

全纯曲线正规族分担超平面

郑晓杰, 刘晓俊

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 利用亚纯函数值分布理论和正规族理论、线性代数理论及研究方法, 研究了全纯曲线族分担超平面的正规性。设 $\mathcal{F}$ 是从 $D \subset \mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 的一族全纯映射, H_0 和 $H_l (H_l \neq H_0)$ 是 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 上处于一般位置的超平面, $l=1, 2, \dots, 8$ 。假定对于任意的 $f \in \mathcal{F}$ 满足条件: $f(z) \in H_l$ 当且仅当 $\nabla f \in H_l = \{x \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) : \langle x, \alpha_l \rangle = 0\}$; 若 $f(z) \in H_l$ 的并集, 有 $|\langle f(z), H_0 \rangle| / (\|f\| \|H_0\|)$ 大于或等于 δ 。 $0 < \delta < 1$, δ 是常数, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

关键词: 超平面; 正规族; 全纯曲线; 分担值

中图分类号: O 174.56 **文献标志码:** A

Shared hyperplanes and normal families of holomorphic curves

ZHENG Xiaojie, LIU Xiaojun

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: Based on some fundamental knowledge, research methods and results about the theories of value distribution and normal family for meromorphic functions, and linear algebra, the normality of the families of holomorphic curves is considered. Let $\mathcal{F}$ be a family of holomorphic maps of a domain $D \subset \mathbb{C}$ into $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$. Let H_0 and $H_l \neq H_0$ be hyperplanes in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ located in general position, where $l=1, 2, \dots, 8$. Assume the following conditions hold for every $f \in \mathcal{F}$: $f(z)$ belongs to H_l ; if and only if ∇f belongs to $H_l = \{x \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) : \langle x, \alpha_l \rangle = 0\}$; if $f(z)$ belongs to the union set of H_l , then $|\langle f(z), H_0 \rangle| / \|f\| \|H_0\|$ is equal or greater than δ , where $0 < \delta < 1$ is a constant. Then $\mathcal{F}$ is normal on.

Keywords: hyperplane; normal family; holomorphic curve; value sharing

1 问题的提出

在亚纯函数的值分布和正规族理论中, 有一个著名的现象 (Block 原理), 即一个在区域 $D \subset \mathbb{C}$ 有性质 $\mathcal{P}$ 的亚纯函数族是正规的, 如果这个

性质 $\mathcal{P}$ 使得亚纯函数在整个复平面 $\mathbb{C}$ 上是常数。Zalcman发表了一个更精确的叙述 (Zalcman 引理和 Zalcman-Pang 引理^[1-2]) 去判断亚纯函数族的正规性。在全纯曲线的例子中也存在一些类似的现象。

收稿日期: 2021-03-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11871216)

第一作者: 郑晓杰 (1993-), 男, 硕士研究生。研究方向: 复分析。E-mail: 1430974500@qq.com

通信作者: 刘晓俊 (1982-), 男, 副教授。研究方向: 复分析。E-mail: xiaojunliu2007@hotmail.com

Chen 等^[3]证明了全纯曲线在强分担条件下的唯一性定理(定理1)。

定理 1 f 和 g 是从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的 2 个非常数全纯曲线, $1 \leq j \leq q$, H_j 是 q 个在 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 上处于一般位置的超平面, 使得 $f(\mathbb{C}) \not\subseteq H_j, g(\mathbb{C}) \not\subseteq H_j, f(z)$ 和 $g(z)$ 分担 $H_j, 1 \leq j \leq q$ 。如果 $q \geq 2N+3$, 则 $f=g$ 。

这里的“分担”意味着不仅 $f(z) \in H_j, g(z) \in H_j$, 而且要求在 $f^{-1}(H_j)=g^{-1}(H_j)$ 上, $f(z)=g(z)$ 。

Yang 等^[4]考虑了全纯曲线正规族理论的相应结果, 得到定理 2。

定理 2 $\mathcal{F}$ 是从 $D \subset \mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯曲线族, H_j 是 $q \geq 2N+1$ 个在 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 上处于一般位置的超平面, $1 \leq j \leq q$ 。假定对于任意的 $f, g \in \mathcal{F}, f(z) \in H_j \Leftrightarrow g(z) \in H_j, z \in D, 1 \leq j \leq q$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

刘晓俊等^[5]使用了一个导曲线的特殊曲线去替代 g , 证明了定理 3。

定理 3 $\mathcal{F}$ 是从 $D \subset \mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的一族全纯映射, $H_l=\{x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}): x, \alpha_l=0\}$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 上处于一般位置的超平面, 其中, $\alpha_l=(a_{l0}, \cdots, a_{lN})^T$ 和 $a_{l0} \neq 0, l=1, 2, \cdots, 2N+1$ 。假定对于任意的 $f \in \mathcal{F}$, 满足下列条件:

- a. 若 $f(z) \in H_l$, 则 $\nabla f \in H_l, l=1, 2, \cdots, 2N+1$;
- b. 若 $f(z) \in \bigcup_{l=1}^{2N+1} H_l$, 则 $\frac{|f(z), H_0|}{fH_0} \geq \delta$, 其中, $0 < \delta < 1, \delta$ 是常数, $H_0=\{w_0=0\}$ 。

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

Liu 等^[6]去除了上述定理在 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 中超平面第一个系数的限制, 证明了定理 4。

定理 4 $\mathcal{F}$ 是从 $D \subset \mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 的一族全纯映射, $H_0=\{w_0=0\}, H_l=\{x \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}): x, \alpha_l=0\} \neq H_0$ 是 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 上处于一般位置的超平面, 其中, $\alpha_l=(a_{l0}, a_{l1}, a_{l2})^T, l=1, 2, 3, 4, 5$ 。假定对于任意的 $f \in \mathcal{F}$ 满足下列条件:

- a. $f(z) \in H_l$ 当且仅当 $\nabla f \in H_l, l=1, 2, 3, 4, 5$;
- b. 若 $f(z) \in \bigcup_{l=1}^5 H_l$, 则 $\frac{|f(z), H_0|}{fH_0} \geq \delta$, 其中, $0 < \delta < 1, \delta$ 是一个常数。

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

由定理 4 可知, 定理 4 的证明不能被推广到 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 的情况, 因此, 引出定理 5。

定理 5 $\mathcal{F}$ 是从 $D \subset \mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 的一族全纯映射, $H_0=\{w_0=0\}$ 和 $H_l=\{x \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}): x, \alpha_l=0\} \neq H_0$ 是 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 上处于一般位置的超平面, 其中, $\alpha_l=(\alpha_{l0}, \alpha_{l1}, \alpha_{l2}, \alpha_{l3})^T, l=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 。假定对于任意的 $f \in \mathcal{F}$ 满足下列条件:

- a. $f(z) \in H_l$ 当且仅当 $\nabla f \in H_l, l=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$;
- b. 若 $f(z) \in \bigcup_{l=1}^8 H_l$, 则 $\frac{|f(z), H_0|}{fH_0} \geq \delta$, 其中, $0 < \delta < 1$ 是常数。

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

在证明定理 5 之前, 先说明一些概念。

一般地, D 是 $\mathbb{C}$ 上一个区域, $H_0=\{w_0=0\}$ 总是表示第一坐标超平面。 $f_n(z) \Rightarrow f(z), z \in D$ 表示 $\{f_n\}$ 在 D 的紧致集上关于 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 上的 Fubini-Study 度量一致收敛于 f 。对于在 D 上的全纯曲线 $f(z), f(z)$ 在点 z 处的球面导数定义为 $f=\frac{|f \wedge f'|}{\|f\|^2}$ 。

2 重要概念

首先介绍 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的一些定义和概念。

$\mathbb{P}^N(\mathbb{C})=\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\} / \sim$ 为 N 维复射影空间, 对于 $x=(x_0, x_1, \cdots, x_N), y=(y_0, y_1, \cdots, y_N) \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C})=\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}, x \sim y$ 当且仅当存在 $\lambda \in \mathbb{C}$, 使得 $(x_0, x_1, \cdots, x_N)=\lambda(y_0, y_1, \cdots, y_N)$ 。 $(x_0, x_1, \cdots, x_N)$ 的等价类定义为 $[x_0: x_1: \cdots: x_N], \mathbb{P}^N(\mathbb{C})=\{x=[x_0: x_1: \cdots: x_N]: x=(x_0, x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}\}$ 。 $H_1, H_2, \cdots, H_q$ 为 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 上的超平面, 它们定义为 $H_\ell=\{x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}): \langle x, \alpha_\ell \rangle = a_{\ell 0} x_0 + a_{\ell 1} x_1 + \cdots + a_{\ell N} x_N = 0\}$, 其中, 非零向量 $\alpha_\ell=(a_{\ell 0}, a_{\ell 1}, \cdots, a_{\ell N})^T, \ell=1, 2, \cdots, q$ 。

定义 1 超平面 $H_1, H_2, \cdots, H_q$ 处于一般位置, 如果对于任意的单射 $\varphi: \{0, 1, 2, \cdots, N\} \rightarrow \{1, 2, \cdots, q\}$, 向量组 $\alpha_{\varphi(0)}, \cdots, \alpha_{\varphi(N)}$ 是线性无关的。

其次, 令 $f: D \rightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 为全纯映射, U 为 D 上一个开集。对于任何全纯映射 $f: U \rightarrow \mathbb{C}^{N+1}$, 使得 $\mathbb{P}(f(z)) \equiv f(z), z \in U$, 称 f 为在 U 上的一个代表, 其中, $\mathbb{P}: \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 为标准商映射。

定义 2 对于 D 的任意开子集 U , 若 $f_0, f_1, \cdots, f_N$ 是 U 上没有公共零点的全纯函数, 则称 $f=(f_0, f_1, \cdots, f_N)$ 为 f 在 U 上的简约表示。

$H_\ell=\{x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}): x, \alpha_\ell=0\}$ 为一个超平面, 定义 $\|H\|=\|\alpha\|=\max_{0 \leq i \leq N} |a_i|$ 。一般地, 只考虑标准超平面, 使得 $\|H\|=1$ 。

对于全纯映射 f 的任意简约表示 f , 定义全纯函数

$$\langle f(z), H \rangle = \langle f(z), \alpha \rangle = \sum_{i=0}^N a_i f_i(z)$$
$$\|f(z)\| = \left\{ \sum_{i=0}^N |f_i(z)|^2 \right\}^{1/2}$$

根据文献 [7] 中定义的导曲线, 可得定义 3。

定义 3 设 f 是从 D 到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯映射, $f = (f_0, f_1, \dots, f_N)$ 是 f 在 D 上的任意简约代表, $f_{\mu}(z) \not\equiv 0$, $\mu \in \{0, 1, \dots, N\}$, 则有

$$\nabla_{\mu}(f(z)) = [W(f_{\mu}, f_0)/d : \dots : W(f_{\mu}, f_{\mu-1})/d : f_{\mu}^2/d : W(f_{\mu}, f_{\mu+1})/d : \dots : W(f_{\mu}, f_N)/d]$$

被称为 f 的第 μ 个导全纯映射, 其中, $d(z)$ 为全纯函数, 使得 f_{μ}^2/d 和 $W(f_{\mu}, f_i)/d$ 没有公共零点, $i = 0, 1, \dots, N, i \neq \mu$ 。

为了简单起见, $\nabla_{\mu}f$ 写为 ∇f , 显然, $\nabla_{\mu}f$ 的定义不依赖于 f 的简约表示的选择。

3 预备定理

在给出定理 5 的证明之前, 需要由 Aladro 等^[8] 证明的从区域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯映射的 Zalcman 引理。

引理 1^[8] $\mathcal{F}$ 是从双曲区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的一族全纯映射, 若 $\mathcal{F}$ 在 Ω 上不正规且仅当存在数列 $\{f_n\} \subset \mathcal{F}, \{z_n\} \subset \Omega, z_n \rightarrow z_0 \in \Omega$, 和 $\{\rho_n\}, \rho_n > 0, \rho_n \rightarrow 0$, 使得

$$g_n(\zeta) := f_n(z_n + \rho_n \zeta)$$

在 $\mathbb{C}$ 的紧致集上一致收敛到一个非常数全纯映射 g, g 从 $\mathbb{C}$ 映到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 。

由 Nevanlinna 理论中退化的第二基本定理得到引理 2。

引理 2^[9] 设 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 是一个全纯映射, $H_1, \dots, H_q (q \geq 2N+1)$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 上处于一般位置的超平面。若对于 $j = 1, \dots, q, f(\mathbb{C})$ 不是含于 H_j 中, 就是不含于 H_j , 则 f 是常数。

引理 3^[9] 设 $f_0, f_1, \dots, f_{n+1}$ 是处处不为 0 的整函数, 且

$$f_0 + f_1 + \dots + f_{n+1} = 0$$

考虑划分

$$\{0, 1, \dots, n+1\} = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k$$

使得 i 和 j 在同一个类 I_{ℓ} 当且仅当 $f_i = c_{ij}f_j, c_{ij}$ 为某个非零常数, 则对于任意的 I_{ℓ} , 可得

$$\sum_{i \in I_{\ell}} f_i = 0$$

引理 4^[10] 若 $f(z)$ 和 $\phi_{\nu}(z) (\nu = 1, 2, 3)$ 是有限平面上的亚纯函数, 使得

$$T(r, \phi_{\nu}) = o\{T(r, f)\}, \nu = 1, 2, 3$$

则有

$$\{1 - o(1)\}T(r, f) < \sum_{\nu=1}^3 N\left(r, \frac{1}{f - \phi_{\nu}}\right) + S(r, f)$$

其中, $S(r, f) = o\{T(r, f)\}, r \rightarrow \infty$ 。

引理 5^[6] 设 $g = [g_0 : \dots : g_N] : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 是有穷级的全纯曲线, $g_0(\zeta) \not\equiv 0$, 其中, $N \geq 2, N$ 是整数。 $H_{\ell} = \{x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) : x, \alpha_{\ell} = 0\}$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 上处于一般位置的超平面, 它们的首项系数 $a_{\ell 0}$ 非零, $\ell = 1, 2, \dots, 2N+1$ 。 设 $g(\zeta) = (g_0, g_1, \dots, g_N)(\zeta)$ 是 g 的任意简约代表, 定义

$$G_{\ell} = a_{\ell 0} + \sum_{i=1}^N a_{\ell i} \frac{g_i(\zeta)}{g_0(\zeta)}, \ell = 1, 2, \dots, N+1$$

假定 $G_{\ell}(\zeta) \neq 0, \zeta \in \mathbb{C}$ 和 $G'_{\ell}(\zeta) \neq 0, \zeta \in \mathbb{C}$, 则 g 线性退化。

4 定理 5 的证明

假定 $\mathcal{F}$ 在 D 上不正规, 则由引理 1 可知, 存在 $z_n \rightarrow z_0 \in D$, 正点列 $\rho_n \rightarrow 0$ 和全纯映射列 $f_n \in \mathcal{F}$, 使得

$$g_n(\zeta) = f_n(z_n + \rho_n \zeta) \Rightarrow g(\zeta), \zeta \in \mathbb{C}$$

其中, g 是 $\mathbb{C}$ 上的有穷级的非常数全纯映射。

设 $g(\zeta) = (g_0, g_1, g_2, g_3)(\zeta)$ 是 g 的简约代表。 因为, H_{ℓ} 处于一般位置, $1 \leq \ell \leq 8$, 不失一般性, 可以假设 H_1, H_2, H_3, H_4 和 H_5 的首项系数不为 0。

情形 1 g 是非线性退化。

从定理 4 的 a 可得 $G_{\ell}(\zeta) \neq 0$ 和 $G'_{\ell}(\zeta) \neq 0, \ell = 1, 2, 3, 4, 5, \zeta \in \mathbb{C}$, 则由引理 5 可得, g 是线性退化, 矛盾。

情形 2 g 是线性退化。

假设 g_0, g_1, g_2 是线性非退化。 因为, $G_{\ell} \equiv 0$ 或者 $G_{\ell} \neq 0, \ell = 1, 2, 3, 4, 5$, 而由引理 5 可知, 有 $g_0 \neq 0$ 和 g 是一个全纯映射, 则 G_{ℓ} 在 $\mathbb{C}$ 上全纯。

因为, $\rho_{G_{\ell}} \leq 1, 1 \leq \ell \leq 5$, 则

$$G_{\ell} = a_{\ell 0} + a_{\ell 1} \frac{g_1}{g_0} + a_{\ell 2} \frac{g_2}{g_0} + a_{\ell 3} \frac{g_3}{g_0} = B_{\ell} e^{A_{\ell} \zeta}, 1 \leq \ell \leq 5$$

特别地, 当 $G_{\ell} \equiv 0, B_{\ell} = 0, \forall j_1, j_2, j_3, j_4 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 不失一般性, 设 $j_1 = 1, j_2 = 2, j_3 = 3, j_4 = 4$, 令 $k_1 B_1 e^{A_1 \zeta} + k_2 B_2 e^{A_2 \zeta} + k_3 B_3 e^{A_3 \zeta} + k_4 B_4 e^{A_4 \zeta} = 0$, 其中, k_1, k_2, k_3 和 k_4 为常数。

因为, $1, \frac{g_1}{g_0}, \frac{g_2}{g_0}, \frac{g_3}{g_0}$ 是线性退化, 则存在一个非零向量 $(b_1, b_2, b_3, b_4)^T$, 使得

$$\left(1, \frac{g_1}{g_0}, \frac{g_2}{g_0}, \frac{g_3}{g_0}\right) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = 0$$

令

$$A = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{20} & a_{30} & a_{40} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{pmatrix}$$

因为， $\det A \neq 0$ ，则令 $(k_1, k_2, k_3, k_4)^T = A^{-1}(b_1, b_2, b_3, b_4)^T$ ，它是一个非零向量，则 $B_1e^{A_1\zeta}, B_2e^{A_2\zeta}, B_3e^{A_3\zeta}, B_4e^{A_4\zeta}$ 是线性退化。

断言 存在单射 $\sigma: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ ，使得 $B_{\sigma(1)}e^{A_{\sigma(1)}\zeta}, B_{\sigma(2)}e^{A_{\sigma(2)}\zeta}, B_{\sigma(3)}e^{A_{\sigma(3)}\zeta}$ 线性非退化。

证明 不失一般性，可以假设存在 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 ，使得 $B_4e^{A_4\zeta} = \ell_1B_1e^{A_1\zeta} + \ell_2B_2e^{A_2\zeta} + \ell_3B_3e^{A_3\zeta}$ 。因为，

$$(B_1e^{A_1\zeta}, B_2e^{A_2\zeta}, B_3e^{A_3\zeta}, B_4e^{A_4\zeta}) = A \left(1, \frac{g_1}{g_0}, \frac{g_2}{g_0}, \frac{g_3}{g_0}\right)$$

则

$$\left(1, \frac{g_1}{g_0}, \frac{g_2}{g_0}, \frac{g_3}{g_0}\right) = (B_1e^{A_1\zeta}, B_2e^{A_2\zeta}, B_3e^{A_3\zeta}, B_4e^{A_4\zeta})A^{-1}$$

所以，可令

$$\frac{g_j}{g_0} = \sum_{i=1}^3 c_{ij}B_ie^{A_i\zeta}, j = 0, 1, 2$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \\ c_{30} & c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

若 $r(C) \leq 2$ ，那意味着方程组

$$C \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 0$$

有非零解，则存在不全为 0 的数 q_0, q_1, q_2 ，使得

$$(B_1e^{A_1\zeta}, B_2e^{A_2\zeta}, B_3e^{A_3\zeta})C \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 0$$

即

$$\left(1, \frac{g_1}{g_0}, \frac{g_2}{g_0}\right) \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 0$$

则 $1, \frac{g_1}{g_0}, \frac{g_2}{g_0}$ 是线性退化，矛盾，所以， $r(C) = 3$ 。

如果 $B_1e^{A_1\zeta}, B_2e^{A_2\zeta}, B_3e^{A_3\zeta}$ 是线性退化，则存在不全为 0 的 c_0, c_1, c_2 ，使得

$$(B_1e^{A_1\zeta}, B_2e^{A_2\zeta}, B_3e^{A_3\zeta}) \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

由式 (1) 可得

$$\left(1, \frac{g_1}{g_0}, \frac{g_2}{g_0}\right) C^{-1} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

那意味着 $1, \frac{g_1}{g_0}, \frac{g_2}{g_0}$ 是线性退化，矛盾，故断言得证。

所以， $B_1e^{A_1\zeta}, B_2e^{A_2\zeta}, B_3e^{A_3\zeta}$ 是线性非退化，意味着 A_1, A_2, A_3 互不相同。因为， $H_\ell, 1 \leq \ell \leq 5$ 是 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 上处于一般位置的超平面，则 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 中任意 4 个存在 3 个不同。

若存在 $l \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，使得 $B_l = 0$ ，不失一般性，令 $B_5 = 0$ ，则 $B_i \neq 0, i = 1, 2, 3, 4$ 。

因为， $B_1e^{A_1\zeta}, B_2e^{A_2\zeta}, B_3e^{A_3\zeta}, B_4e^{A_4\zeta}$ 线性退化，不失一般性，令 $A_1 = A_2$ ，显然，在 $B_1e^{A_1\zeta}, B_2e^{A_2\zeta}, B_3e^{A_3\zeta}, B_5e^{A_5\zeta}$ 中不存在 3 个线性非退化，矛盾，所以， $B_l \neq 0, l = 1, 2, 3, 4, 5$ 。

因为， $\forall j_1, j_2, j_3, j_4 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ， $B_{j_1}e^{A_{j_1}\zeta}, B_{j_2}e^{A_{j_2}\zeta}, B_{j_3}e^{A_{j_3}\zeta}, B_{j_4}e^{A_{j_4}\zeta}$ 线性退化，这意味着在 $A_{j_1}, A_{j_2}, A_{j_3}, A_{j_4}$ 中存在 2 个相同，所以， A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 中任意 4 个存在 2 个相同。

若 A_1, A_2, A_3 互不相同，则 A_4 等于 A_1, A_2, A_3 中一个，不妨设 $A_4 = A_1$ 。类似地， A_5 等于 A_1, A_2, A_3 中一个，不妨设 $A_5 = A_2$ 。

所以，在 A_1, A_2, A_4, A_5 中不可能存在 3 个相同，矛盾，则 g_0, g_1, g_2 线性退化。

因此，存在不全为 0 的 p_0, p_1, p_2 ，使得 $p_0g_0 + p_1g_1 + p_2g_2 = 0$ 。

a. $p_2 \neq 0$ ，则 $g_2 = -\frac{p_0}{p_2}g_0 - \frac{p_1}{p_2}g_1$ ，并且 g_2, g_3 可被 g_0, g_1 线性表示。

所以，存在常数 k_1, k_2, l_1, l_2 ，使得 $g_2 = k_1g_0 + k_2g_1, g_3 = \ell_1g_0 + \ell_2g_1$ ，则

$$G_\ell = a_{\ell 0} + a_{\ell 1} \frac{g_1}{g_0} + a_{\ell 2} \frac{g_2}{g_0} + a_{\ell 3} \frac{g_3}{g_0} = a_{\ell 0} + a_{\ell 2}k_1 + a_{\ell 3}\ell_1 + (a_{\ell 1} + a_{\ell 2}k_2 + a_{\ell 3}\ell_2) \frac{g_1}{g_0}$$

因为， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，则存在 $\ell \in \{1, 2, 3, 4\}$ ，使得 $a_{\ell 1} + a_{\ell 2}k_2 + a_{\ell 3}\ell_2 \neq 0$ 。

若对于这样的 $\ell, G'_\ell \equiv 0$ ，有 $\left(\frac{g_1}{g_0}\right)' \equiv 0$ ，它意味着 $\frac{g_1}{g_0} \equiv C$ ，矛盾，所以， $G'_\ell \neq 0$ 和 $\left(\frac{g_1}{g_0}\right)' \neq 0$

不失一般性，由引理 2 可假设 H_6 的首项系数不为 0，即 $a_{60} \neq 0$ 。如果 H_7 的第一个系数仍不为

0, 即 $a_{70} \neq 0$, 有 g 不取 H_7 或者 $g(\mathbb{C})$ 含于 H_7 。

因为, $\alpha_6 = (0, a_{61}, a_{62}, a_{63})^T$, 所以, $\langle g, \alpha_6 \rangle$ 的所有零点是重级的。因此,

$$G_6 = a_{62}k_1 + a_{63}\ell_1 + (a_{61} + a_{62}k_2 + a_{63}\ell_2)\frac{g_1}{g_0}$$

的所有零点是重级的。

如果对于任意 $\zeta \in \mathbb{C}$, $\langle g, \alpha_6 \rangle \neq 0$ 或 $\equiv 0$ 。由引理 2 可得 g 是常数曲线, 矛盾。

则存在 $\zeta_0 \in \mathbb{C}$, 使得 $\langle g, \alpha_6(\zeta_0) \rangle = 0$ 和 $\langle g, \alpha_6(\zeta) \rangle \neq 0$, 这意味着

$$(a_{61} + a_{62}k_2 + a_{63}\ell_2)\left(\frac{g_1}{g_0}\right)' \Big|_{\zeta_0} = 0$$

矛盾。

因此, H_7 的第一个系数为零, 即 $a_{70} = 0$ 。类似地, 有 $\langle g, \alpha_\ell \rangle$ 的所有零点为重级零点, 即

$$G_\ell = a_{\ell 2}k_1 + a_{\ell 3}\ell_1 + (a_{\ell 1} + a_{\ell 2}k_2 + a_{\ell 3}\ell_2)\frac{g_1}{g_0}, \quad \ell = 6, 7$$

的所有零点是重级零点。

若对于任意的 $\zeta \in \mathbb{C}$, $\langle g, \alpha_\ell \rangle \neq 0$ 或 $\equiv 0$, $\ell = 6, 7$ 。由引理 2, g 是常数曲线, 矛盾。所以, 存在 $\zeta_0 \in \mathbb{C}$, $\ell = 6$ 或 7 , 使得 $\langle g, \alpha_\ell(\zeta_0) \rangle = 0$ 和 $\langle g, \alpha_\ell(\zeta) \rangle \neq 0$ 。这意味着

$$(a_{\ell 1} + a_{\ell 2}k_2 + a_{\ell 3}\ell_2)\left(\frac{g_1}{g_0}\right)' \Big|_{\zeta_0} = 0$$

矛盾。

b. $p_2 = 0$, 则 p_0, p_1 不全为 0。

(a) $p_0 \neq 0$, 矛盾;

(b) $p_0 = 0$, 则 $p_1 \neq 0$, 这意味着 $g_1 \equiv 0$, 则 $\frac{g_1}{g_0} \equiv 0$, 矛盾。

因此, $\mathcal{F}$ 在 D 上正规, 所以, 定理 5 得证。

参考文献:

[1] ZALCMAN L. A heuristic principle in complex function theory[J]. [The American Mathematical Monthly](#), 1975, 82(8): 813–817.

[2] ZALCMAN L. Normal families: new perspectives[J]. [Bulletin of the American Mathematical Society](#), 1998, 35(3): 215–230.

[3] CHEN Z H, YAN Q M. Uniqueness theorem of meromorphic mappings into $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ sharing $2N + 3$ hyperplanes regardless of multiplicities[J]. [International Journal of Mathematics](#), 2009, 20(6): 717–726.

[4] YANG L, FANG C Y, PANG X C. Normal families of holomorphic mappings into complex projective space concerning shared hyperplanes[J]. [Pacific Journal of Mathematics](#), 2014, 272(1): 245–256.

[5] 刘晓俊, 庞学诚, 杨锦华. 涉及分担超平面的正规规则[J]. 数学年刊A辑, 2021, 42(2): 171–178.

[6] LIU X J, PANG X C. Shared hyperplanes and normal families of holomorphic curves[J]. [International Journal of Mathematics](#), 2020, 31(5): 2050037.

[7] YE Y S, PANG X C, YANG L. An extension of schwick's theorem for normal families[J]. [Annales Polonici Mathematici](#), 2015, 115(1): 23–31.

[8] ALADRO G, KRANTZ S G. A criterion for normality in C^n [J]. [Journal of Mathematical Analysis and Applications](#), 1991, 161(1): 1–8.

[9] RU M. Nevanlinna theory and its relation to diophantine approximation[M]. Atlanta, GA, USA: World Scientific Publishing, 2001.

[10] YANG L. Value distribution theory[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

(编辑: 石 瑛)