变量 λ_1 。

定理 1 以矩阵不等式的形式给出了界定可达集 $\varepsilon(\bar{P}^{-1}, 1)$ 的求解方法, 但本文的目的是该界定集合达到最小。Boyd 等^[1]提出 $\varepsilon(P, 1)$ 的体积与 $(\det P)^{-1/2}$ 成正比, 所以 $\log \det P^{-1}$ 最小等价于 $\varepsilon(P, 1)$ 的体积最小。Fridman 等^[6]和 Kim^[7]提出了一个简单的优化问题, 即

$$\begin{aligned} \max \quad & \delta \\ \text{s.t.} \quad & \delta I \leq P \end{aligned} \tag{13}$$

系统(13)优化问题可以转化为

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{\delta} \quad (\bar{\delta} = 1/\delta) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \begin{bmatrix} \bar{\delta} I & I \\ I & P \end{bmatrix} \geq 0 \\ \text{式(9)~(11)成立} \end{cases} \end{aligned} \tag{14}$$

由于 $\bar{P} = P^{-1}$, 对系统(14)中矩阵不等式约束左右分别乘 $\text{diag}(I, P^{-1})$, 则优化问题转化为

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{\delta} \quad (\bar{\delta} = 1/\delta) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \begin{bmatrix} \bar{\delta} I & \bar{P} \\ \bar{P} & \bar{P} \end{bmatrix} \geq 0 \\ \text{式(9)~(11)成立} \end{cases} \end{aligned} \tag{15}$$

利用上述优化方法求解最小的 $\bar{\delta}$, 对应椭球 $\varepsilon(\bar{P}^{-1}, 1)$ 的体积最小, 即 $\varepsilon(P, 1)$ 的体积最小, 由此可以求得可达集的最小界定集合。

2.2 算法描述

定理 1 给出了有界扰动下闭环系统的可达集的界定条件, 通过上述优化方法可以对边界椭球进行优化。然而, 定理 1 中的结果是一个包含非凸标量 α 时滞相关的矩阵不等式, 通过固定 α , 可以使该问题转化为求解线性矩阵不等式(LMI)。

为了获得可达集的最小椭球, 必须确定最优的标量 α , 这可以通过遗传算法(GA)来实现。算法如下:

a. 在(0, 1)中随机生成 α , 每个 α 都是 GA 种群的一个个体;

b. 对于每个 α , 利用 mincx. 求解包括变量的 LMI 优化问题, 得到最优的 $\bar{\delta}$;

c. 设置最大代数, 如果达到该数字, 则 GA 终止, 否则, 继续 GA 过程;

d. 根据每个 α 的适应值, 以概率选择下一代个体;

e. 根据给定的概率对新一代进行交叉和变异操作;

f. 重复上述步骤, 直到优化参数 $\bar{\delta}$ 不能进一步减少。

3 数值算例

本节给出两个数值实例来验证结果的有效性。

例 1 考虑时滞离散系统(1), 系统参数为

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0.21 & -0.01 \\ -0.90 & 0.10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.15 \end{bmatrix}, \\ D &= \begin{bmatrix} -0.02 & 0.01 \\ -0.20 & -0.01 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$\bar{\omega}=1, \tau_m=2, \tau_M=4$ 。假设初始条件为 $\varphi(k)=[0.2 \ 0.2]^T, k \in [-4, 0]$ 。求解优化问题(15), 计算结果如下:

当 $\alpha=0.530 \ 4$ 时, $\bar{\delta}=5.165 \ 3$, 此时相应的状态反馈控制器增益为

$$K = [-0.003 \ 5 \ -0.098 \ 4], \quad G = [0.493 \ 3 \ -0.056 \ 9]$$

由定理 1 得到的边界椭球以及闭环系统的状态如图 1 所示。由图可见, 闭环系统的状态包含在椭球 $\varepsilon(P, 1)$ 中。

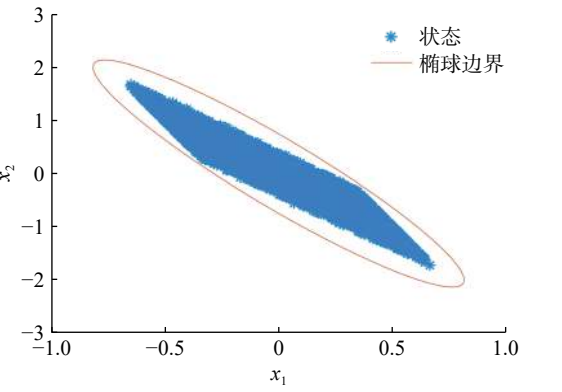


图 1 可达集和椭球边界(例 1)

Fig.1 Reachable set and ellipsoidal bound (Example 1)

例 2 考虑时滞离散系统(1), 系统参数如下:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1.5 & 1.2 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \\ D &= \begin{bmatrix} -0.02 & 0 \\ -0.10 & -0.01 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.4 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$\bar{\omega}=1, \tau_m=2, \tau_M=4$ 。假设初始条件为 $\varphi(k)=[-0.10 \ 0.15]^T, k \in [-4, 0]$ 。

注意到, 例 2 中 A 不是 Schur 稳定矩阵, 因此

开环系统的可达集不能被任何椭球体所界定。所以可以通过设计状态反馈控制器, 处理闭环系统的可达集估计问题。

通过求解优化问题(15), 计算结果如下:

当 $\alpha = 0.4571$ 时, $\bar{\delta} = 0.9211$, 此时相应的状态反馈控制器增益为

$$\mathbf{K} = [-3.7991 \quad 0.1256], \quad \mathbf{G} = [0.2787 \quad 0.0255]$$

由定理 1 得到的椭球边界以及闭环系统的状态如图 2 所示。由图可见, 闭环系统的状态包含在椭球 $\varepsilon(\mathbf{P}, 1)$ 中。

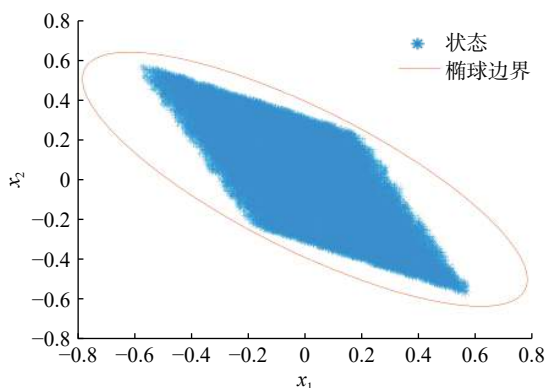


图 2 可达集和椭球边界(例 2)

Fig.2 Reachable set and ellipsoidal bound (Example 2)

4 结 论

研究了在有界峰值扰动下离散变时滞系统的可达集估计问题, 且系统的初值不必为零。通过设计状态反馈控制器, 将系统由开环系统转化为闭环系统。随后, 利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法给出了闭环系统可达集的椭球边界。为了使该椭球体尽可能小, 提出了优化方法。在此过程中, 采用遗传算法求解最优参数, 数值算例验证了本文所得结果的有效性。

参考文献:

[1] BOYD S, EL GHAOU L, FERON E, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory[M]. Philadelphia: SIAM, 1994.

[2] ABEDOR J, NAGPAL K, POOLLA K. A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain minimization[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control,

1996, 6(9/10): 899–927.

[3] DURIEU C, WALTER É, POLYAK B. Multi-input multi-output ellipsoidal state bounding[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2001, 111(2): 273–303.

[4] HU T S, LIN Z L. Control systems with actuator saturation: analysis and design[M]. Boston: Birkhäuser, 2001.

[5] GAO H J, CHEN T W. New results on stability of discrete-time systems with time-varying state delay[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(2): 328–334.

[6] FRIDMAN E, SHAKED U. On reachable sets for linear systems with delay and bounded peak inputs[J]. Automatica, 2003, 39(11): 2005–2010.

[7] KIM J H. Improved ellipsoidal bound of reachable sets for time-delayed linear systems with disturbances[J]. Automatica, 2008, 44(11): 2940–2943.

[8] ZUO Z Q, HO D W C, WANG Y J. Reachable set bounding for delayed systems with polytopic uncertainties: the maximal Lyapunov-Krasovskii functional approach[J]. Automatica, 2010, 46(5): 949–952.

[9] NAM P T, PATHIRANA P N. Further result on reachable set bounding for linear uncertain polytopic systems with interval time-varying delays[J]. Automatica, 2011, 47(8): 1838–1841.

[10] THAT N D, NAM P T, HA Q P. Reachable set bounding for linear discrete-time systems with delays and bounded disturbances[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2013, 157(1): 96–107.

[11] LAM J, ZHANG B Y, CHEN Y, et al. Reachable set estimation for discrete-time linear systems with time delays[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2015, 25(2): 269–281.

[12] ZHANG B Y, LAM J, XU S Y. Reachable set estimation and controller design for distributed delay systems with bounded disturbances[J]. Journal of the Franklin Institute, 2014, 351(6): 3068–3088.

[13] CHEN Y, LAM J, ZHANG B Y. Estimation and synthesis of reachable set for switched linear systems[J]. Automatica, 2016, 63: 122–132.

[14] KANG W, CHEN H, SHI K B, et al. Further results on reachable set bounding for discrete-time system with time-varying delay and bounded disturbance inputs[J]. Complexity, 2018, 2018: 9259284.

[15] 俞立. 鲁棒控制: 线性矩阵不等式处理方法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.

(编辑: 丁红艺)